ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 1, 1983 Математика

УДК 517.98

Р. А. АЛИХАНЯН

ВНЕШНЯЯ ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ С ДАННЫМИ ИЗ L_1 ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Пусть Γ — конечная система попарно непересекающихся гладких замкнутых кривых $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ на плоскости, делящая ее на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-, содержащую бесконечно удаленную точку. Конечные области, ограниченные кривыми Γ_m обозначим через $D_m^+ : D^+ = \bigcup\limits_{m=1}^{n} D_m^+$. Положительным направлением на $\Gamma\,(\Gamma_m)$ будем считать то, которое оставляет область D^+ (D_m^+) слева. Не ограничивая общности будем считать, что начало координат лежит в области D^+.

В области D^- рассмотрим правильно эллиптическое уравнение

$$a_0 u_{xx} + a_1 u_{xy} + a_2 u_{yy} = 0, \tag{1}$$

где a_0, a_1, a_2 — заданные комплексные числа, а $u(z)$ — искомая комплекснозначная функция. Без ограничения общности предположим, что $\lambda_1 = i$ является корнем характеристического уравнения $a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 = 0$. Для второго корня $\operatorname{Im} \lambda_2 < 0$.

В работе для уравнения (1) исследуется задача Дирихле с данными из L_1 в области D^-.

Внешняя задача Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в функциональных пространствах Соболева, в гёльдеровских классах функций и в $L_p\,(1 < p < \infty)$ при различных предположениях относительно коэффициентов, решения и области, рассматривалась многими авторами [1—7].

Задача Дирихле с данными из L_1 для эллиптических уравнений второго порядка с вещественными коэффициентами рассмотрена в работах [8—12]. В [10] получены теоремы существования и единственности решения обобщенной задачи Дирихле в ограниченной области для равномерно эллиптического уравнения. Дано представление решения (через функцию Грина) в виде главной части, которая выписывается в явном виде, и гладкого остатка, являющегося классическим решением соответствующей краевой задачи. В [11, 12] доказана однозначная разрешимость в L_1 задачи Дирихле для эллиптических систем второго порядка с вещественными коэффициентами, удовлетворяющих условию Лопатинского, в области $|z| > 1$ и в полуплоскости $y > 0$.

В работах [13, 14] доказана фредгольмовость задачи Дирихле для слабо связанных эллиптических уравнений с постоянными вещественными коэффициентами в области $|z| < 1$.

Ниже будет доказано существование и единственность решения задачи Дирихле в L_1 для уравнения (1) в области D^-. Выписывая общее решение уравнения (1) через произвольные аналитические функции комплексного переменного [15] и используя интегральное представление для аналитической функции, полученное в [16], задача Дирихли для уравнения (1) редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма, разрешимость которого следует из единственности задачи.

1°. Пусть $f \in C_0(\Gamma)$. Найдем ограниченное в области D^- решение $u(z)$ уравнения (1), принадлежащее классу $C^2(D^-) \cap C_*(D^- + \Gamma)$ и удовлетворяющее краевому условию

$$u(t) = f(t), \quad t \in \Gamma. \tag{2}$$

Как известно, если решение $u(z)$ уравнения (1) ограничено на бесконечности, то [3]

$$|u_x| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^2}, \quad |u_y| \leqslant \frac{\text{const}}{|z|^2}.$$

При этих условиях в [z] показано, что однородная задача Дирихле для уравнения (1) имеет только нулевое решение, из чего следует единственность задачи (1), (2).

Решение $u(z)$ задачи (1), (2) будем искать в виде

$$u(z) = \varphi(z) + \psi(\bar{z} + \mu z) + \sum_{m=1}^{n} c_m \ln(z - a_m) + \sum_{m=1}^{n} c_m \ln[\overline{z - a_m} +$$

$$+ \mu(z - a_m)] + c_0, \tag{3}$$

где $\varphi(z)$, $\psi(\bar{z} + \mu z) \in C_*(D^- + \Gamma)$ — исчезающие на бесконечности произвольные аналитические функции от своих аргументов при $s \in D^-$, $c_0, c_1, \cdots, c_n$ — произвольные постоянные, удовлетворяющие условию

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = 0, \tag{4}$$

a_m — фиксированные точки из области D_m^+, а $\mu = \dfrac{i + \lambda_2}{i - \lambda_2}$, $|\mu| < 1$.

Легко установить, что если в (3) $u(z) \equiv 0$, то $\varphi(z) \equiv 0$, $\psi(z) \equiv 0$, $c_m = 0$ $(m = 0, 1, \cdots, n)$.

Функция $\psi(\bar{z} + \mu z)$, входящая в (3), допускает следующее интегральное представление ([16]):

$$\psi(\beta(z)) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\gamma(t)\, \Psi(t)\, d\beta(t)}{\beta(t) - \beta(z)}, \quad z \in D^-, \tag{5}$$

где $\beta(z) = \bar{z} + \mu z$ — обратный сдвиг, $\gamma(t) = \prod\limits_{m=1}^{n} (t - a_m)$, $a_m \in D_m^+$, $\Psi(z) \in$ $\in C_*(D^+ + \Gamma)$ — аналитическая функция в D^+, причем плотность $\Psi(t)$ однозначно определяется функцией $\psi(\beta(z))$.

Подставляя выражение (5) для $\psi(\beta(z))$ в (3) и переходя к пределу при $z \to t_0 \in \Gamma$ ($z \in D^-$), в силу (2) и формул Сохоцкого—Племеля [17], получим уравнение

$$f(t_0) = \varphi(t_0) + \frac{1}{2}\gamma(t_0)\Psi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(t)\Psi(t)\,d\beta(t)}{\beta(t)-\beta(t_0)} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{n} c_m \ln(t_0 - a_m)\left[\overline{t_0 - a_m} + \mu(t_0 - a_m)\right] + c_0. \tag{6}$$

Поскольку $\gamma(t)\Psi(t)$ есть граничное значение функции, аналитической в D^+, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\gamma(t)\Psi(t)\,dt}{t-t_0} = \frac{1}{2}\gamma(t_0)\Psi(t_0), \quad t_0 \in \Gamma. \tag{7}$$

Пользуясь соотношением (7), уравнение (6) преобразуем к виду

$$\varphi(t_0) + \gamma(t_0)\Psi(t_0) = g(t_0), \tag{8}$$

где

$$g(t_0) = f(t_0) - \int_\Gamma k(t_0, t)\gamma(t)\Psi(t)\,dt -$$

$$- \sum_{m=1}^{n} c_m \ln(t_0 - a_m)\left[\overline{t_0 - a_m} + \mu(t_0 - a_m)\right] + c_0,$$

$$k(t_0, t) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\beta'(t)}{\beta(t)-\beta(t_0)} - \frac{1}{t-t_0}\right]. \tag{9}$$

Так как $\beta'(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, то $k(t_0, t)$ имеет вид

$$k(t_0, t) = \frac{k_1(t_0, t)}{(t-t_0)^{1-\mu}}, \quad 0 < \mu \leqslant 1, \tag{10}$$

где $k_1(t_0, t)$ на Γ по переменным t и t_0 удовлетворяет условию Гёльдера.

Перепишем уравнение (8) в виде

$$\Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = g(t_0), \quad t_0 \in \Gamma, \tag{11}$$

где $\Phi(z)$ — исчезающая на бесконечности кусочно-аналитическая функция с линией скачков Γ, определяемая соотношениями

$$\Phi(z) = \gamma(z)\Psi(z) \text{ при } z \in D^+, \quad \Phi(z) = -\varphi(z) \text{ при } z \in D^-.$$

Граничная задача (11) есть известная задача сопряжения, единственное решение которой дается формулой [17]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{g(t_0)\,dt_0}{t_0 - z}. \tag{12}$$

Подставляя в (12) $z = a_m \in D_m^+$ и учитывая, что $\Phi(a_m) = 0$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(t_0)\,dt_0}{t_0-a_m}=0 \quad (m=1,\cdots,n). \tag{13}$$

Введем банахово пространство B вектор-функций $\tilde{\Phi}=(\Phi(z), c_0,\cdots$ $\cdots, c_n)$ с нормой

$$\|\tilde{\Phi}\| = \max\left(\max_{t\in\Gamma}|\Phi(t)|,\ \max_{0<m<n}|c_m|\right),$$

где $\Phi(z)$—кусочно-аналитическая функция с линией скачков Γ, а c_0, $c_1,\cdots, c_n$ — постоянные. Тогда систему уравнений (4), (12), (13) относительно $\Phi(z)$, $c_0,\cdots, c_n$ в пространстве B можно записать в виде уравнения

$$\tilde{\Phi}=K(\tilde{\Phi})+\tilde{f}, \tag{14}$$

в котором K—вполне непрерывный оператор в B, явное выражение которого нетрудно выписать, а $\tilde{f}$ — $(n+1)$-мерный вектор из пространства B, зависящий от граничного условия.

Уравнение (14) является уравнением Фредгольма, разрешимость которого следует из единственности задачи (1), (2). Решая уравнение (14) и найденные выражения для $\varphi(z)$ и $\psi(\beta(z))$ подставляя в (3), получим, что решение $u(z)$ задачи (1), (2) имеет вид

$$u(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{F^{+}(t)\,d\beta(t)}{\beta(t)-\beta(z)}+\int\limits_{\Gamma}k_0(t,z)f(t)\,dt, \tag{15}$$

где $F^{+}(t)$ — граничное значение интеграла типа Коши

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t_0)\,dt_0}{t_0-z} \tag{16}$$

при $z\to t\in\Gamma$ $(z\in D^{+})$, а $k_0(t,z)$—ограниченная функция.

Таким образом, доказано существование и единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1) в бесконечной многосвязной области в случае, когда граничная функция принадлежит $C_\alpha(\Gamma)$ и указан метод построения решения.

2°. Пусть теперь граничная функция $f(t)$ в условии (2) принадлежит $L_1(\Gamma)$. Для простоты рассмотрим случай, когда Γ — гладкая замкнутая кривая, разбивающая плоскость на связные компоненты: D^{+}, содержащую начало координат и D^{-}, содержащую бесконечно удаленную точку. Пусть функция $z=\omega(t)$ взаимнооднозначно отображает кольцо $1\leqslant|t|\leqslant 1+\varepsilon$ на некоторую замкнутую двусвязную область, принадлежащую $D^{-}+\Gamma$, причем окружность $|t|=1$ отображается на Γ с сохранением ориентации. Предполагается, что якобиан отображения отличен от нуля.

При $f\in L_1(\Gamma)$ граничное условие (2) понимается в следующем смысле: для любой отображающей функции $\omega(t)$, удовлетворяющей вышеуказанным свойствам, имеет место равенство

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r>1}} \int\limits_{|t|=1} |u(\omega(rt)) - f(\omega(t))|\, ds = 0. \tag{17}$$

Условие (17) можно записать также в виде

$$\lim_{\substack{r\to 1\\ r>1}} \int\limits_{\Gamma} |u(\omega(r\omega_{-1}(z))) - f(z)|\, ds = 0, \tag{18}$$

где $\omega_{-1}(z)$ — функция, обратная к $\omega(t)$.

Известно [18], что если $f \in C_\alpha(\Gamma)$, то регулярное в области D и непрерывное в $D+\Gamma$ решение уравнения

$$\Delta u + au_x + bu_y + cu = 0$$

принадлежит классу $C_\alpha(D+\Gamma)$. Методами, изложенными в [18], можно доказать, что эта теорема справедлива и в случае задачи (1), (2) при $f \in C_\alpha(\Gamma)$, то есть если $f \equiv 0$ и граничное условие понимается в смысле (17), то решение принадлежит классу $C_\alpha(D^- + \Gamma)$. Тогда $u(z)$ будет принимать граничное значение в классическом смысле и следовательно, на основании изложенного в пункте 1, $u(z) \equiv 0$. Таким образом, и в этом случае единственно решение задачи (1), (2).

Покажем теперь существование решения задачи (1), (2) при $f \in L_1(\Gamma)$. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. *Пусть $f \in C_\alpha(\Gamma)$, $\beta(t)$ — изменяющий ориентацию гомеоморфизм Γ на l, $\beta(t) \in C^1_\alpha(\Gamma)$, $\beta'(t) \neq 0$ на Γ. Положим*

$$J(f, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{F^+(t) - f(t)}{\beta(t) - \zeta}\, d\beta(t), \tag{19}$$

где $F^+(t)$ определяется из (16).

Имеет место оценка

$$|J(f, \zeta)| \leqslant C \int\limits_{\Gamma} |f(t)|\, ds, \quad \zeta \in G^-,$$

где G^- — бесконечная область с границей l, а C — постоянная, не зависящая от f и ζ.

Доказательство. Согласно формуле Сохоцкого-Племеля

$$F^+(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(t_0)\, dt_0}{t_0 - t}, \quad t \in \Gamma, \tag{20}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Пусть $\alpha(\tau)$ — функция, обратная к $\beta(t)$. Заменяя в (20) t_0 на $\alpha(\tau_0)$ и t на $\alpha(\tau)$, $\tau, \tau_0 \in l$, получим

$$F^+(\alpha(\tau)) = \frac{1}{2} f(\alpha(\tau)) - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \frac{f(\alpha(\tau_0))\, \alpha'(\tau_0)\, d\tau_0}{\alpha(\tau_0) - \alpha(\tau)} =$$

$$= -\Phi^-(\tau) - \int\limits_{l} k(\tau_0, \tau)\, f(\alpha\tau_0))\, d\tau_0, \tag{21}$$

где интегрирование по l (как и по Γ) ведется в положительном направлении, $k(\tau_0, \tau)$ определяется формулой (9), а

$$\Phi^-(\tau) = -\frac{1}{2} f(\alpha(\tau)) + \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\alpha(\tau_0))\, d\tau_0}{\tau_0 - \tau} = \lim_{\substack{\zeta\to\tau \\ \zeta\in G^-}} \int_l \frac{f(\alpha(\tau_0))\, d\tau_0}{\tau_0 - \zeta}.$$

По формуле Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\Phi^-(\tau)\, d\tau}{\tau - \zeta} = -\Phi(\zeta) \equiv -\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\alpha(\tau_0))\, d\tau_0}{\tau_0 - \zeta}, \quad \zeta \in G^-. \tag{22}$$

Делая в (19) замену $\tau = \beta(t)$, получим

$$J(f, \zeta) = -\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{F^+(\alpha(\tau))\, d\tau}{\tau - \zeta} + \frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{f(\alpha(\tau))\, d\tau}{\tau - \zeta}. \tag{23}$$

Подставляя выражение для $F^+(\alpha(\tau))$ из (21) в (23) и имея в виду (22), будем иметь

$$J(f, \zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_l \left\{ \int_l \frac{k(\tau_0, \tau) f(\alpha(\tau_0))}{\tau - \zeta}\, d\tau_0 \right\} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_l f(\alpha(\tau_0)) \left\{ \int_l \frac{k(\tau_0, \tau)}{\tau - \zeta}\, d\tau \right\} d\tau_0 = \int_l k_0(\tau_0, \zeta) f(\alpha(\tau_0))\, d\tau_0.$$

Согласно неравенству (10) ядро $k_0(\tau_0, \zeta)$ ограничено для произвольного $\zeta \in (G^- + l)$ и $\tau_0 \in l$. Следовательно

$$|J(f, \zeta)| < \max |k_0(\tau_0, \zeta)| \int_l |f(\alpha(\tau_0))|\, ds = C \int_\Gamma |f(t)|\, ds.$$

Лемма 2. *Пусть* $f \in C_\alpha(\Gamma)$, $\beta(z) \in C'_\alpha(D^+ + \Gamma)$ *взаимооднозначно отображает* D^- *на некоторую область и якобиан отображения отличен от нуля. Положим*

$$K(t, z) = \frac{\beta'(t)}{\beta(t) - \beta(z)} - \frac{1}{t - z}, \quad \beta'(t) = \lim_{\tau\to t} \frac{\beta(\tau) - \beta(t)}{\tau - t},$$

$$T(f, z) = \int_\Gamma K(t, z) f(t)\, dt, \quad z \in D^-. \tag{24}$$

Справедлива следующая оценка

$$\int_{|\zeta|=1} |T(f, \omega(r\zeta))|\, ds \leqslant C \int_{|\zeta|=1} |f(\omega(\zeta))|\, ds, \quad 1 < r \leqslant 1 + \varepsilon,$$

где $\omega(t)$ — *отображающая функция, определенная в начале пункта* 2°, *а* C *не зависит от* f *и* r.

Доказательство. Сделав замену в (24) $t = \omega(\tau)$, $z = \omega(r\zeta)$, получим

$$T(f, \omega(r\zeta)) = \int_{|\tau|=1} \left(\frac{\gamma'(\tau)}{\gamma(\tau) - \gamma(r\zeta)} - \frac{1}{\tau - r\zeta} \right) f(\omega(\tau))\, d\tau -$$

$$-\int\limits_{|\tau|=1}\left(\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-\omega(r\zeta)}-\frac{1}{\tau-r\zeta}\right)f(\omega(\tau))\,d\tau, \tag{25}$$

где $\gamma(\tau)=\beta(\omega(\tau))$, $\gamma(t)\in C^1_\alpha(\Gamma)$, $\gamma'(\tau)\neq 0$

Оценим ядро полученных интегралов

$$\omega'(\tau)(\tau-r\zeta)-\omega(\tau)+\omega(r\zeta)=\omega'(\tau)(\zeta-r\zeta)+\omega(r\zeta)-$$

$$-\omega(\zeta)+\int\limits_{\tau}^{\zeta}[\omega'(\sigma)-\omega'(\tau)]\,d\sigma.$$

Так как $\omega(\tau)\in C^1_\alpha$, то $|\omega(r\zeta)-\omega(\zeta)|\leqslant A_1|r-1|$,

$$|\omega'(\sigma)-\omega'(\tau)|\leqslant A_2|\sigma-\tau|^\mu,\quad 0<\mu\leqslant 1.$$

По теореме об оценке модуля криволинейного интеграла имеем

$$\left|\int\limits_{\tau}^{\zeta}[\omega'(\sigma)-\omega'(\tau)]\,d\sigma\right|\leqslant A_3|\zeta-\tau|^{\mu+1}=$$

$$=A_3|\tau-r\zeta+r\zeta-\zeta|^{\mu+1}\leqslant A_3(|\tau-r\zeta|+|r\zeta-\zeta|)^{\mu+1}\leqslant$$

$$\leqslant A_4(|\tau-r\zeta|^{\mu+1}+|r-1|^{\mu+1}).$$

Следовательно

$$|\omega'(\tau)(\tau-r\zeta)-\omega(\tau)+\omega(r\zeta)|\leqslant c_1|r-1|+c_2|r-r\zeta|^{\mu+1}.$$

Таким образом

$$\left|\frac{\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-\omega(r\zeta)}-\frac{1}{\tau-r\zeta}\right|\leqslant\frac{c_1|r-1|}{|\tau-r\zeta|^2}+\frac{c_2}{|\tau-r\zeta|^{1-\mu}}. \tag{26}$$

Аналогичной оценке удовлетворяет и другое ядро. Проинтегрировав обе части равенства (25) по окружности $|\zeta|=1$ и учитывая неравенство (26), получим

$$\int\limits_{|\zeta|=1}|T(f,\omega(r\zeta))|\,ds\leqslant\int\limits_{|\tau|=1}|f(\omega(\tau))|\times$$

$$\times\left\{\int\limits_{|\zeta|=1}\left[\frac{c_1'|r-1|}{|\tau-r\zeta|^2}+\frac{c_2'}{|\tau-r\zeta|^{1-\mu}}\right]ds_\zeta\right\}ds_\tau.$$

Выражение в фигурных скобках является ограниченной величиной. Действительно, первый из интегралов есть интеграл Пуассона, а второй ограничен, так как подынтегральное выражение имеет особенность меньше единицы. Лемма доказана.

Преобразуем формулу (15) к виду

$$u(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\beta'(t)}{\beta(t)-\beta(z)}-\frac{1}{t-z}\right)f(t)\,dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{F^+(t)-f(t)}{\beta(t)-\beta(z)}\,d\beta(t)+\int\limits_{\Gamma}k_0(t,z)f(t)\,dt. \tag{27}$$

Подставляя значение $F^+(t)$ из (20) в (15) и меняя порядок интегрирования во втором слагаемом, $u(z)$ можно представить также в виде

$$u(z) = \int_\Gamma K(t, z) f(t)\, dt, \ z \in D^-, \tag{28}$$

где $k(t, z)$ бесконечно дифференцируема по x и y $(z = x + iy)$, непрерывна по t и удовлетворяет оценке

$$|K(t, z)| \leqslant \frac{C}{|t - z|}.$$

Используя леммы 1 и 2 и выражение (27) для решения $u(z)$ задачи (1), (2) при $f \in C_\alpha(\Gamma)$ получим, что

$$\int_{|\zeta|=1} |u(\omega(r\zeta))|\, ds \leqslant C \int_{|\zeta|=1} |f(\omega(\zeta))|\, ds, \ 1 < r \leqslant 1 + \varepsilon. \tag{29}$$

Пусть $f \in L_1(\Gamma)$. Покажем, что функция $u(z)$, определяемая формулой (28), является решением задачи (1), (2). Ясно, что $u(z)$ можно записать в виде (3), поэтому она удовлетворяет уравнению (1). Так как C_α всюду плотно в L_1, то неравенство (29) имеет место и для $f \in L_1(\Gamma)$, т. е. оператор (28) удовлетворяет оценке (29) при $f \in L_1(\Gamma)$. Выберем некоторую последовательность функций $\{f_n\}$ из $C_\alpha(\Gamma)$, сходящихся к f в смысле L_1. Поскольку $f_n \in C_\alpha(\Gamma)$, то для нее задача (1), (2) имеет единственное решение, которое обозначим через $u_n(z)$. Функция $u_n(z)$ будет выражаться формулой (28) при $f = f_n$. Убедимся, что $u(z)$, заданная формулой (28), удовлетворяет граничному условию (17)

$$u(\omega(r\zeta)) - f(\omega(\zeta)) = u(\omega(r\zeta)) - u_n(\omega(r\zeta)) + u_n(\omega(r\zeta)) -$$
$$- f_n(\omega(\zeta)) + f_n(\omega(\zeta)) - f(\omega(\zeta)). \tag{30}$$

Из (29) следует, что

$$\int_{|\zeta|=1} |u(\omega(r\zeta)) - u_n(\omega(r\zeta))|\, ds \leqslant C \int_{|\zeta|=1} |f(\omega(\zeta)) - f_n(\omega(\zeta))|\, ds. \tag{31}$$

Так как функция $u_n(z)$ является решением задачи (1), (2) при $f_n \in C_\alpha(\Gamma)$, то, как было показано, она будет удовлетворять граничному условию (17), т. е.

$$\int_{|\zeta|=1} |u_n(\omega(r\zeta)) - f_n(\omega(\tau))|\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 1. \tag{32}$$

Имея в виду (31) и (32) из равенства (30) получим, что

$$\int_{|\zeta|=1} |u(\omega(r\zeta)) - f(\omega(\zeta))|\, ds \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0.$$

Следовательно, формула (28) выражает решение задачи (1), (2) при $f \in L_1(\Gamma)$.

Все сказанное в пункте 2° остается справедливым, если сохранить все предположения из пункта 1° относительно контура Г.

Таким образом, задача Дирихле для уравнения (1) в бесконечной многосвязной области, когда граничные условия принадлежат классу L_1, имеет, и при том единственное решение.

Аналогично доказывается существование и единственность решения рассмотренных задач в конечной $(n+1)$-связной области.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность Н. Е. Товмасяну за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 6.II.1981

Ռ. Ա. ԱԼԻԽԱՆՅԱՆ. Դիրիխլեի արտաքին խնդիրը L_1-ում երկրորդ կարգի էլիպտական տիպի հավասարման համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում հաստատուն կոմպլեքս գործակիցներով երկրորդ կարգի կանոնավոր էլիպտական տիպի հավասարման համար ապացուցված է Դիրիխլեի արտաքին խնդրի լուծման գոյությունն ու միակությունը հարթ բազմակապ տիրույթում, երբ եզրային արժեքները պատկանում են L_1-ին, իսկ եզրային պայմանը հասկացվում է L_1-ի իմաստով։

R. A. ALIKHANIAN. *The exterior Dirichlet problem with L_1 data for second elliptic equations* (summary)

In this paper the exterior Dirichlet problem with L_1 data for the second order elliptic equation with complex coefficients is investigated. An existence and uniqueness theorem in planar multyconnected domain is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. *Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг.* Оценки решений эллиптических уравнений в частных производных вблизи границы при общих граничных условиях, ИИЛ, М., 1962.
2. С. *Мизохата.* Теория уравнений с частными производными, «Мир», М., 1977.
3. *Н. Е. Товмасян.* Об одном методе решения краевых задач для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка на плоскости, Мат. сб., 89, № 4, 1972.
4. *И. И. Кочетов.* Об одном методе решения внешних краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка, Журн. выч. мат. и мат. физ., 15, № 3, 1975.
5. *Т. В. Бурчуладзе.* Некоторые линейные эллиптические краевые задачи в пространстве Lp, Тр. Груз. политехн. ин-та, 176, № 3, 1975.
6. *Т. С. Соболева.* Кравые задачи для эллиптического уравнения второго порядка в неограниченных областях, Сиб. мат. ж., 19, № 5, 1978.
7. *Campi Stefano.* On the exterior Dirichlet problem for linear elliptic equation in the plane. Ann. mat. pura appl, 119, 1979.
8. *Miranda Mario.* Dirichlet problem with L_1 data for the non-homogeneous minimal surface equation, Indiana Unw. Math. J., 24, № 3, 1974.
9. *Т. В. Лоссиевская.* О поведении вблизи границы функции Грина задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения второго порядка, Диф. уравн., 9, № 6, 1973.
10. *Т. В. Лоссиевская.* О разрешимости обобщенных краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка, Диф. уравн., 9, № 7, 1973.

11. *Э. П. Меликсетян.* Задача Дирихле для эллиптической системы дифференциальных уравнений второго порядка в некоторых классах в области $|z| > 1$, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 15, № 5, 1980.
12. *Э. П. Меликсетян.* Задача Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка в классе суммируемых функций, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 14, № 6, 1979.
13. *Е. В. Золотарева.* Задача Дирихле для одного класса эллиптических систем, ДАН СССР, 132, № 4, 1960.
14. *Е. В. Золотарева.* Необходимое и достаточное условие фредгольмовости задачи Дирихле для некоторого класса эллиптических систем, ДАН СССР, 145, № 4, 1962.
15. *А. В. Бицадзе.* Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, «Наука», М., 1966.
16. *N. E. Tovmasian.* Integral representations of holomorhic functions by holomorphic densities and their applications, 798, Springer—Verlad, Berlin—Heiderg—Now-York, 1979.
17. *Н. И. Мусхелишвили.* Сингулярные интегральные уравнения, «Наука», М., 1968.
18. *И. Н. Векуа.* Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, М., 1948.