ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVIII, № 1, 1983 Математика

УДК 519.2

С. Р. МАЛХАЗЯН

К ВОПРОСУ О РАЗЛОЖЕНИИ ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ РЕШЕНИЯ ОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В n-мерном пространстве дана динамическая система

$$\dot{x}(t) = b(x(t)),\ x(0) = 0, \tag{1}$$

у которой векторное поле $b(x) = (b^1(x), \cdots, b^n(x))$, $x \in R^n$ всюду ограничено, удовлетворяет условию Липшица:

$$|b(x_1) - b(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|,\ \sup_x |b(x)| \leqslant L < \infty.$$

Мы будем предполагать, что для поля $b(x)$ выполняется условие 0): существуют константы $r > 0$, $\alpha > 0$ такие, что для всех x, имеющих длину r (под длиной элемента x подразумеваем $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$), $(b(x), x) \leqslant -\alpha r$. Рассмотрим случайный процесс $\tilde{x}^\varepsilon(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\dot{\tilde{x}}^\varepsilon(t) = b(\tilde{x}^\varepsilon(t)) + \varepsilon\tilde{\zeta}(\tilde{x}^\varepsilon(t)),\ \tilde{x}^\varepsilon(0) = 0, \tag{2}$$

где $\tilde{\zeta}(x)$, $x \in R^n$ — гауссовское случайное поле, определенное на вероятностном пространстве $\{\Omega, F, P\}$ с нулевым средним и корреляционной матрицей $\tilde{B}(x, y) = (M\tilde{\zeta}^i(x) \cdot \tilde{\zeta}^j(y))_{i,j=1}^n$, элементы у которой достаточно гладкие функции переменных x, y, причем вне некоторой ограниченной области D, содержащей начальную точку, матрица $\tilde{B}(x, y)$ равна нулевой, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Из этих условий вытекает, что с вероятностью единица существует решение системы (2) на любом конечном отрезке $[0, T]$. Случайный процесс $\tilde{x}^\varepsilon(t)$ рассматриваем как результат малых случайных возмущений динамической системы (1). Нас интересует, какова асимптотика решения $\tilde{x}^\varepsilon(t)$ системы (2) на конечном отрезке времени $[0, T]$ при $\varepsilon \to 0$.

Приведем предварительно некоторые соображения, не заботясь пока о математической строгости. Пусть для $\tilde{x}^\varepsilon(t)$ каким-либо способом можно получить разложение по степеням ε:

$$\tilde{x}^\varepsilon(t) = \tilde{x}_0(t) + \varepsilon\tilde{x}_1(t) + \cdots + \varepsilon^m\tilde{x}_m(t) + \cdots.$$

Подставим это выражение для $\bar{x}^{\varepsilon}(t)$ в систему (2) и разложим в правой части $\tilde{b}(\bar{x}^{\varepsilon}(t))$ и $\bar{\tilde{\zeta}}(\bar{x}^{\varepsilon}(t))$ формально в ряды по степеням ε. Приравнивая коэффициенты при равных степенях ε, получим систему уравнений, которым должны удовлетворять $\bar{x}_0(t)$, $\bar{x}_1(t), \cdots$.

Выкладки здесь и в дальнейшем приводятся для одномерного процесса $\bar{x}^{\varepsilon}(t)$ лишь для удобства записей и обозначений. Пусть функция $X(x_0+\varepsilon x_1+\cdots \varepsilon^m x_m+\cdots)$ от ε при фиксированных x_0, $x_1, \cdots, x_m$ может быть разложена в ряд

$$X(x_0+\varepsilon x_1+\cdots+\varepsilon^m x_m+\cdots)=X(x_0)+\sum_{m=1}^{\infty} \Phi[X(x);\ x_0, x_1, \cdots, x_m]\varepsilon^m,$$

где

$$\Phi[X(x),\ x_0, x_1, \cdots, x_m]=\sum_{l_1+l_2+\cdots+l_r=m} x_{l_1} x_{l_2} \cdots x_{l_r} \left\{\frac{\partial^r X(y)}{\partial y^r}\right\}_{y=x_0}, \quad m\geqslant 1.$$

Для удобства записи положим $X(x_0)=\Phi[X(x);\ x_0]$.

Действуя в соответствии с вышеизложенным планом, разлагаем обе части (2) по степеням ε:

$$\dot{\bar{x}}_0(t)+\varepsilon \dot{\bar{x}}_1(t)+\cdots+\varepsilon^k \dot{\tilde{x}}_k(t)+\cdots=b(\bar{x}_0(t))+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k[\Phi[b(x);\ \tilde{x}_0(t), \tilde{x}_1(t), \cdots, \tilde{x}_k(t)]+\Phi[\bar{\zeta}(x);\ \bar{x}_0(t), \cdots, \tilde{x}_{k-1}(t)]].$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε слева и справа, получим дифференциальные уравнения

$$\dot{\bar{x}}_0(t)=b(\tilde{x}_0(t)),$$

$$\dot{\bar{x}}_k(t)=\Phi[b(x);\ \tilde{x}_0(t), \cdots, \tilde{x}_k(t)]+\Phi[\tilde{\zeta}(x);\ \tilde{x}_0(t), \cdots, \tilde{x}_{k-1}(t)], \qquad (3)$$
$$k=1, 2, \cdots.$$

При заданных начальных условиях $\bar{x}_k(0)=0$, $k=0, 1, \cdots$, достаточно гладких функциях $b(x)$, $\bar{\zeta}(x)$ эти уравнения однозначно определяют функции $\tilde{x}_0(t)$, $\bar{x}_1(t), \cdots, \tilde{x}_k(t), \cdots$. Решая первое уравнение системы (3), которое совпадает с (1), определим нулевое приближение. Если $\bar{x}_0(t)$ известно то второе уравнение в (3) превращается в линейное уравнение относительно $\bar{x}_1(t)$. Вообще если функции $\bar{x}_0(t), \cdots, \tilde{x}_{k-1}(t)$ найдены, то уравнение для $\tilde{x}_k(t)$ является линейным неоднородным уравнением с коэффициентами, зависящими от t. Сперва сформулируем и докажем в виде леммы утверждение об асимптотике решения уравнения (2) при $\varepsilon\to 0$ в частном случае, когда поле $\bar{\zeta}(x)$ не случайное, а детерминированное.

Лемма 1. *Предположим, что функции $b(x)$, $\tilde{\zeta}(x)$ имеют ограниченные непрерывные производные до $m+1$-го порядка включительно. Тогда для решения $\tilde{x}^{\varepsilon}(t)$, $t\in[0, T]$ уравнения* (2) *имеет место разложение*

$$\tilde{x}^{\varepsilon}(t)=\tilde{x}_0(t)+\varepsilon\tilde{x}_1(t)+\cdots+\varepsilon^m\tilde{x}_m(t)+\varepsilon^{m+1}\tilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t), \tag{4}$$

где функции $\tilde{x}_i(t)$, $i=1,\cdots, m$ *определяются из системы* (3), *а*

$$\sup_{0\le t\le T}|\tilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t)|<C<\infty. \tag{5}$$

Доказательство. По существу нам надо получить неравенство (5), если $\tilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t)$ определить равенством (4), где $\tilde{x}^{\varepsilon}(t)$— решение системы (2), а $\tilde{x}_k(t)$, $0\leqslant k\leqslant m$ определяются из (3). Таким образом, функция

$$\varepsilon^{m+1}\tilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t)=\tilde{x}^{\varepsilon}(t)-\sum_{l=0}^{m}\varepsilon^l\tilde{x}_l(t)$$

удовлетворяет соотношению

$$\varepsilon^{m+1}\tilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t)=b(\tilde{x}^{\varepsilon}(t))+\varepsilon\tilde{\zeta}(\tilde{x}^{\varepsilon}(t))-\sum_{k=0}^{m}\varepsilon^k\Phi[b(x);\tilde{x}_0(t),\cdots$$

$$\cdots,\tilde{x}_k(t)]-\varepsilon\sum_{k=0}^{m-1}\varepsilon^k\Phi[\tilde{\zeta}(x);\tilde{x}_0(t),\cdots,\tilde{x}_k(t)]. \tag{6}$$

Правую часть (6) запишем в следующем виде:

$$\varepsilon^{m+1}\dot{\tilde{R}}^{\varepsilon}_{m+1}(t)=I^{\varepsilon}_1(t)+I^{\varepsilon}_2(t)+I^{\varepsilon}_3(t)+I^{\varepsilon}_4(t), \tag{7}$$

где

$$I^{\varepsilon}_1(t)=b(\tilde{x}^{\varepsilon}(t))-b\left(\sum_{l=0}^{m}\varepsilon^l\tilde{x}_l(t)\right),$$

$$I^{\varepsilon}_2(t)=\varepsilon\left[\tilde{\zeta}(\tilde{x}^{\varepsilon}(t))-\tilde{\zeta}\left(\sum_{l=0}^{m-1}\varepsilon^l\tilde{x}_l(t)\right)\right],$$

$$I^{\varepsilon}_3(t)=b\left(\sum_{l=0}^{m}\varepsilon^l\tilde{x}_l(t)\right)-\sum_{l=0}^{m}\Phi[b(x);\tilde{x}_0(t),\cdots,\tilde{x}_l(t)]\varepsilon^l,$$

$$I^{\varepsilon}_4(t)=\varepsilon\left[\tilde{\zeta}\left(\tilde{x}_0(t)+\sum_{l=1}^{m-1}\varepsilon^l\tilde{x}_l(t)\right)-\sum_{l=0}^{m-1}\Phi[\tilde{\zeta}(x);\tilde{x}_0(t),\cdots,\tilde{x}_l(t)]\varepsilon^l\right].$$

Оценим каждую из величин $I^{\varepsilon}_j(t)$, $j=1,\cdots, 4$.

$$*)\left|b(\tilde{x}^{\varepsilon}(t))-b\left(\sum_{l=0}^{m}\varepsilon^l\tilde{x}_l(t)\right)\right|\leqslant K\left|\tilde{x}^{\varepsilon}(t)-\sum_{l=0}^{m}\varepsilon^l\tilde{x}_l(t)\right|=$$

$$=K\varepsilon^{m+1}|\tilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t)|,$$

где K — некоторая константа, ограничивающая $\max\limits_{x} |b'(x)|$, $b'(x)$ — производная функции $b(x)$.

$$**)\ |I_2^\varepsilon(t)| < \varepsilon^{m+1} \left| \tilde{\zeta}' \left(\tilde{x}^\varepsilon(t) + \theta \left(\tilde{x}^\varepsilon(t) - \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^k \tilde{x}_k(t) \right) \right) \right| \times$$

$$\times |\varepsilon \tilde{R}_{m+1}^\varepsilon(t) + \tilde{x}_m(t)| \leqslant \varepsilon^{m+1} \max_x |\tilde{\zeta}'(x)| \, [\varepsilon_0 |\tilde{R}_{m+1}^\varepsilon(t)| + |\tilde{x}_m(t)|],$$

где $\varepsilon_0 > 0$ — константа, ограничивающая параметр ε. И в силу ограниченности функции $\tilde{\zeta}'(x)$ получим, что

$$|I_2^\varepsilon(t)| < N_1 |\tilde{R}_{m+1}^\varepsilon(t)| + N |\tilde{x}_m(t)| \varepsilon^{m+1}, \ 0 < N < \infty, \ N_1 = N\varepsilon_0.$$

Оценку для $|\tilde{x}_m(t)|$ получаем из следующей леммы.

Лемма 2. *Существуют константы $C_l < \infty$ такие, что*

$$|\tilde{x}_l(t)| \leqslant C_l \text{ при всех } t \in [0, T].$$

Доказательство проводится по индукции с использованием системы (3), а также неравенства Гронуола-Беллмана.

На основании леммы 2 имеем, что

$$|I_2^\varepsilon(t)| \leqslant N_1 |\tilde{R}_{m+1}^\varepsilon(t)| + \varepsilon^{m+1} C, \ \max_{0<l<m} C_l \leqslant C < \infty.$$

***) В разложении Тейлора для $b\left(\sum\limits_{l=0}^{m} \varepsilon^l \tilde{x}_l(t)\right)$ вблизи точки $\tilde{x}_0(t)$ коэффициенты при ε^l равны $\Phi[b(x); \tilde{x}_0(t), \cdots, \tilde{x}_l(t)]$ вплоть до $i \leqslant m$

$$b(\tilde{x}_0(t) + \varepsilon \tilde{x}_1(t) + \cdots + \varepsilon^m \tilde{x}_m(t)) - \sum_{k=0}^{m-1} \Phi[b(x); \tilde{x}_0(t), \cdots, \tilde{x}_k(t)] \varepsilon^k =$$

$$= \varepsilon^m \Phi[b(x); \tilde{x}_0(t) + \theta \tilde{x}_1(t) + \cdots + \theta^m \tilde{x}_m(t), \tilde{x}_1(t), \cdots, \tilde{x}_m(t)],$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant \varepsilon$ для любых $\tilde{x}_0(t), \cdots, \tilde{x}_m(t)$.

Но

$$|\Phi[b(x); \tilde{x}_0(t), \tilde{x}_1(t), \cdots, \tilde{x}_m(t)]| \leqslant K'' \max_{1<j<m} \{|\tilde{x}_j(t)|^{m+1}\}.$$

Из последнего неравенства, используя лемму 2, получим, что

$$|I_3^\varepsilon(t)| \leqslant \varepsilon^{m+1} K_3.$$

****) Проводя те же рассуждения, как в ***), получим, что существует такая константа $K_4 > 0$, что

$$|I_4^\varepsilon(t)| \leqslant K_4 \varepsilon^{m+1}.$$

Если проинтегрировать (7) от 0 до t и учесть, что $\tilde{R}_{m+1}^\varepsilon(0) = 0$, а также оценки для $I_j^\varepsilon(t)$, $j = 1, \cdots, 4$, то получим

$$\varepsilon^{m+1}|\widetilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t)| \leqslant L_0 \int_0^t |\widetilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(s)|\, ds + K_0 \varepsilon^{m+1},$$

где $0 < L_0 < \infty$, $0 < K_0 < \infty$. Отсюда следует, что

$$\varepsilon^{m+1}|\widetilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t)| \leqslant \varepsilon^{m+1} K_0 e^{L_0 t}.$$

Таким образом

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} |\widetilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t)| \leqslant K_0 e^{L_0 T}.$$

Лемма доказана.

Из доказательства видно, что в условиях леммы 1 достаточно предположить, что функция $\bar{\zeta}(x)$ непрерывна и ограничена вместе с производными лишь до m-го порядка включительно.

Легко проверить, что все формулы и доказательства сохраняются и в n-мерном случае, $n > 1$. Лишь формула для $\Phi[X(y); x_0, \cdots, x_m]$ заменится на следующую:

$$\Phi[X(y); x_0, x_1, \cdots, x_m] = \sum \frac{x_{i_1}^{l_1} \cdots x_{i_r}^{l_r}}{r!} \left\{ \frac{\partial X(y)}{\partial y^{l_1} \partial y^{l_2} \cdots \partial y^{l_r}} \right\}_{y=x_0},$$

где

$$x_j \in R^n, \ j = 0, 1, \cdots, m$$

и суммирование производится по $i_1 + i_2 + \cdots + i_r = m$, $i_k \geqslant 1$, $k = 1, 2, \cdots$ $\cdots, n$; $1 \leqslant k \leqslant r \leqslant m$.

Пусть W_2^l — пространство функций в D, которое получается из пространства бесконечно дифференцируемых функций в D путем по полнения его по норме

$$\|f(x)\|_{W_2^l} = \left(\sum_{|p| \leqslant l} \int_D |u^{(p)}(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где

$$p = (p_1, \cdots, p_n), \ p_i \geqslant 0, \ |p| = \sum_{i=1}^n p_i, \ u^{(p)}(x) = \frac{\partial^{|p|} u(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}}.$$

Пространство W_2^l является гильбертовым пространством. Если корреляционная функция $\bar{B}(x, y)$ гауссовского поля $\bar{\zeta}(x)$, $x \in D \subset R^n$ имеет непрерывные производные до порядка $2l$ включительно, то реализации $\tilde{\zeta}(x)$, как известно [2], принадлежат W_2^l. Пусть m — мультииндекс $(m_1, \cdots, m_n)$, m_i — неотрицательные целые числа. Если $|m| \leqslant l - \frac{n}{2}$, то для всех $x \in D$ выполняется неравенство вложения

$$\left| \frac{\partial^{|m|} u(x)}{\partial x_1^{m_1} \cdots \partial x_n^{m_n}} \right| \leqslant K(D) \|u\|_{W_2^l}. \ ([4]).$$

Используя это замечание на основании леммы 1 получим, что верна

Теорема 1. *Предположим, что функция $b(x)$ имеет ограниченные непрерывные производные до $m+1$-го порядка включительно, а корреляционная функция $\tilde{B}(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $2l$ включительно, где $l > \left[\frac{n}{2}\right]+m$. Тогда для случайного процесса $\tilde{x}^{\varepsilon}(t)$, $t \in [0, T]$, удовлетворяющего уравнению (2), при $\varepsilon \to 0$ имеет место разложение*

$$\tilde{x}^{\varepsilon}(t)=\tilde{x}_0(t)+\varepsilon \tilde{x}_1(t)+\cdots+\varepsilon^m \tilde{x}_m(t)+\varepsilon^{m+1}\tilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t), \qquad (4')$$

где функции $\tilde{x}_i(t)$, $i=1,\cdots, m$ определяются из системы (3), *а*

$$\sup_{0<t<T}|\tilde{R}^{\varepsilon}_{m+1}(t)| \leqslant C(\omega),\ P\{C(\omega)<\infty\}=1. \qquad (5')$$

Доказательство по существу ничем не отличается от приведенного доказательства леммы 1.

Рассмотрим гауссовское поле $\zeta(x)$, $x \in R^n$, с нулевым средним, у которого корреляционная матрица $B(x, y)$ хотя достаточно гладкая, но вообще неограниченная. Какова асимптотика решений $x^{\varepsilon}(t)$ системы

$$\dot{x}^{\varepsilon}(t)=b(x^{\varepsilon}(t))+\varepsilon\zeta(x^{\varepsilon}(t)),\ x^{\varepsilon}(0)=0 \qquad (2')$$

на конечном отрезке $[0, T]$, когда параметр $\varepsilon \to 0$? Нам понадобится лемма. Прежде чем ее сформулируем, введем обозначения.

Пусть τ^{ε} — момент первого выхода траектории $x^{\varepsilon}(s)$, рассматриваемой на отрезке $[0, T]$, из шара U_r радиуса r с центром в начальной точке. Рассмотрим случайную величину $\varkappa^{\varepsilon}(t)=\max\limits_{0<s<t}|x^{\varepsilon}(s)|$.

Лемма 3. *При $\varepsilon \to 0$ с вероятностью, стремящейся к единице, значения случайной величины $\varkappa^{\varepsilon}(t)$ принадлежат шару U_r.*

Доказательство. Очевидно, при любом $t \geqslant 0$ имеет место включение

$$\{\omega : \varkappa^{\varepsilon}(t) > r\} \subseteq$$

$$\subseteq \{\omega : b(x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})),\ x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}))+\varepsilon(\zeta(x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})),\ x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}))>0\}.$$

Но поскольку

$$(b(x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})),\ x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}))<-\alpha r,\ r=|x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})|,$$

то

$$\{\omega : b(x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})),\ x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}))+\varepsilon(\zeta(x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon})),\ x^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}))\geqslant 0\} \subseteq$$

$$\subseteq \{\omega : \varepsilon\max_{|x|<r}|\zeta(x)| \geqslant \alpha\}.$$

Следовательно

$$P\{\varkappa^{\varepsilon}(t)>r\} \leqslant P\{\max_{|x|<r}|\zeta(x)| \geqslant \alpha/\varepsilon\}.$$

Правая часть последнего неравенства для любых заданных констант $r>0$, $\alpha>0$ может быть сделана сколь угодно малой, если $\varepsilon<\varepsilon_0(\alpha, r)$, что следует из свойства функции распределения непрерывной случайной величины $\max\limits_{|x|<r}|\zeta(x)|$. Лемма доказана.

Выберем $\delta > 0$ столь малое, чтобы при всех x, удовлетворяющих требованию $\rho(x, S_r) \leqslant \delta$, для векторного поля $b(x)$ соблюдалось условие 0), где S_r — сфера в R^n радиуса r с центром в начальной точке. В силу непрерывности $b(x)$ такое δ найдется. В частности, условие 0) соблюдается внутри кольца $U_{r+\delta} \setminus U_r$. Пусть $\zeta^*(x) = \zeta(x)\chi(x)$, здесь $\chi(x)$ равняется единице для $x \in U_r$ и нулю для $x \bar{\in} U_{r+\delta}$, а на множестве $U_{r+\delta} \setminus U_r$ положим $\chi(x)$ равной некоторой неотрицательно определенной функции из класса бесконечно дифференцируемых функций. Очевидно, $\zeta^*(x)$, $x \in R^n$ является гауссовским случайным полем, его корреляционная функция $B^*(x, y) = B(x, y) \times \chi(x)\chi(y)$. Таким образом, случайное гауссовское поле $\zeta^*(x)$ с вероятностью единица совпадает на множестве U_r с гауссовским полем $\zeta(x)$, а вне множества $U_{r+\delta}$ оно равно нулю. Выборочные функции случайного процесса $x^{*\varepsilon}(t)$, который получается в результате возмущения динамической системы (1) гауссовским полем $\varepsilon\zeta^*(x)$, можно разложить по малому параметру ε на любом конечном интервале времени согласно теореме 1. Некоторое представление об асимптотике $x^\varepsilon(t)$— решения уравнения (2′), дает следующая

Теорема 2. *Предположим, что функция $b(x)$ имеет ограниченные непрерывные производные до $m+1$-го порядка включительно, а корреляционная функция $B(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по переменным x, y до порядка $2l$ включительно, где $l > \left[\frac{n}{2}\right] + m$. С вероятностью, стремящейся к единице при $\varepsilon \to 0$, решение $x^\varepsilon(t)$ уравнения (2′), рассматриваемое на конечном отрезке времени, можно разложить по малому параметру с точностью до величин порядка ε^{m+1}*

$$x^\varepsilon(t) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \cdots + \varepsilon^m x_m(t) + \varepsilon^{m+1} R^\varepsilon_{m+1}(t),$$

где функции $x_i(t)$, $i = 1, \cdots, m$ определяются из системы

$$\dot{x}_0(t) = b(x_0(t)),$$

$$\dot{x}_k(t) = \Phi[b(x); x_0(t), \cdots, x_k(t)] + \Phi[\zeta(x); x_0(t), \cdots, x_{k-1}(t)]$$

$$x_k(0) = 0, \; k = 0, 1, 2, \cdots$$

$$P\{\sup_{0<t<T} |R^\varepsilon_{m+1}(t)| < C(\omega)\} = 1, \text{ где } P\{C(\omega) < \infty\} = 1. \tag{8}$$

Доказательство. Для любого положительного числа σ в силу леммы 3 имеем, что

$$P\{\sup_{0<t<T} |x^\varepsilon(t) - x^{*\varepsilon}(t)| > \sigma\} = P\{\sup_{0<t<T} |x^\varepsilon(t) - x^{*\varepsilon}(t)| > \sigma; \max_{0<t<T} |x^\varepsilon(t)| \, x > 0\} \leqslant$$

$$\leqslant P\{\max_{0<t<T} |x^\varepsilon(t)| > r\} \to 0, \text{ при } \varepsilon \to 0.$$

Отсюда и из (5′) следует (8), и поскольку для $x^{*\varepsilon}(t)$ верна теорема 1, то теорема 2 доказана.

Таким образом, если функции $B(x, y)$, $b(x)$ достаточно гладкие, то при малых ε можно вычислить $x^\varepsilon(t)$ с любой наперед заданной точностью для подавляющего множества траекторий случайного процесса $x^\varepsilon(t)$. Нулевое приближение $x_0(t)$ — это траектория системы (1). Начиная с первого, все приближения — случайные процессы. Отметим, что функция $x_1(t)$ находится из уравнения

$$\dot{x}_1(t) = B_1(x_0(t))\, x_1(t) + \zeta(x_0(t)), \quad x_1(0) = 0,$$

где $B_1(x, y) = \left(\dfrac{\partial b^i(x)}{\partial x_j}\right)_{i, j=1}^{n}$ — квадратная матрица. Отсюда следует заключение, что $x_1(t)$ получается из гауссовского процесса $\zeta(x_0(t))$ с помощью линейного преобразования и следовательно, процесс $x_0(t)$ тоже является гауссовским. Запишем в одномерном случае решение уравнения для $x_1(t)$

$$x_1(t) = \int_0^t \zeta(x_0(s)) \left(e^{\int_s^t b'(x_0(u))\, du} \right) ds.$$

Пользуясь разложением для $x^\varepsilon(t)$ можно получить разложение по степеням параметра ε для гладких функционалов от $x^\varepsilon(t)$.

Если $\varphi(t)$ — непрерывная функция на отрезке $[0, T]$ со значениями в R^n, то гауссовский случайный процесс $\zeta(\varphi(t))$, $t \in [0, T]$ имеет нулевое среднее и корреляционную матрицу $B_\varphi(s, t) \equiv \bar{B}(\varphi(s), \varphi(t))$. Из предположений о корреляционной функции поля $\zeta(x)$ следует, что отображение

$$B_\varphi f(t) = \int_0^T B_\varphi(s, t) f(s)\, ds$$

определяет в гильбертовом пространстве $L^2_{[0, T]}$ функций на $[0, T]$ со значениями в R^n самосопряженный линейный оператор, который является неотрицательно определенным, вполне непрерывным оператором с конечным следом [3]. Обозначим $B_\varphi^{1/2}$ симметричный неотрицательный квадратный корень из оператора B_φ. Оператор $B_\varphi^{1/2}$ также является интегральным оператором с интегрируемым в квадрате ядром. Вместе с операторами B_φ, $B_\varphi^{1/2}$ рассмотрим операторы B_φ^{-1}, $B_\varphi^{-1/2}$. Чтобы сделать их однозначными, условимся выбирать в качестве $B_\varphi^{-1} f_1$, $B_\varphi^{-1/2} f_2$ такие функции ψ_1, ψ_2 соответственно, что $B_\varphi \psi_1 = f_1$, $B_\varphi^{1/2} \psi_2 = f_2$ и ψ_1, ψ_2 ортогональны нулевому подпространству оператора B_φ. На элементах пространства $L^2_{[0, T]}$ задаем функционал $S(\varphi) = \int_0^T |B_\varphi^{-1/2} (\dot{\varphi}(t) - b(\varphi(t)))|^2 dt$. Если $\dot{\varphi}(t) - b(\varphi(t))$ не принадлежит множеству значений оператора $B_\varphi^{1/2}$, то считаем $S(\varphi) = \infty$. Ясно, что для любой дифференцируемой функции $\varphi(t)$ из пространства $C_{[0, T]}$ непрерывных на отрезке $[0, T]$ функций со значениями в R^n, если $\dot{\varphi}(t) - b(\varphi(t)) \in L^2_{[0, T]}$, функционал $S(\varphi)$ определен.

Чтобы изучить асимптотику вероятностей больших (порядка 1) уклонений при $\varepsilon \to 0$ для семейства случайных процессов $x^\varepsilon(t)$, следуя идеям Вентцеля и Фрейдлина [1], удобно определить сперва функционал действия [см. определение в той же книге] для этого семейства. Определенный выше функционал $S(\varphi)$, как мы покажем, является нормированным функционалом действия для семейства процессов $x^\varepsilon(t)$ с нормирующим множителем $(2\varepsilon^2)^{-1}$.

Предположим, что гауссовское поле $\zeta(x)$, $x \in R^n$ допускает интегральное представление: $\zeta(x) = \int_0^1 G(x, s)\, dw(s)$, где $w(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ — некоторый n-мерный винеровский процесс, $G(x, s)$ — неслучайная матричная функция, гладкая по x. Далее предположим, что

$$G(x, 0) = G(x, 1) = 0, \int_{R^n} \int_0^1 \left| \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \right| dx ds < \infty,$$

$$\left(\left| \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} \right| = \left(\sum_{i, k=1}^{n} \left| \frac{\partial G_{ik}(x, s)}{\partial s} \right|^2 \right)^{1/2} \right),$$

$G_{ik}(x, s)$ — элементы матрицы $G(x, s)$, существует константа $L_1 > 0$ такая, что

$$\left| \frac{\partial G(x_1, s)}{\partial s} - \frac{\partial G(x_2, s)}{\partial s} \right| \leqslant L_1 |x_1 - x_2|, \; x_1, x_2 \in R^n$$

равномерно по $s \in [0, 1]$.

Интегрируя по частям стохастический интеграл $\int_0^1 G(x, s)\, dw(s)$, получим для гауссовского поля $\zeta(x)$ представление в виде линейного преобразования от траекторий винеровского процесса:

$$\zeta(x) = -\int_0^1 w(s) \frac{\partial G(x, s)}{\partial s} ds.$$

Обозначим это преобразование G. Из сделанных относительно функции $G(x, s)$ предположений следует, что преобразование G непрерывно отображает пространство $C_{[0, 1]}$ в пространство C_{R^n} непрерывных функций, определенных на R^n со значениеми в R^n. Преобразование, ставящее в соответствие каждой функции $\varphi(s)$ из пространства $C_{[0, 1]}$ функцию $-\int_0^1 \varphi(s) \frac{\partial G(f(u), s)}{\partial s} ds$, где $f(u)$ — фиксированная функция из $C_{[0, T]}$, мы обозначим G_f. G_f непрерывно отображает $C_{[0, 1]}$ в $C_{[0, T]}$. Пусть $w(s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$ — непрерывная модификация винеровского процесса со значениями в R^n.

Рассмотрим в $C_{[0, 1]}$ оператор $G_1 : \psi(t) \to f$, где $f = f(t)$ — решение уравнения

$$f(t)=\int_0^t b(f(u))\,du-\int_0^t\int_0^1 \psi(s)\frac{\partial G(f(u),\, s)}{\partial s}\,duds,\quad t\in[0,\ T],\ f(0)=0. \tag{9}$$

При условиях, которым удовлетворяют функции $b(x)$, $G(x,\ s)$, решение уравнения (9) существует и единственно для любой непрерывной функции $\psi(s)$, в частности, почти для всех траекторий $w(s)$ винеровского процесса. Оператор G_1 имеет обратный

$$G_1^{-1}f=G_f^{-1}\,(b\,(f\,(u))-\dot f\,(u)).$$

Лемма 4. *Оператор G_1 в $C_{[0,\,1]}$ удовлетворяет условию Липшица:*

$$\sup_{0<t<T}|G_1\psi_1-G_1\psi_2|\leqslant e^{L_1T}\sup_{0<s<1}|\psi_1(s)-\psi_2(s)|,\ \psi_1(s),\ \psi_2(s)\in C_{[0,\,1]}.$$

Доказательство.

$$G_1\psi_1-G_1\psi_2=\int_0^t(b\,(f_1(u))-b\,(f_2(u)))\,du+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\left[\psi_2(s)\frac{\partial G\,(f_2(u),s)}{\partial s}-\psi_1(s)\,\frac{\partial G\,(f_1(u),\ s)}{\partial s}\right]duds,$$

$$|f_1(t)-f_2(t)|=|G_1\psi_1-G_1\psi_2|\leqslant L\int_0^t|f_1(u)-f_2(u)|\,du+$$

$$+\int_0^t\int_0^1\left|\psi_2(s)\frac{\partial G\,(f_2(u),\ s)}{\partial s}-\psi_1(s)\,\frac{\partial G\,(f_1(u),\ s)}{\partial s}\right|duds.$$

Следовательно

$$|f_1(t)-f_2(t)|\leqslant L\int_0^t|f_1(u)-f_2(u)|\,du+\int_0^T\int_0^1|\psi_2(s)-\psi_1(s)|\times$$

$$\times\left|\frac{\partial G\,(f_2(u),\ s)}{\partial s}\right|duds+\max_{0<s<1}|\psi_1(s)|\int_0^t L_1|f_1(u)-f_2(u)|\,du\leqslant\max_{0<s<1}|\psi_2(s)-$$

$$-\psi_1(s)|\int_{R^n}\int_0^1\left|\frac{\partial G\,(x,s)}{\partial s}\right|dxds+(L+L_1\max_{0<s<1}|\psi_1(s)|)\cdot\int_0^t|f_1(u)-f_2(u)|\,du$$

при всех $t\in[0,\ T]$.

На основании уже не раз применяемого неравенства Гронуола-Беллмана получим, что

$$|f_1(t)-f_2(t)| = |G_1\psi_1 - G_1\psi_2| \leqslant \int\limits_{R^n} \int\limits_0^1 \left|\frac{\partial G(x,s)}{\partial s}\right| dxds \times$$

$$\times \exp\{(L_0 + L_1 \max_{0<s<1} |\psi_1(s)|)\, T\} \cdot \max_{0<s<1} |\psi_2(s) - \psi_1(s)|.$$

Лемма доказана.

Из теоремы 3.1. гл. 3 [1] и леммы 4 вытекает утверждение, формулируемое ниже.

Теорема 3. *Функционал* $\frac{1}{2\varepsilon^2} S(\varphi)$ *является функционалом действия для семейства случайных процессов* $x^\varepsilon(t)$, *удовлетворяющих уравнению* (2′), *в пространстве* $C_{[0,T]}$ *при* $\varepsilon \to 0$.

Работа выполнялась под руководством А. Д. Вентцеля и М. И. Фрейдлина, которым автор приносит глубокую благодарность.

Армянский научно-исследовательский
институт энергетики

Поступила 24.VII.1981

Ս. Ռ. ՄԱԼԽԱՋՅԱՆ. Մի դիֆերենցիալ հավասարման լուծման ըստ փոքր պարամետրի վերլուծման *(ամփոփում)*

Ներկա հոդվածում ուսումնասիրվում է $x^\varepsilon(t)$ *պատահական պրոցեսի, որն առաջացել է դինամիկական համակարգի գաուսյան դաշտերի փոքր գրգռումների հետևանքով, վերցվածքային ֆունկցիաների ասիմպտոտիկան, երբ* $\varepsilon \to 0$, *ինչպես նաև գտնված է այդ պրոցեսների ընտանիքի ազդման ֆունկցիոնալը։*

S. R. MALKHAZIAN. *On the decomposition by a small parameter of the solution of a differential equation* (summary)

In this paper asymptotics of selective functions of a random field $x^\varepsilon(t)$ when $\varepsilon \to 0$ is discussed, the field being obtained as a result of perturbation of a dynamic system by small Gaussian fields. Besides, the functional of action for this class is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Д. Вентцель, М. И. Фрейдлин*. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений, М., «Наука», 1979.
2. *И. И. Гихман, А. В. Скороход*. Введение в теорию случайных процессов, М., «Наука», 1965.
3. *И. И. Гихман, А. В. Скороход*. Теория случайных процессов, т. 1, М., «Наука», 1971.
4. *О. А. Ладыженская*. Краевые задачи математической физики, М., «Наука», 1973.