ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 1, 1983 Математика

УДК 517.53

Ф. А. ШАМОЯН

О НУЛЯХ АНАЛИТИЧЕСКИХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ, РАСТУЩИХ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

1°. Пусть U — единичный круг на комплексной плоскости. Следуя М. М. Джрбашяну (см. [1], [2]) обозначим через A^*_α, $(\alpha > -1)$ класс аналитических в круге функций f, для которых

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1-r^2)^\alpha \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, r dr d\varphi < +\infty. \tag{0.1}$$

В работах [1], [2] им была установлена каноническая факторизация классов A^*_α. На этом пути был открыт новый класс функций $\pi_\alpha(z, z_k)$, аналитических в круге U, с нулями в точках произвольной последовательности $\{z_k\}_1^\infty$ $(|z_k| \leqslant |z_{k+1}| < 1)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-|z_k|)^{\alpha+2} < +\infty. \tag{0.2}$$

Эти функции при условии (0.2) определялись следующим образом:

$$\pi_\alpha(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1-\frac{z}{z_k}\right) \exp\left(-U_\alpha(z, z_k)\right),$$

где

$$U_\alpha(z, \zeta) = \int_{|\zeta|^2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}}{t}\, dt - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\Gamma(2+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k \times$$

$$\times \int_0^{|\zeta|^2} (1-t)^{\alpha+1} t^{k-1}\, dt, \quad z, \zeta \in U.$$

Как было отмечено в указанных работах, при целых α, $\alpha = p$ произведение π_p принимает следующий простой вид:

$$\pi_p(z, z_k) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right) \exp\left\{\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m} \left(\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right)^m\right\}. \tag{0.3}$$

В работе [3] автором было доказано, что при условии $\beta > \alpha$ и (0.2) произведение М. М. Джрбашяна $\pi_\beta(z, z_k)$ принадлежит классу A^*_α и, тем самым, вместе с результатами работы [2] получена полная характеристика нулей классов A^*_α $(\alpha > -1)$*.

---

* Отметим, что частный случай этого результата был переоткрыт в работе [4].

В первом параграфе настоящей статьи, используя произведения М. М. Джрбашяна, мы получим характеристику нулей более общих классов функций (теорема 1).

2°. Чтобы привести основной результат второго параграфа, предварительно введем следующие обозначения. Пусть $\lambda(x)>0$ — монотонно растущий вес на полуоси $(0, +\infty)$ и пусть $H(U)$ — множество всех голоморфных функциий в U. С функцией λ свяжем класс голоморфных функций X_λ^∞

$$X_\lambda^\infty=\left\{f\in H(U): \ln|f(z)|\leqslant A_f\lambda\left(\frac{B_f}{1-|z|}\right), z\in U\right\}, \tag{0.4}$$

где A_f и B_f — абсолютные постоянные, зависящие только от f.

В том случае, когда λ имеет конечный степенной порядок больше единицы, в работе [3] была получена полная характеристика нулей функции из класса X_λ^∞. Из этой характеристики следует, что нули этих классов существенно зависят от их расположения по аргументам. Используя эту характеристику легко, например, построить последовательность $\{z_k\}_1^\infty$ и функцию $f\in X_\lambda^\infty$, $f(z)\not\equiv 0$, $f(z_k)=0$, $k=1, 2, \cdots$, в то же время любая функция из класса X_λ^∞, которая обращается в нуль на последовательности $\{|z_k|\}_1^\infty$, тождественно равна нулю. Результаты второго параграфа показывают, что когда λ имеет бесконечный порядок роста, аналогичное явление отсутствует. Чисто в терминах $\{|z_k|\}_1^\infty$ дается полная характеристика нулей функции из класса X_λ^∞. Кроме того, во втором параграфе получены новые свойства нулей функции из класса X_λ^∞, когда λ имеет конечный степенной порядок роста.

§ 1. Нули функций из класса A_ω^*

Пусть $\omega(r)>0$ — монотонная функция из класса $C^1[0,1)$, такая, что

$$\int_0^1\omega(t)\,dt<+\infty, \sup_{r_0<r<1}\left|\frac{(1-r)\,\omega'(r)}{\omega(r)}\right|<q_\omega<+\infty, \tag{1.1}$$

где $r_0\in(0, 1)$. При этом, в случае, когда ω монотонно растет, будем предполагать, что $0<q_\omega<1$.

По аналогии с классом A_α^* $(\alpha>-1)$ определим класс A_ω^* следующим образом:

$$A=\left\{f\in H(U): \int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\omega(r)\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,rdrd\varphi<+\infty\right\}.$$

Если $f\in H(U)$, то через Z_f будем обозначать множество всех нулей функции f в U.

Теорема 1. *Пусть ω — монотонная функция, удовлетворяющая условию* (1.1). $Z=\{Z_f\}$ — *последовательность точек из еди-*

ничного круга. Тогда для того, чтобы последовательность Z была представима в виде $Z = Z_f$ при некотором $f \in A^*_\omega$, $f \not\equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|)^2 \omega((|z_k|) < +\infty. \tag{1.2}$$

Если последний ряд сходится, то при $\alpha > q_\omega$ произведение М. М. Джрбашяна $\pi_\alpha(z, z_k)$ принадлежит классу A^*_ω.

Доказательству теоремы предпошлем следующую простую лемму.

Лемма 1. *Пусть ω—монотонная функция, удовлетворяющая условию* (1.1) *Тогда справедливы следующие оценки:*

$$\omega(\rho) \leqslant 2^{q_\omega} \omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right), \; r_0 < \rho < 1, \tag{1.3}$$

$$(1-\rho)^2 \omega(\rho) \leqslant 2^{q_\omega+3} \int_\rho^1 \int_t^1 \omega(u)\, du dt, \; r_0 < \rho < 1, \tag{1.4}$$

где q_ω и r_0 — положительные числа из (1.1).

Доказательство. Если ω монотонно растет, то неравенство (1.3) очевидно. Предположим, что ω—убывающая функция, тогда из условия (1.1) имеем

$$-\frac{\omega'(t)}{\omega(t)} \leqslant \frac{q_\omega}{1-t}, \; t \in (r_0, 1). \tag{1.5}$$

Проинтегрируем указанное неравенство по интервалу $\left(\rho, \frac{1+\rho}{2}\right)$, получаем

$$\ln\left(\frac{\omega(\rho)}{\omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right)}\right) \leqslant q_\omega \ln 2,$$

т. е.

$$\omega(\rho) \leqslant 2^{q_\omega} \omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right).$$

Неравенство (1.3) доказано. Для установления (1.4) заметим, что

$$\int_\rho^1 \int_t^1 \omega(u)\, du dt \geqslant \int_\rho^1 \int_t^{\frac{1+\rho}{2}} \omega(u)\, du\, dt \geqslant$$

$$\geqslant \omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right) \int_\rho^1 \left(\frac{1+\rho}{2} - t\right) dt = \frac{(1-\rho)^2}{8}\, \omega\left(\frac{1+\rho}{2}\right)$$

в случае, когда ω убывает.

Отсюда, применяя неравенство (1.3), получим неравенство (1.4) Если же ω растет, то неравенство (1.4) очевидно. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Тот факт, что нули каждой нетривиальной функции из класса A^*_ω удовлетворяют условию (1.2), непосредственно следует из неравенства Иенсена и леммы 1. Докажем, что если $\{z_k\}_1^\infty$ ($|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1$) удовлетворяет условию (1.2), то при $\alpha>q_\omega$ произведение М. М. Джрбашяна $\pi_\alpha(z, z_k)$ принадлежит классу A_ω^*. Используя (1.1) докажем, что если ряд (1.2) сходится, то при $\alpha>q_\omega$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^{\alpha+2}<+\infty. \tag{1.6}$$

В самом деле, если ω растет, то сходимость этого ряда очевидна. Предположим, что $\omega\downarrow 0$, тогда проинтегрировав неравенство (1.5) по интервалу (r_0, ρ), где $r_0<\rho<1$, получим

$$\ln\left(\frac{\omega(r_0)}{\omega(\rho)}\right)\leqslant q_\omega \ln\left(\frac{1-r_0}{1-\rho}\right),$$

т. е.

$$(1-\rho)^{q_\omega}\leqslant\frac{(1-r_0)^{q_\omega}}{\omega(r_0)}\,\omega(\rho).$$

Следовательно, из сходимости ряда (1.2) следует (1.6). Продолжим доказательство теоремы. По лемме 1.2 из [3] имеет место оценка:

$$\ln|\pi_\alpha(z, z_k)|\leqslant \text{const}\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar z_k z}\right|^{\alpha+2}. \tag{1.7}$$

Отсюда имеем

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\omega(\rho)\ln^+|\pi_\alpha(\rho e^{i\varphi})|\,\rho d\rho d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega(\rho)(1-|z_k|^2)^{\alpha+2}}{|1-\bar z_k\rho e^{i\varphi}|^{\alpha+2}}\,\rho d\rho d\varphi. \tag{1.8}$$

Теперь оценим интеграл

$$J=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{|1-\bar z_k\rho e^{i\varphi}|^{\alpha+2}}=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{|1-|z_k|\rho e^{i\varphi}|^{\alpha+2/2}}.$$

Ясно, что

$$J=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\varphi}{\left[(1-|z_k|\rho)^2+4|z_k|\rho\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right]^{\alpha+2/2}},$$

т. е.

$$J=\int\limits_{|\varphi|<(1-|z_k|\rho)}\frac{d\varphi}{\left[(1-|z_k|\rho)^2+4|z_k|\rho\sin^2\dfrac{\varphi}{2}\right]^{\alpha+2/2}}+$$

$$+\int\limits_{|\varphi|>(1-|z_k|\rho)}(\quad)\,d\varphi\overset{\text{def}}{=}J_1+J_2.$$

Сначала заметим, что

$$J_1 \leqslant \frac{1}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}}.$$

Займемся теперь оценкой интеграла J_2. Будем предполагать, что $|z_k|$, $\rho \geqslant \frac{1}{2}$. Поскольку $|\sin\varphi| \geqslant \frac{2}{\pi}|\varphi|$, $\varphi \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$J_2 \leqslant \int\limits_{1-|z_k|\rho}^{\pi} \frac{2\pi^{\alpha+2}\,d\varphi}{(\varphi)^{\alpha+2}} = \frac{2\pi^{\alpha+2}}{\alpha+1}\left(\frac{1}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} - \frac{1}{\pi^{\alpha+1}}\right).$$

Следовательно

$$J \leqslant \left(\frac{2\pi^{\alpha+2}}{\alpha+1}+1\right)\frac{1}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}}.$$

Для доказательства теоремы остается оценить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \frac{\omega(\rho)\,d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} = \int\limits_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho)\,d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} +$$

$$+ \int\limits_{|z_k|}^1 \frac{\omega(\rho)\,d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} \overset{\text{def}}{=} I_1 + I_2.$$

Сначала предположим, что ω монотонно возрастает, тогда

$$I_1 = \int\limits_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho)\,d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} \leqslant \frac{\omega(|z_k|)}{\alpha(1-|z_k|)^{\alpha}}. \tag{1.9}$$

Для оценки I_2 заметим, что

$$I_2 \leqslant \frac{1}{(1-|z_k|)^{\alpha+1}} \int\limits_{|z_k|}^1 \omega(t)\,dt. \tag{1.10}$$

Проинтегрировав последний интеграл по частям, получим

$$\int\limits_{|z_k|}^1 \omega(\rho)\,d\rho = \omega(|z_k|)(1-|z_k|) + \int\limits_{|z_k|}^1 \omega'(\rho)(1-\rho)\,d\rho.$$

Отсюда, ввиду условия (1.1), можем написать

$$\int\limits_{|z_k|}^1 \omega(\rho)\,d\rho \leqslant \omega(|z_k|)(1-|z_k|) + q_\omega \int\limits_{|z_k|}^1 \omega(\rho)\,d\rho$$

и поэтому

$$\int\limits_{|z_k|}^1 \omega(\rho)\,d\rho \leqslant \frac{(1-|z_k|)\,\omega(|z_k|)}{(1-q_\omega)}. \tag{1.11}$$

Объединяя оценки (1.9) — (1.11), приходим к неравенству

$$\int_0^1 \frac{\omega(\rho)\,d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} \leqslant \frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{1-q_\omega}\right). \tag{1.12}$$

Теперь оценим интеграл I в предположении, что ω монотонно убывает. В этом случае легко видеть, что

$$I_2 \leqslant \frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}}$$

и в то же время

$$I_1 = \int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho)\,d\rho}{(1-|z_k|\rho)^{\alpha+1}} \leqslant \int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho)\,d\rho}{(1-\rho)^{\alpha+1}}.$$

Проинтегрировав интеграл справа по частям, получим

$$\int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho)\,d\rho}{(1-\rho)^{\alpha+1}} = \frac{\omega(|z_k|)}{\alpha(1-|z_k|)^{\alpha}} - \frac{\omega(0)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^{|z_k|} \frac{\omega'(\rho)\,d\rho}{(1-\rho)^{\alpha}},$$

и таким образом

$$\int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho)}{(1-\rho)^{\alpha+1}}\left(1+\frac{\omega'(\rho)(1-\rho)}{\alpha\omega(\rho)}\right)d\rho \leqslant \frac{1}{\alpha}\,\frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}}.$$

Используя оценку (1.1) и условие $\alpha > q_\omega$, получаем неравенство

$$1+\frac{(1-\rho)\,\omega'(\rho)}{\alpha\omega(\rho)} \geqslant 1-\frac{q_\omega}{\alpha}$$

и поэтому

$$\int_0^{|z_k|} \frac{\omega(\rho)\,d\rho}{(1-\rho)^{\alpha+1}} \leqslant \frac{1}{\alpha-q_\omega}\,\frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}}. \tag{1.13}$$

Комбинируя оценки (1.12), (1.13), окончательно получим

$$I \leqslant C(q_\omega, \alpha)\,\frac{\omega(|z_k|)}{(1-|z_k|)^{\alpha}}.$$

Следовательно, если учесть также (1.8), можем написать

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi} \omega(\rho)\ln^+|\pi_\alpha(\rho e^{i\varphi})|\,\rho\,d\rho\,d\varphi \leqslant C(q_\omega,\alpha)\sum_{k=1}^{+\infty}(1-|z_k|)^2\,\omega(|z_k|) < +\infty.$$

Теорема полностью доказана.

§ 2. О нулях голоморфных функций с мажорантой бесконечного порядка роста

Пусть λ — монотонно растущий вес на полуоси $(0, +\infty)$, $\lambda(x) > 0$, $x \in (0, +\infty)$, $\lambda \in C^1(0, +\infty)$. Положим

$$\omega(x) = \frac{(x\lambda' x)}{\lambda(x)}, \quad \varphi(x) = \ln \lambda(x).$$

Будем предполагать, что $\lambda(x) \equiv 1$, $x \in [0, 1]$. В статье [3] при следующих предположениях

$$1 < \varliminf_{x \to +\infty} \omega(x) \leqslant \varlimsup_{x \to +\infty} \omega(x) < +\infty \tag{2.1}$$

была получена полная характеристика нулей функций класса X_λ^∞. Здесь мы будем предполагать, что

$$\lim_{x \to +\infty} \omega(x) = +\infty. \tag{2.2}$$

При этом выполняется еще условие

$$\varlimsup_{A \to +\infty} \varlimsup_{x \to +\infty} \frac{\omega(x)}{\omega(Ax)} = 0. \tag{2.3}$$

Теорема 2. *Пусть ω удовлетворяет условиям (2.2), (2.3), и пусть $Z = \{z_k\}_1^\infty$ совпадает с множеством нулей некоторой функции $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$, тогда существует положительное число $C = C(f)$ такое, что*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left\{-\varphi\left(\frac{C}{1 - |z_k|}\right)\right\} < +\infty. \tag{2.4}$$

И обратно, если $Z = \{z_k\}_1^\infty$ — последовательность точек единичного круга, для которого ряд (2.4) сходится при некотором $C > 0$, то можно построить функцию $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$ так, что $Z_f = Z$.

Доказательству теоремы предпошлем следующие леммы.

Лемма 2. *Пусть ω удовлетворяет условиям (2.3), тогда для любого положительного числа A существует число $B = B(A)$ такое, что*

$$A \int_1^x \frac{\omega(t)}{t}\, dt \leqslant \int_1^{Bx} \frac{\omega(t)}{t}\, dt, \quad x \in (1, +\infty).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$, тогда по условию (2.3) существуют положительные числа $B_0 = B_0(\varepsilon)$, $x_0 = x_0(\varepsilon)$ такие, что

$$\frac{\omega(x)}{\omega(Bx)} < \varepsilon$$

как только $B > B_0$, $x > x_0$ Подбирая B_0 таким образом, чтобы

$$\frac{\omega(x_0)}{\omega(B_0)} < \varepsilon,$$

получаем

$$\frac{\omega(x)}{\omega(Bx)} \leqslant \frac{\omega(x)}{\omega(B_0)} < \frac{\omega(x_0)}{\omega(B_0)} < \varepsilon, \text{ при } 1 < x \leqslant x_0,\ B > B_0.$$

Следовательно, $\dfrac{\omega(t)}{t} < \varepsilon\, \dfrac{\omega(Bt)}{t}$, при всех $t \geqslant 1$. Проинтегрировав указанное неравенство по интервалу $(1, x)$, получим

$$\int_1^x \frac{\omega(t)}{t}\, dt \leqslant \varepsilon \int_1^x \frac{\omega(Bt)}{t}\, dt.$$

Теперь во втором интеграле произведя замену переменной $Bt = u$, приходим к неравенству

$$\int_1^x \frac{\omega(t)}{t}\, dt \leqslant \varepsilon \int_B^{Bx} \frac{\omega(u)}{u}\, du \leqslant \varepsilon \int_1^{Bx} \frac{\omega(u)}{u}\, du.$$

Остается здесь положить $\varepsilon = A^{-1}$, и лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $m(\zeta, z) = \frac{1-|\zeta|^2}{|1-\bar{\zeta} z|}$, $|\zeta| = \rho$, $|z| = r \geqslant \frac{1}{2}$, *и пусть* $\rho \geqslant \frac{r+5}{6}$, *тогда* $m(\zeta, z) < \frac{1}{2}$.

Доказательство. Поскольку

$$m(\zeta, z) \leqslant \frac{1-\rho^2}{1-\rho r} = \frac{1-\rho^2}{1-\rho+\rho(1-r)} < \frac{2}{1+\frac{1}{2}\frac{1-r}{1-\rho}}, \tag{2.5}$$

то в условиях леммы имеем $1-\rho \leqslant \frac{1-r}{6}$, $\frac{1-\rho}{1-r} \leqslant \frac{1}{6}$.

Поэтому по неравенству (2.5) $m(\zeta, z) \leqslant \frac{1}{2}$ и лемма доказана.

Доказательство теоремы. Сначала докажем, что если $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$ и $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \cdots$, то выполняется (2.4).

Ради удобства будем предполагать, что

$$\log|f(z)| \leqslant \exp\left\{\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\right\}, \quad z \in U, \ f(0) = 1.$$

Тогда из неравенства Иенсена непосредственно следует

$$\int_0^r \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant \exp\left\{\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}, \quad 0 < r < 1, \tag{2.6}$$

где $n(t)$ — число нулей функции f в круге $|z| < t$. Отсюда для $n(r)$ получаем следующую оценку:

$$n\left(\frac{3r-1}{2}\right)\frac{(1-r)}{2} < \int_{\frac{3r-1}{2}}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant \exp\left\{\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right\}, \quad \frac{1}{2} < r < 1,$$

откуда вытекает, что

$$n(\rho) \leqslant \frac{\exp\left\{\varphi\left(\frac{3}{2(1-\rho)}\right)\right\}}{1-\rho}, \quad \frac{1}{4} < \rho < 1.$$

Пусть $C > 2$ — фиксированное число, тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left\{-C\varphi\left(\frac{3}{2(1-|z_k|)}\right)\right\} = \int_0^1 \exp\left\{-\varphi\left(\frac{3}{2(1-t)}\right)\right\} dn(t) = I.$$

Проинтегрировав указанный интеграл по частям, получим

$$I = \exp\left\{-C\varphi\left(\frac{3}{2(1-t)}\right)\right\} n(t)\Big|_0^1 +$$

$$+\frac{3}{2}C\int_0^1 n(t)\exp\left\{-C\varphi\left(\frac{3}{2(1-t)}\right)\right\}\varphi'\left(\frac{3}{2(1-t)}\right)\frac{dt}{(1-t)^2}.$$

Следовательно, если учесть также (2.6), можем написать неравенство

$$I \leqslant \frac{3}{2}C\int_0^1 \exp\left\{-(C-1)\varphi\left(\frac{3}{2(1-t)}\right)\right\}\frac{\varphi'\left(\frac{3}{2(1-t)}\right)}{(1-t)^2}dt.$$

Но поскольку $\omega(t)$ возрастает, то $\varphi(t) \geqslant \ln t$, $t \geqslant 1$, и поэтому

$$I \leqslant 3C\int_0^1 \exp\left\{-(C-2)\varphi\left(\frac{3}{2(1-t)}\right)\right\}\frac{\varphi'\left(\frac{3}{2(1-t)}\right)}{(1-t)^2}dt =$$

$$= -\frac{2C}{(C-2)}\exp\left\{-(C-2)\varphi\left(\frac{3}{2(1-t)}\right)\right\}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2C}{C-2}\exp\left((2-C)\varphi\left(\frac{3}{2}\right)\right),$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left\{-C\varphi\left(\frac{3}{2(1-|z_k|)}\right)\right\} < +\infty$$

для любого $C > 2$.

Поэтому на основании леммы 2 заключаем, что

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left\{-\varphi\left(\frac{B}{1-|z_k|}\right)\right\}$$

для некоторого $B = B(C) > 0$.

Первая часть теоремы доказана. Докажем обратное утверждение.

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность из единичного круга $|z_k| < |z_{k+1}| < 1$, $k = 1, 2, \cdots$, для которого ряд (2.4) сходится. Для простоты будем предполагать, что $C = 1$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left\{-\varphi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)\right\} < +\infty. \tag{2.7}$$

Построим функцию $f \in X_\lambda^\infty$ такую, что $f(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \cdots, f(z) \neq 0$, $z \neq z_k$. Подберем натуральные числа p_k, $k = 1, 2, \cdots$ таким образом, чтобы

$$(1-|z_k|)^{p_k} \leqslant \exp\left\{-\varphi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)\right\},\ k=1, 2, \cdots.$$

В качестве p_k выберем, например

$$p_k=\left[\frac{\varphi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)}{\lg 2}\right]. \tag{2.8}$$

По аналогии с произведением (0.3), положим

$$A_{p_k}(z, \zeta)=\left(1-\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)\exp\left\{\sum_{m=1}^{p_k}\frac{1}{m}\left(\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right)^m\right\},\ \zeta,\ z\in U.$$

Тогда легко видеть, что бесконечное произведение

$$\pi(z, z_k, p_k)=\prod_{k=1}^{\infty} A_{p_k}(z, z_k),\quad z\in U$$

равномерно сходится внутри U.

Докажем, что $\pi\in X_\lambda^\infty$. Использовав известную оценку (см. [5]) для фактора $A_{p_k}(z, \zeta)$, получим

$$\ln|A_{p_k}(z, \zeta)|\leqslant\left|\frac{1-|\zeta|^2}{1-\bar{\zeta}z}\right|^{p_k+1}$$

и, следовательно, для π имеем

$$\ln|\pi(z, z_k, p_k)|\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{1-|z_k|_2}{1-\bar{z}_k z}\right|^{p_k+1},\ z\in U. \tag{2.9}$$

Оценим последнюю сумму. Пусть

$$m_k(z)=\frac{1-|z_k|^2}{|1-\bar{z}_k z|},\ z\in U.$$

Тогда

$$I=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right|^{p_k+1}=\sum_{m_k(z)<\frac{1}{2}}\left(\quad\right)+\sum_{m_k(z)>\frac{1}{2}}\left(\quad\right)\stackrel{\text{def}}{=}I_1+I_2,$$

причем

$$I_1=\sum_{m_k<\frac{1}{2}}\left|\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right|^{p_k+1}\leqslant\sum_{m_k<\frac{1}{2}}\exp(-(p_k+1)\ln 2)\leqslant$$

$$\leqslant 4\sum_{k=1}^{+\infty}\exp\left\{-\varphi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)\right\}<+\infty, \tag{2.10}$$

в силу (2.7).

Теперь оценим вторую сумму

$$I_2=\sum_{m_k>\frac{1}{2}}\left|\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right|^{p_k+1}=\sum_{m_k>\frac{1}{2}}\exp\left\{(p_k+1)\ln\left|\frac{1-|z_k|^2}{1-\bar{z}_k z}\right|\right\}.$$

Заметим, что

$$\frac{1-|z_k|^2}{|1-\bar{z}_k z|} \leqslant \frac{1-|z_k|^2}{1-|z_k|} = 1+|z_k| \leqslant 2, \ k=1, 2, \cdots.$$

Поэтому

$$I_2 \leqslant 2 \sum_{m_k > \frac{1}{2}} \exp\{p_k \ln 2\} \leqslant 2 \sum_{m_k > \frac{1}{2}} \exp\left\{\varphi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{k: m_k(z) > \frac{1}{2}} \left\{\exp\left(2\varphi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)\right)\right\} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \exp\left\{-\varphi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \exp\left\{2\varphi\left(\frac{6}{1-|z|}\right)\right\}$$

(здесь мы учли лемму 3). Теперь, использовав лемму 2, будем иметь

$$I_2 \leqslant \text{const} \exp\left\{\varphi\left(\frac{B}{1-|z|}\right)\right\}, \ z \in B$$

при некотором $B > 0$ и теорема доказана.

Пусть $\pi(z, z_k, p_k)$ — произведение, построенное в теореме 2. Используя рассуждения, приведенные при доказательстве теоремы 2, легко установить

Следствие 1. Пусть λ удовлетворяет условиям теоремы 2 и $f \in X_\lambda^\infty$, $Z_f = \{z_k\}_1^\infty$, тогда f допускает представление

$$f(z) = \pi(z, z_k, p_k) \exp\{g(z)\}, \ z \in U,$$

где функции $\pi(z, z_k, p_k)$, $\exp\{\pm g(z)\}$ принадлежат классу X_λ^∞.

Как уже отмечалось выше, в работе [3] получена характеристика нулей функции из класса X_λ^∞ при условии (2.1). А именно, доказана следующая теорема.

Пусть

$$\Delta_{k,l} = \left\{z: 1-\frac{1}{2^k} \leqslant |z| < 1-\frac{1}{2^{k+1}}, \ \frac{\pi l}{2^k} \leqslant \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k}\right\},$$

$$k=1, 2, \cdots, \ l=-2^k, \cdots, 2^k-1.$$

Теорема А. Пусть $Z = \{z_k\}_1^\infty$ — последовательность точек из единичного круга, $n_{k,l}$ — число точек $\{z_k\}$ в прямоугольнике $\Delta_{k,l}$, тогда следующие утверждения равносильны:

1) $Z = Z_f$ для некоторого $f \in X_\lambda^\infty$, $f \not\equiv 0$,

2) $n_{k,l} \leqslant \text{const}\, \lambda(2^k)$, $k=1, 2, \cdots$, $l=-2^k, \cdots, 2^k-1$. (2.11)

Исходя из этой теоремы установим следующий результат.

Пусть $\psi(x) > 0$ — монотонно убывающая функция на полуоси $(0, +\infty)$, причем $\lim_{x\to+\infty} \psi(x) = 0$, $\lambda(x)$ — мажоранта, для которой выполняются условия (2.1).

Теорема 3. *Пусть ψ и λ удовлетворяют вышеуказанным условиям. Тогда следующие два утверждения равносильны:*

1) $$\sum_{k=1}^{+\infty} \psi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right) < +\infty$$

для произвольного $\{z_k\}_1^\infty = Z_f,\ f \in X_\lambda^\infty$;

2) $$\int_1^{+\infty} \psi(x)\,\lambda(x)\,dx < +\infty.$$

Доказательство. Сначала докажем импликацию 1) => 2). Пусть f—функция из X_λ^∞, $Z_f = \{z_k\}_1^\infty$, для которой $n_{k,l} = [\lambda(2^k)]$, $k = 1, 2, \cdots$, $l = -2^k, \cdots, 2^k - 1$. При этом будем предполагать, что $z_k \in \Delta_{k,l} \Rightarrow z_k = 1 - \frac{1}{2^k}$, причем z_k является нулем кратности $[\lambda(2^k)]$.

Существование такой функции следует из теоремы А. Тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \psi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} \left\{\psi\left(\frac{1}{1-|z_m|}\right)\right\}_{z_m \in \Delta_{k,l}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{l=-2^k}^{2^k-1} [\lambda(2^k)]\,\psi(2^k) = \sum_{k=1}^{+\infty} 2^k\,[\lambda(2^k)]\,\psi(2^k)$$

и таким образом

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k\,\lambda(2^k)\,\psi(2^k) < +\infty.$$

Следовательно

$$\int_1^{+\infty} \psi(x)\,\lambda(x)\,dx < +\infty. \tag{2.12}$$

Теперь докажем обратное утверждение. Пусть интеграл (2.12) сходится, тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2^k\,\lambda(2^{k-1})\,\psi(2^k) \leqslant \int_1^{+\infty} \psi(x)\,\lambda(x)\,dx.$$

Теперь заметим, что в условиях теоремы

$$\lambda(2^k) \leqslant 2^\beta \lambda(2^{k-1}), \text{ где } \beta = \sup\left\{\frac{x\,\lambda'(x)}{\lambda(x)}\right\}. \tag{2.13}$$

В самом деле, поскольку $\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} < \frac{\beta}{x}$, то интегрируя указанное неравенство по интервалу $(2^{k-1}, 2^k)$, получим

$$\ln\left(\frac{\lambda(2^k)}{\lambda(2^{k-1})}\right) \leqslant \beta \ln 2,$$

т. е. $\lambda(2^k) \leqslant 2^\beta \lambda(2^{k-1})$ и неравенство (2.13) доказано.

Отсюда вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\,\lambda(2^k)\,\psi(2^k) < +\infty. \tag{2.14}$$

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы A. Тогда учитывая (2.14), получим

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\psi\left(\frac{1}{1-|z_k|}\right)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=-2^k}^{2^k-1}\left\{\psi\left(\frac{1}{1-|z_m|}\right)\right\}_{z_m\in\Delta_{k,l}}\leqslant$$

$$\leqslant \text{const}\sum_{k=1}^{+\infty}2^k\lambda(2^k)\,\psi(2^k)<+\infty$$

и теорема доказана.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2.II.1982

Ֆ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Շրջանում անալիտիկ և մինչև եզրը աճող ֆունկցիաների զերոների մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք $\omega(r)>0$*-ը մոնոտոն ֆունկցիա է* $L^1(0,1)$ *դասից, իսկ* A_ω^**-ն շրջանում անալիտիկ այն* f *ֆունկցիաների դասն է, որոնց համար*

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\omega(r)\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,rdrd\varphi<+\infty:$$

Հոդվածում ω*-ի վրա որոշ սահմանափակումների դեպքում տրվում է* A_ω^* *դասի զերոների լրիվ խարակտերիստիկան։*

F. A. SHAMOYAN. *On of zeros functions analytical in the disc and growing near its circumference* (summary)

Let $\omega(r)>0$ be a monotonous function from $L^1(0,1)$, and let A_ω^* be the class of holomorphic in the unit disc functions for which

$$\int_0^1\int_{-\pi}^{\pi}\omega(r)\ln^+|f(re^{i\varphi})|\,rdrd\varphi<+\infty.$$

Under some restrictions of ω the a complete characterization of the function belonging to A_ω^* is obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций, ДАН Арм. ССР, 3, № 1, 1945, 3—9.
2. *М. М. Джрбашян.* К проблеме представимости аналитических функций, Сообщ. Ин-та математики и механики АН Арм. ССР, вып. 2, 1948, 3—55.
3. *Ф. А. Шамоян.* Факторизационная теорема М. М. Джрбашяна и характеристика нулей аналитических в круге функций с мажорантой конечного порядка, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., 13, №№ 5—6, 1978, 405—422.
4. *Heilper Andrei.* The zeros of functions in Nevanlinnas area class, Israel, J. Math., 34, № 1—2, 1979, 1—11.
5. *L. Branges.* Hilbert spaces of entire functions, Prentce—Hall, Engewood, Cliffs, N. Y., 1968.