ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVIII, № 1, 1983 Математика

УДК 517.53

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, А. Э. ЕРЁМЕНКО, И. В. ОСТРОВСКИЙ

О СУММЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА

Хорошо известно, что класс целых функций вполне регулярного роста (в.р.р.) в смысле Левина—Пфлюгера не замкнут относительно сложения. Пусть f_1, f_2—функции в.р.р. относительно одного и того же уточненного порядка $\rho(r)$. При исследовании целых эрмитово-позитивных функций [1] возник вопрос о множестве значений $a \in \mathbf{C}$, при которых целая функция

$$f_1 - af_2 \tag{1}$$

будет в.р.р. относительно $\rho(r)$. Этот вопрос представляет самостоятельный интерес и будет подробно рассмотрен в настоящей работе. Используемые сведения по теории целых функций в.р.р. содержатся в гл. II—III книги [2], а сведения по теории мероморфных функций—в гл. I—IV книги [3]. Обозначим через $E(f_1, f_2)$ множество таких $a \in \mathbf{C}$, при которых целая функция (1) не будет в.р.р. В [1] было отмечено, что множество $E(f_1, f_2)$ имеет нулевую емкость; получим более точную его характеристику.

Множество $E \subset \mathbf{C}$ назовем H-множеством, если

$$E = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu, \ \omega \leqslant \infty, \tag{2}$$

причем E_ν обладают таким свойством: для каждого ν существует $k_\nu > 0$ и последовательность $(a_p^{(\nu)})_{p=1}^{\infty} \subset \mathbf{C}$ такие, что каждая точка $a \in E_\nu$ покрывается бесконечным числом кругов

$$\{a : |a - a_p^{(\nu)}| < \exp(-\exp(pk_\nu))\} = C(\nu, p).$$

Хилленгрен [4] доказал, что множество $E_V(g)$ конечных валироновских исключительных значений мероморфной функции g конечного порядка является H-множеством.

Теорема 1. *$E(f_1, f_2)$ является H-множеством.*

Доказательство. Ввиду цитированного результата [4] достаточно показать, что

$$E(f_1, f_2) \subset E_V(f_1/f_2). \tag{3}$$

Положим $f_a = f_1 - af_2$, $F = f_1/f_2$. Не уменьшая общности, считаем, что первый отличный от 0 тейлоровский коэффициент функции f_2 равен 1. Обозначим через $N_{12}(r)$ неванлинновскую считающую функцию общих нулей (с учетом порядка) функций f_1 и f_2, то есть учитывающую нули $|f_1| + |f_2|$. Легко видеть, что

$$N(r, a, F) = N(r, 0, f_a) - N_{12}(r). \tag{4}$$

С другой стороны, согласно [3], с. 28 имеем

$$T(r, F) = T_0(r, f_1, f_2) - N_{12}(r), \tag{5}$$

где

$$T_0(r, f_1, f_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max\{\log|f_1(re^{i\theta})|, \log|f_2(re^{i\theta})|\}\, d\theta.$$

Из неравенства Иенсена следует, что $N(r, 0, f_a) \leqslant T_0(r, f_1, f_2) + \mathrm{const}$. Отсюда и из [4], [5] получаем для валироновского дефекта

$$\Delta(a, F) = 1 - \varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r, a, F)}{T(r, F)} \geqslant 1 - \varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, f_a)}{T_0(r, f_1, f_2)}. \tag{6}$$

Рассуждая аналогично [3], с, 60, получаем соотношение

$$T_0(r, f_1, f_2) = \frac{r^{\rho(r)}}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\theta)\, d\theta + o(r^{\rho(r)}),\quad r\to\infty, \tag{7}$$

где $H(\theta) = \max\{h(\theta, f_1), h(\theta, f_2)\}$, $h(\theta, f)$ — индикатор целой функции f относительно $\rho(r)$. Согласно одному результату Б. Я. Левина ([2], с. 225), f_a не является целой функцией в.р.р. относительно $\rho(r)$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta, f_a)\, d\theta > \varliminf_{r\to\infty} \frac{N(r, 0, f_a)}{r^{\rho(r)}} = \eta(a) \geqslant 0.$$

Но $h(\theta, f_a) \leqslant H(\theta)$. Поэтому если f_a не является целой функцией в.р.р., то

$$\eta(a) < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\theta)\, d\theta. \tag{8}$$

Из (6), (7), (8) следует, что

$$\Delta(a, F) \geqslant 1 - \eta(a)\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\theta)\, d\theta\right\}^{-1} > 0,$$

что доказывает (3) и теорему 1.

Оказывается, что теорема 1 дает близкую к точной характеристику множества $E(f_1, f_2)$.

Теорема 2. *Пусть E является H-множеством, причем если $\omega = \infty$, множества E_v в (2) замкнуты. Существуют целые функции f_1, f_2 в.р.р. относительно $\rho(r) \equiv 1$, такие, что $E \subset E(f_1, f_2)$.*

Доказательство. Построение нужных нам функций разобьем на несколько этапов.

1°. Пусть (n_j) — возрастающая последовательность, состоящая из натуральных чисел вида $2^q \cdot m$, $1 \leqslant q < \infty$, $2^q \leqslant m \leqslant 2^{q+2} - 1$. Рассмотрим целую функцию

$$f_2(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{z^{n_j}}{n_j!}.$$

Покажем, что функция f_2 имеет в.р.р. Очевидно, что

$$M(r, f_2)=f_2(r)<\exp r,\ r>0. \tag{9}$$

Пусть $n_j\leqslant r<n_{j+1}$. Если $n_j=2^{q_j}m_j$, то $r\geqslant n_j\geqslant r-2^{q_j}\geqslant r-\sqrt{r}$. Поэтому

$$M(r, f_2)>\frac{r^{n_j}}{n_j!}\geqslant\frac{n_j^{n_j}}{n_j!}>e^{n_j}>e^{r-\sqrt{r}}.$$

Вместе с (9) это дает $\ln f_2(r)=(1+o(1))\,r$, $r\to\infty$, т. е. f_2 имеет в.р.р. на положительном луче.

Пусть теперь $q\in\mathbf{N}$, $s\in\mathbf{Z}_+$, $0\leqslant s\leqslant 2^q-1$. Тогда

$$f_2(r\exp(2\pi is2^{-q}))=\sum_{n_j<2^{2q}}\frac{r^{n_j}\exp(2\pi isn_j2^{-q})}{n_j!}+$$

$$+\sum_{n_j>2^{2q}}\frac{r^{n_j}\exp(2\pi isn_j2^{-q})}{n_j!}=O(r^{2^{2q}})+\sum_{n_j>2^{2q}}\frac{r^{n_j}}{r_j!}=$$

$$=O(r^{2^{2q}})+f_2(r),\ r\to\infty; \tag{10}$$

$$\log|f_2(r\exp(2\pi is2^{-q}))|\sim\log f_2(r)\sim r,$$

$$r\to\infty.$$

Таким образом, лучи в.р.р. образуют всюду плотное множество. Поскольку множество лучей в.р.р. замкнуто, [2], с 186, то f_2 имеет в.р.р. и $h(\theta, f_2)\equiv 1$.

2°. Построим теперь функцию f_1 вида

$$f_1(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{b_{n_j}}{n_j!}\,z^{n_j},$$

где последовательность (b_{n_j}) будет определяться множеством E. Предположим сначала, что в (2) $\omega=\infty$, и согласно условию теоремы 2 множества E_ν замкнуты. Не уменьшая общности можно считать, что $0\notin E$ и что для всех $\nu\in N$

$$\varnothing\neq E_\nu\subset\left\{a:2/\nu<|a|<3\nu,\left|\arg a-\frac{\pi}{8}(\nu-1)\right|\leqslant\frac{\pi}{8}\right\}.$$

Далее, можно считать, что

$$\frac{1}{\nu}<|a_p^{(\nu)}|<4\nu,\left|\arg a_p^{(\nu)}-\frac{\pi}{8}(\nu-1)\right|\leqslant\frac{\pi}{4}. \tag{11}$$

Для каждого E_ν и $s\in[1,\infty)$ обозначим через $\mathrm{P}(s,\nu)$ наименьшее натуральное $\mathrm{P}\geqslant s+1$ такое, что

$$E_\nu\subset\bigcup_{j=[s]+1}^{\mathrm{P}}C(\nu, j).$$

Существование P следует из леммы Гейне—Бореля.

Обозначим через $(\psi(n))$ последовательность

$$(1, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, \cdots).$$

Пусть (k_ν)—последовательность, отвечающая множеству E по определению H-множества.

Положим $m_1 = \mathrm{P}(4k_1^{-1}, 1)$. Предположим, что уже выбраны $m_1, \cdots, m_l$. Пусть $s_l = \frac{1}{2}(k_{\psi(1)} m_1 + \cdots + k_{\psi(l)} m_l)$. Выберем m_{l+1} так, чтобы

$$m_{l+1} \geqslant \mathrm{P}(4s_l/k_{\psi(l+1)}, \psi(l+1)), \tag{12}$$

и, следовательно

$$m_{l+1} k_{\psi(l+1)} \geqslant 4. \tag{13}$$

Определим теперь последовательность (b_j) следующим образом: Положим

$$N(l, p) = \exp\left(s_l + \frac{1}{2} k_{\psi(l+1)} (p-1)\right).$$

Если

$$N(l, p) < j \leqslant N(l, p+1), \text{ то } \quad b_j = a_p^{(\psi(l+1))}, \; 1 \leqslant p \leqslant m_{l+1}.$$

Имеем в силу (13) и определений

$$\psi(l+1) \leqslant l \leqslant \frac{1}{2} s_l < s_l \leqslant \exp s_l \leqslant j.$$

Поэтому из (11) следует, что

$$1/j < |b_j| < 4j. \tag{14}$$

3°. Покажем, что функция f_1 имеет в.р.р.

Прежде всего с помощью (14) получаем оценку сверху при $r>0$

$$|f_1(r)| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|b_{n_j}|}{n_j} r^{n_j} \leqslant 4r \sum_{j=1}^{\infty} \frac{r^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \leqslant 4re^r. \tag{15}$$

Для получения оценки снизу предположим, что $\exp s_l \leqslant r \leqslant \exp s_{l+1}$. Имеем

$$f_1(r) = \sum_{n_j < \exp s_{l-1}} \frac{b_{n_j}}{n_j!} r^{n_j} + \sum_{\exp s_{l-1} < n_j < \exp s_{l+2}} \frac{b_{n_j}}{n_j!} r^{n_j} +$$

$$+ \sum_{n_j > \exp s_{l+2}} \frac{b_{n_j}}{n_j!} r^{n_j} = I_1 + I_2 + I_3.$$

Далее, в силу (14)

$$|I_3| \leqslant 4r \sum_{j=[\exp s_{l+2}]} \frac{r^j}{j!} \leqslant 8r \frac{r^{[\exp s_{l+2}]}}{[\exp s_{l+2}]!},$$

поскольку с учетом (13)

$$\frac{r}{j} \leqslant \frac{\exp s_{l+1}}{\exp s_{l+2} - 1} = \frac{1 + o(1)}{\exp\left(\frac{1}{2} k_{\psi(l+2)} m_{l+2}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1+o(1)}{e^2} < \frac{1}{2},\ l \to \infty,$$

для достаточно больших r. Но

$$\frac{r^{[\exp s_{l+2}]}}{[\exp s_{l+2}]!} \leqslant \left(\frac{er}{[\exp s_{l+2}]}\right)^{[\exp s_{l+2}]} \leqslant 1.$$

Поэтому

$$|I_3| \leqslant 8r. \tag{16}$$

Если $j \leqslant \exp s_{l-1}$, то

$$\frac{r}{j} \geqslant \frac{\exp s_l}{\exp s_{l-1}} = \exp\left(\frac{1}{2} m_l k_{\psi(l)}\right) \geqslant e^2 > 2.$$

Поэтому

$$|I_1| \leqslant 4r \sum_{j=0}^{[\exp s_{l-1}]} \frac{r^j}{j!} \leqslant 8r \frac{r^{[\exp s_{l-1}]}}{([\exp s_{l-1}])!} \leqslant 8r\left(\frac{re}{[\exp s_{l-1}]}\right)^{[\exp s_{l-1}]} \leqslant$$

$$\leqslant 8r \max\left\{\left(\frac{re}{x}\right)^x : 0 \leqslant x \leqslant \frac{r}{e^2}\right\} = 8r\exp(3e^{-2}r). \tag{17}$$

Заметим теперь, что множество

$$\bigcup_{p=1}^{\infty} \{a_p^{(\psi(l-1))},\ a_p^{(\psi(l))},\ a_p^{(\psi(l+1))}\}$$

в силу (11) при любом l лежит в некотором угле с вершиной в 0 и раствором $3\pi/4$. Далее, в каждом интервале $[\exp s_m, \exp s_{m+1}]$ при достаточно большом m содержатся члены последовательности (n_j) поскольку $n_{j+1} \sim n_j$, а $\exp s_{j+1} > e^2 \exp s_j$. Поэтому с помощью (14) получаем

$$|I_2| > \sin\frac{\pi}{8} \sum_{\exp s_{l-1} < n_j < \exp s_{l+2}} \frac{r^{n_j}}{n_j!\, n_j} \geqslant \sin\frac{\pi}{8} \frac{r^{n_q}}{n_q!\, n_q},$$

где q таково, что $n_q \leqslant r < n_{q+1}$, следовательно, как в 1°, $r > n_q > r - \sqrt{r}$, поэтому

$$\frac{r^{n_q}}{n_q!\, n_q} > (1+o(1)) \frac{e^{n_q}}{\sqrt{2\pi n_q^3}} = e^{(1+o(1))r},$$

$$|I_2| > \exp(1+o(1))r,\ r \to \infty. \tag{18}$$

Из (15), (16), (17), (18) следует, что $|f_1(r)| = \exp\{(1+o(1))r\}$, $r \to \infty$, таким образом, f_1 имеет в.р.р. на положительном луче. Повторяя выкладку (10) для f_1 вместо f_2, получим, что f_1 является целой функцией в.р.р.

4°. Покажем теперь, что линейная комбинация $f_1 - af_2$ не имеет в.р.р. при $a \in E$. Пусть $a \in E_\nu$. Существует бесконечная последовательность натуральных чисел l, такая, что $\psi(l+1) = \nu$. Всюду далее число ν фиксировано и l выбирается из указанной последовательности. Для каждого l в силу (12) существует такое p, что

$$4s_l/k_{\nu(l_\nu+1)} \leqslant p < m_{l+1} \tag{19}$$

и $|a - a_p^{(\nu)}| < \exp(-e^{k_\nu p})$. Поскольку $s_l \to \infty$, множество таких p неограничено.

Положим

$$r = \exp\left(s_l + \frac{1}{2}k_\nu\left(p - \frac{1}{2}\right)\right) = N(l, p)\exp(k_\nu/4). \tag{20}$$

Из (19), (20) следует, что $\log r < s_l + \dfrac{1}{2}k_\nu p \leqslant \dfrac{3}{4}k_\nu p$, то есть

$$|a - a_p^{(\nu)}| \leqslant \exp(-r^{4/3}). \tag{21}$$

При $|z| = r$ имеем, учитывая, что $b_j = a_p^{(\nu)}$ при $[N(l, p)] + 1 \leqslant j \leqslant$ $\leqslant [N(l, p+1)]$

$$|f_1(z) - af_2(z)| \leqslant \sum_{j=1}^{[N(l,p)]} |b_j - a_p^{(\nu)}| \frac{r^j}{j!} +$$

$$+ \sum_{j=[N(l,p+1)]+1} |b_j - a_p^{(\nu)}| \frac{r^j}{j!} + |a - a_p^{(\nu)}|\,|f_2(z)| = U_1 + U_2 + U_3. \tag{22}$$

При $j \geqslant [N(l, p+1)] + 1$ имеем

$$\frac{r}{j} \leqslant \frac{N(l, p)\exp(k_\nu/4)}{[N(l, p+1)] + 1} \leqslant \frac{N(l, p)\exp(k_\nu/4)}{N(l, p+1)} = \exp(-k_\nu/4), \tag{23}$$

а при $j \leqslant N(l, p)$ —

$$\frac{r}{j} \geqslant \frac{N(l, p)\exp(k_\nu/4)}{[N(l, p)]} \geqslant \exp(k_\nu/4). \tag{24}$$

Будем обозначать через A положительные постоянные, зависящие только от ν, вообще говоря, разные. Используя неравенство

$$|b_j - a_p^{(\nu)}| < Aj, \tag{25}$$

получим ($N = N(l, p)$)

$$|U_1| \leqslant Ar\sum_{j=0}^{[N]} \frac{r^j}{j!} < \frac{Ar}{1 - \exp(-k_\nu/4)}\frac{r^N}{[N]!} \leqslant$$

$$\leqslant Ar\exp\{(1 + k_\nu/4)[N]\} \leqslant Ar\exp((1 + k_\nu/4)e^{-k_\nu/4}r). \tag{26}$$

Аналогично из (25), (23) следует ($N_1 = N(l, p+1)$)

$$|U_2| \leqslant Ar\sum_{j=[N_1]}^{\infty} \frac{r^j}{j!} \leqslant Ar\frac{r^{[N_1]}}{[N_1]!} \leqslant Ar\frac{N_1^{[N_1]}e^{[N_1]}}{\exp((k_\nu/4)[N_1])[N_1]^{[N_1]}} \leqslant$$

$$\leqslant Ar\exp((1 - k_\nu/4)[N_1]) \leqslant Ar\exp((1 - k_\nu/4)e^{k_\nu/4}r). \tag{27}$$

Далее, в силу (21)

$$|U_3| = |a - a_p^{(\nu)}|\,|f_2(z)| \leqslant \exp(-r^{4/3})e^r = o(1), \tag{28}$$

$$r \to \infty.$$

Учитывая неравенство $(1-x)\,e^{x} < (1+x)\,e^{-x} < 1,\ x > 0$, из (26), (27), (28) получаем

$$|f_1(z) - af_2(z)| = O\left(\exp\left\{(1 + k_\nu/4)\,e^{-k_\nu/4}\,r\right\}\right),\quad r\to\infty,$$

то есть

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\log M(r, f_1 - af_2)}{r} \leqslant \frac{1 + k_\nu/4}{\exp(k_\nu/4)} < 1. \tag{29}$$

Не уменьшая общности можно считать, что E_ν состоит по крайней мере из двух точек. Тогда существует подпоследовательность $(a^{(\nu)}_{p_j})$ такая, что $|a - a^{(\nu)}_{p_j}| \geqslant \delta > 0$. Будем теперь считать, что числа p взяты из этой подпоследовательности, и определим r и $N(l, p)$ формулой (20). Соотношения (22), (26), (27) сохраняют силу, и мы получаем

$$|f_1(r) - af_2(r)| \geqslant O\left(\exp\frac{1 + k_\nu/4}{\exp(k_\nu/4)}\,r\right) + \delta\exp\{(1 + o(1))\,r\},\ r\to\infty. \tag{30}$$

Из (29), (30) следует, что $f_1 - af_2$ не является функцией в.р.р.

Остановимся теперь кратко на случае, когда в (2) $\omega < \infty$. В этом случае требование замкнутости множеств E_ν излишне. Прежде всего, можно считать, что $\omega = 1$, так как каждая точка ζ из $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$ покрывается бесконечным числом кругов

$$C(p) = \{a : |a - a_p| < \exp(-\exp(pk))\},$$

где $k = \omega^{-1}\min\{k_\nu : 1 \leqslant \nu \leqslant \omega\}$, (a_p) — последовательность $(a_1^{(1)}, \cdots, a_1^{(\omega)}, a_2^{(1)}, \cdots, a_2^{(\omega)}, \cdots)$. Как и раньше, не уменьшая общности будем считать, что $0 \overline{\in} E$. Учитывая, что каждая точка $a \in E$ является точкой сгущения для последовательности (a_p), нетрудно убедиться, что последовательность кругов можно выбрать так, что

$$\exp\left(-\frac{1}{2}pk\right) < |a_p| < 4\exp\left(\frac{1}{2}pk\right) = 4S_p,\ |\arg a_{p+1} - \arg a_p| \leqslant \frac{\pi}{4}$$

для всех $p \in \mathrm{N}$. Теперь полагаем $b_j = a_p$ при $S_p < j \leqslant S_{p+1}$ и, как раньше, определяем функции f_2 и f_1. Тогда для b_j выполняется (14). Далее рассуждения проводим, как выше, заменяя всюду $\exp s_l$ на S_l. Тогда вместо (16) получим $|I_3| \leqslant 4\,(1 - S_1^{-1})\,r$, вместо (17) — $|I_1| \leqslant 4\,(1 - S_1^{-1})\exp\left\{\left(\frac{k}{2} + 1\right)e^{-k/2}\,r\right\}$, а (18) и вывод о том, что f_1 имеет в.р.р., останутся без изменений. Для $a \in E$ возьмем последовательность значений $p = p_n \to \infty$, такую, что $|a - a_p| < \exp(-e^{kp})$ и $r = e^{k/4} S_p$. Заменяя $a_p^{(\nu)}$ на a_p, k_ν на k и $N(l, p)$, $N(l, p+1)$ в (23) на S_p, S_{p+1}, получим оценки (21), (23)—(30).

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из (18) следует, что $h(\theta, f_1 - af_2) \equiv 1$ (см. 1°). Таким образом, $f_1 - af_2$ не имеет в.р.р. ни на одном луче, если $a \in E$.

Замечание 2. При доказательстве теоремы 2 мы (так же, как и Хилленгрен [4]) использовали идею примера Ж. Валирона ([3], с. 154—157) целой функции с несчетным множеством валироновских исключительных значений. В примере Валирона использовалась функция

$$\varphi(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{b_j}{j!}z^j,\quad \text{где}\quad b_0=b_1=b_2=\frac{3}{4},\ b_j=a_p$$

при $N_{p-1}<j<N_p$, $p\in\mathbf{N}$, $N_0=2$, $N_p=N_{p-1}^3$, (a_p) — последовательность точек из $\left(\frac{1}{2},1\right)$, такая, что $|a_p-a_{p-1}|>\eta>0$, $p\in\mathbf{N}$. Построенная нами функция f_1 во многом схожа с функцией φ. Однако, как будет сейчас показано, в отличие от f_1 функция φ не имеет в.р.р.

Используем такой факт, доказательство которого нам сообщил М. Н. Шеремета: если

$$\mathrm{P}_n(z)=\sum_{j=0}^{n}\frac{z^j}{j!},\quad \text{то}\quad \log|\mathrm{P}_n(-n)|\sim n,\ n\to\infty.$$

Действительно

$$\mathrm{P}_n(-n)=e^{-n}+(-1)^n\frac{e^{-n}}{n!}\int_0^n e^t t^n\,dt,$$

$$\frac{e^{-n}}{n!}\int_0^n e^t t^n\,dt>\frac{e^{-n}}{n!}\int_{n(1-\varepsilon)}^{n}e^t t^n\,dt\geqslant$$

$$\geqslant\frac{e^{-\varepsilon n}}{n!}(1-\varepsilon)^n n^n n\varepsilon\geqslant e^{(1-\varepsilon)n}(2\pi n)^{-\frac{1}{2}}(1-\varepsilon)^n n\varepsilon,\quad 0<\varepsilon<1,$$

откуда следует нужное соотношение.

Имеет место тождество

$$\varphi(-N_p)=(a_p-a_{p+1})\,\mathrm{P}_{N_p}(-N_p)+a_{p+1}e^{-N_p}+$$

$$+\sum_{j=N_{p+1}+1}^{\infty}\frac{b_j-a_{p+1}}{j!}(-N_p)^j+\sum_{j=0}^{N_{p-1}}\frac{b_j-a_p}{j!}(-N_p)^j.$$

Первая сумма не превосходит по модулю $\sum_{j=0}^{\infty}(N_p e/(N_{p+1}+1))^j\leqslant$ $\leqslant 2$ при $p>1$, а вторая — величины $N_p^{N_{p-1}}e=\exp\{N_p^{1/3}\ln N_p+1\}$. Следовательно, $\log|\varphi(-N_p)|\sim N_p$, и $h(\pi,\varphi)=1$. При $N_{p-1}^{5/4}\leqslant r\leqslant N_p^{1/2}$ имеем

$$\varphi(-r)=a_p e^{-r}+\sum_{j=0}^{N_{p-1}}\frac{b_j-a_p}{j!}(-r)^j+\sum_{j=N_p+1}^{\infty}\frac{b_j-a_p}{j!}(-r)^j.$$

Но

$$\sum_{j=0}^{N_{p-1}}\frac{r^j}{j!}\leqslant\exp\{r^{4/5}\log r+1\},$$

$$\sum_{j=N_p+1}^{\infty} \frac{r^j}{j!} \leqslant \sum_{j=N_p+1}^{\infty} \left(\frac{re}{j}\right)^j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{N_p}\, e}{N_p+1}\right)^j \leqslant 2.$$

Поэтому при $N_{p-1}^{5/4} \leqslant r \leqslant N_p^{1/2}$ выполняется $\log|\varphi(-r)| \leqslant r^{4/5}\log r + O(1) = o(r)$, $r \to \infty$. Следовательно, на отрицательном луче φ не имеет в.р.р.

Легко видеть, что H-множество E в теореме 2 можно выбрать имеющим мощность континуума. Естественно возникает вопрос о возможной мощности множества $E(f_1, 1)$, который сводится к вопросу о мощности множества $E_V(f_1)$ для целых функций в.р.р.

Ум Ки-Чжул [5] доказал, что для целых функций в.р.р. конечного порядка ρ число неванлинновских исключительных значений конечно и не превосходит 2ρ (см. также [6], [7]), в то время, как Н. У. Аракелян показал [8], [3], стр. 172, что целая функция порядка ρ, $1/2 < \rho < \infty$, может иметь счетное множество неванлинновских исключительных значений. Таким образом, требование в.р.р. целой функции уменьшает возможную мощность множества ее неванлинновских исключительных значений. Из следующей теоремы видно, что требование в.р.р. не влечет ограничений на мощность множества исключительных значений в смысле Валирона.

Теорема 3. *При любом уточненном порядке $\rho(r) \to \rho > 1/2$ существует целая функция F в.р.р. относительно $\rho(r)$, такая, что множество $E_V(F)$ имеет мощность континуума.*

Требование $\rho > 1/2$ естественно, так как при $\rho \leqslant 1/2$ индикатор целой функции положителен (кроме, возможно, одной точки в случае $\rho = 1/2$) и целая функция в.р.р. не может иметь валироновских исключительных значений.

Доказательство теоремы 3 существенно использует следующую лемму, которая может представлять самостоятельный интерес для теории ограниченных аналитических функций.

Лемма. *Пусть $0 < \alpha < 1$. Существует множество E мощности континуума и ограниченная аналитическая в $\{z : \operatorname{Re} z > 0\} \setminus \{0\}$ функция G, такая, что для любого $a \in E$ найдется последовательность $r_k \to \infty$ со свойством*

$$|G(z) - a| = O(\exp(-r_k^{\alpha})), \quad |z| = r_k, \quad |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad k \to \infty.$$

Доказательство леммы. Пусть $\alpha < \beta < 1$. Положим $\varphi(z) = 1 - \exp(-z^{\beta})$, где $z^{\beta} > 0$ при $z > 0$. Очевидно, что

$$|\varphi(z)| \leqslant A\,|z|^{\beta}, \quad |\arg z| < \frac{\pi}{2\beta}. \tag{31}$$

Обозначим $\beta_1 = \cos(\pi\beta/2)$,

$$\psi(x) = \exp\left\{\frac{1}{\beta}\, x^{-\beta^{2}(\beta-\alpha)^{-1}} \beta_1^{-\beta(\beta-\alpha)^{-1}}\right\}, \quad x > 0.$$

Функция $x\psi(x)$ убывает на некотором промежутке $(0, x_0)$. Выберем x_0 настолько малым, чтобы выполнялось

$$x\psi(x) > 2^{1/\beta}, \quad 0 < x \leqslant x_0. \tag{32}$$

Положим $\tau_1 = x_0$, $\tau_{k+1} = 1/\psi(\tau_k)$. Тогда $\tau_{k+1}/\tau_k \to 0$, $k \to \infty$, и в силу (32)

$$\tau_{k+1}/\tau_k < 2^{-1/\beta}, \quad k \in \mathbf{Z}_+. \tag{33}$$

Пусть теперь $\rho_k = \tau_k^{-\beta(\beta-\alpha)^{-1}} \beta_1^{-(\beta-\alpha)^{-1}}$. Так как в силу (33) $\tau_k < x_0 2^{-(k-1)/\beta}$, $k > 1$, то $\rho_k > A \cdot 2^{k/(\beta-\alpha)}$, следовательно

$$k = O(\log \rho_k), \quad k \to \infty. \tag{34}$$

Пусть (c_k) — последовательность комплексчых чисел такая, что

$$|c_k| \leqslant 1, \ \left| \sum_{j=1}^{k} c_j \right| \leqslant 1, \ k \in \mathbf{N}. \tag{35}$$

В силу (31) и (33) ряд

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi(\tau_k z) \tag{36}$$

сходится равномерно на компактах в $\left\{ z\colon |\arg z| < \frac{\pi}{2\beta} \right\}$. Если $\rho_k \leqslant |z| < \leqslant \rho_{k+1}$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, то в силу (31)

$$\left| G(z) - \sum_{j=1}^{k} c_j \right| \leqslant \sum_{j=1}^{k} |c_j (\varphi(\tau_j z) - 1)| + |c_{k+1} \varphi(\tau_{k+1} z)| +$$

$$+ \sum_{j=k+2}^{\infty} |c_j \varphi(\tau_j z)| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \exp(-(\tau_j |z|^\beta) \beta_1) + 2 +$$

$$+ A|z|^\beta \sum_{j=k+2}^{\infty} \tau_j^\beta = \sigma_{1k} + 2 + \sigma_{2k}. \tag{37}$$

Используя (33), (34), получим $(k \to \infty)$

$$\sigma_{1k} \leqslant k \exp(-(\tau_k \rho_k)^\beta \beta_1) = k \exp(-\rho_k^\alpha) = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\rho_k^\alpha\right)\right), \tag{38}$$

$$\sigma_{2k} \leqslant A\rho_{k+1}^\beta \tau_{k+2}^\beta = A\rho_{k+1}^\beta (\psi(\tau_{k+1}))^{-\beta} = A\rho_{k+1}^\beta \exp(-\rho_{k+1}^\beta) \to 0. \tag{39}$$

Из (35), (37), (38), (39) следует, что функция G ограничена при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$.

При $|z| = \rho_k$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ оценки уточняются так:

$$\left| G(z) - \sum_{j=1}^{k} c_j \right| \leqslant \sigma_{1k} + \sum_{j=k+1}^{\infty} |c_j \varphi(\tau_j z)| \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_{1k} + A\rho_k^\beta \sum_{j=k+1}^{\infty} \tau_j^\beta \leqslant \sigma_{1k} + A\rho_k^\beta \tau_{k+1}^\beta =$$

$$= \sigma_{1k} + A\rho_k^\beta \exp(-\rho_k^\beta) = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\rho_k^\alpha\right)\right), \quad k \to \infty. \tag{40}$$

Конкретизируем теперь выбор последовательности (c_k) в (36). Положим $R_n = 2^{-n} \exp(-\rho_{2^{n+1}}^{\alpha})$, $n \in \mathbf{N}$. Пусть (B_j) — последовательность всех конечномерных векторов с компонентами из множества $\{0, 1\}$, такая, что n-мерные векторы следуют за $(n-1)$-мерными, а векторы одинаковой размерности упорядочены произвольно. Если $B_j = (\varepsilon_{j_1}, \varepsilon_{j_2}, \dots, \varepsilon_{jm_j})$, где $m_j = \min\{n \in \mathbf{N} : 2^{n+1} - 2 \geqslant j\}$, то полагаем

$$a_j = \sum_{k=1}^{m_j} R_k \varepsilon_{jk}, \quad c_1 = a_1; \quad c_k = a_k - a_{k-1}, \quad k \geqslant 2.$$

Из (40) следует, что при $|z| = \rho_k$, $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ выполняется

$$|G(z) - a_k| = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\rho_k^{\alpha}\right)\right), \quad k \to \infty. \tag{41}$$

Пусть E — можество чисел вида

$$a = \sum_{\nu=1}^{\infty} R_\nu \varepsilon_\nu, \quad \varepsilon \in \{0,1\}, \tag{42}$$

оно имеет мощность континуума. Для любого $a \in E$ последовательность частичных сумм ряда (42) есть подпоследовательность (a_{j_n}) последовательности (a_j), причем $j \leqslant 2^{n+1}$.

Поэтому

$$|a - a_{j_n}| < \sum_{\nu=n+1}^{\infty} R_\nu \leqslant 2R_n \leqslant \exp(-\rho_{j_n}^{\alpha}).$$

Отсюда и из (41) следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 3. Для простоты будем считать, что $\rho(r) \equiv \rho$. Пусть сначала $\rho \neq 1$. Положим $\alpha = \rho/([\rho]+1)$, тогда $1/2 < \alpha < 1$. Применяя лемму, получим функцию G. Поскольку функция G ограничена при $\operatorname{Re} z \geqslant 0$, то по одному следствию из теоремы М. В. Келдыша ([3], с. 182, лемма 5.2) найдется целая функция G_1 нормального типа (обозначим величину типа через σ) порядка α, для которой в достаточно малом угле $\{z : |\arg z| \leqslant \theta_0\}$ равномерно по $\arg z$ выполняется

$$|G_1(z) - G(z)| = O(\exp(-|z|^{\alpha})), \quad z \to \infty.$$

Пусть G_2 — целая функция в.р.р. относительно $\rho(r) \equiv \alpha$, индикатор $h(\theta)$ которой отрицателен при $|\theta| < \theta_0/3$, положителен при $\theta_0/3 < |\theta| \leqslant \pi$, причем $h(\theta) > \sigma$ при $2\theta_0/3 < |\theta| \leqslant \pi$. Функция $F_1 = G_1 + G_2 + 4$ является целой функцией в.р.р., причем $E \subset E_V(F_1)$. Поэтому функция $F(z) = F_1(z^{[\rho]+1})$ — искомая.

Если $\rho = 1$, применяем лемму при $\alpha = 1/2$. Затем вместо функции G рассматриваем функцию $G(z^2)$, ограниченную при $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{4}$. Функции G_1, G_2 выбираются так же, как в предыдущем случае: роль α играет число 1.

Львовский государственный университет,
Физико-технический институт низких
температур АН УССР

Поступила 20.XI.1981

Ա. Ա. ԳՈԼԴԲԵՐԳ, Ա. Է. ԵՐՅՈՄԵՆԿՈ, Ի. Վ. ՕՍՏՐՈՎՍԿԻ. Լրիվին ռեգուլյար աճի ամբողջ ֆունկցիաների գումարի մասին *(ամփոփում)*

Դիցուք f_1, f_2-ը լրիվին ռեգուլյար աճի ամբողջ ֆունկցիաներ են։ Ուսումնասիրվում է $a \in C$ արժեքների բազմության կառուցվածքը, որոնց դեպքում $f_1 + a f_2$ ամբողջ ֆունկցիան չունի լրիվին ռեգուլյար աճ։ Կառուցվում է ռեգուլյար աճի ամբողջ ֆունկցիայի օրինակ, որի Ժ. Վալիրոնի իմաստով բացառիկ արժեքների բազմությունը հաշվելի չէ։

A. A. GOLDBERG, A. E. EREMENKO, I. V. OSTROVSKII. *On the sum of the entire functions of the perfectly regular growth* (summary)

Let f_1, f_2 be entire functions of perfectly regular growth. The structure of the set of the values $a \in C$ such that $f_1 + af_2$ is'nt of the perfectly regular growth is considered. An example of the entire function of the perfectly regular growth with non-enumerable set of Valiron exceptional values is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* О росте целых эрмитово-позитивных функций конечного порядка, ДАН УССР, сер. А, № 4, 1981, 6—9.
2. *Б. Я. Левин.* Распределение корней целых функций, М., ГИТТЛ, 1956.
3. *А. А. Гольдберг, И. В. Островский.* Распределение значений мероморфных функций, М., «Наука», 1970.
4. *A. Hyllengren.* Valiron deficient values for meromorphic functions in the plane, Acta math., 124, 1970, 1—8.
5. *Oum Ki—Choul.* Bounds for the number of deficient values of entire functions whose zeros have angular densities, Pacif. J. Math., 29, № 1, 1969, 187—202.
6. *А. А. Гольдберг.* О дефектах целых функций вполне регулярного роста, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, «Вища школа», 1971, вып. 14, 88—101.
7. *Ю. П. Лапенко.* Об оценке суммы дефектов целых функций вполне регулярного роста, ДАН СССР, 239, № 4, 1978, 785—788.
8. *Н. У. Аракелян.* Целые функции конечного порядка с бесконечным множеством дефектных значений, ДАН СССР, 170, № 2, 1966, 999—1002.