

УДК 517.98

Т. М. КОШЕЛЕВА

ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ m -ГО ПОРЯДКА
В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

[§ 1. Постановка задачи

Пусть S —класс бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условию

$$\varphi^{(k)}(x)(1+|x|^n) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow \infty, \quad k, n = 0, 1, \dots \quad (1)$$

Рассмотрим уравнение m -го порядка

$$L(u) \equiv \frac{d^m u}{dt^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + p_m(x) u = 0, \quad \varphi \in S, \quad (2)$$

где $u(t, \varphi)$ — искомое решение, которое при фиксированном $t > 0$ является линейным непрерывным функционалом в S , а $p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)$ — полиномы.

Будем говорить, что функционал $u(t, \varphi)$ принадлежит классу M_j , если для него существует постоянная c , натуральные числа k, n , такие, что имеет место оценка

$$\left| \frac{d^l u(t, \varphi)}{dt^l} \right| \leq c(1+t^k) \sup (1+|x|^n) (|\varphi(x)| + |\varphi'(x)| + \dots + |\varphi^{(j)}(x)|); \quad \varphi \in S; \quad t \geq 0, \quad l = 0, 1, \dots, m-1. \quad (3)$$

Обозначим через M объединение классов M_j , т. е. $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} M_j$.

Пусть $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$ — корни характеристического уравнения

$$\lambda^m + p_1(x)\lambda^{m-1} + \dots + p_m(x) = 0. \quad (4)$$

Предположим, что

$$\operatorname{Re} \lambda_r(x) \leq 0, \quad r = 1, 2, \dots, q, \quad (5)$$

$$\operatorname{Re} \lambda_r(x) > 0, \quad r = q+1, q+2, \dots, m, \quad (6)$$

при $-\infty < x < \infty$.

Рассмотрим следующую задачу.

Найти решение уравнения (2), принадлежащее классу M_j и удовлетворяющее граничным условиям

$$L_k(u) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} Q_{kj}(x) \frac{d^j u(0, \varphi)}{dt^j} = l_k(\varphi), \quad \varphi \in S, \quad k = 0, 1, \dots, q-1, \quad (7)$$

где Q_{kj} — полиномы, $l_k(\varphi)$ — линейные непрерывные функционалы из класса M_n . Связь между j и r , будет указана ниже.

В матричной форме условие (7) можно записать в виде

$$Q(x) W(\varphi) = l(\varphi), \quad \varphi \in S, \quad (8)$$

где $Q(x)$ — матрица размерности $q \times m$ с элементами $Q_{kj}(x)$, а l и W — вектор-столбцы.

$$W(\varphi) = (u(0, \varphi), u'(0, \varphi), \dots, u^{(m-1)}(0, \varphi)),$$

$$l(\varphi) = (l_0(\varphi), l_1(\varphi), \dots, l_{q-1}(\varphi)).$$

Пусть $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_q(x)$ — корни характеристического уравнения (4), удовлетворяющие условию (5). Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение в классе обычных функций

$$\left(\frac{d}{dt} - \lambda_1(x) E \right) \dots \left(\frac{d}{dt} - \lambda_q(x) E \right) \omega(t, x) = 0, \quad (9)$$

где x входит как параметр, E — единичный оператор. Пусть $\omega_0(t, x), \dots, \omega_{q-1}(t, x)$ — фундаментальная система решений этого уравнения. Обозначим через $\omega(x)$ матрицу

$$\omega(x) = \begin{vmatrix} \omega_0(0, x) & \omega_1(0, x) & \dots & \omega_{q-1}(0, x) \\ \frac{\partial \omega_0(0, x)}{\partial t} & \frac{\partial \omega_1(0, x)}{\partial t} & \dots & \frac{\partial \omega_{q-1}(0, x)}{\partial t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^{m-1} \omega_0(0, x)}{\partial t^{m-1}} & \frac{\partial^{m-1} \omega_1(0, x)}{\partial t^{m-1}} & \dots & \frac{\partial^{m-1} \omega_{q-1}(0, x)}{\partial t^{m-1}} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Если

$$\det Q(x) \omega(x) \neq 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad (11)$$

то задача (2), (7) в различных классах рассмотрена в работах [1]—[5]. В частности в работе [5] показано, что задача (2), (7) при условии (11) имеет единственное решение в классе M .

В данной работе мы рассмотрим задачу (2), (7) в том случае, когда $\det Q(x) \omega(x) \neq 0$ всюду, кроме конечного числа точек $x_1, x_2, \dots, x_n$. В этом случае, как показывают примеры, однородная задача (2), (7) в классе M может иметь бесконечное число линейно независимых решений, а поэтому естественно поставить задачу в классе M_j .

В работе показано, что в этом случае однородная задача (2), (7) в классе M_j имеет конечное число линейно независимых решений, а неоднородная задача всегда разрешима, а также указан метод решения этой задачи.

Отметим, что многие краевые задачи для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полуплоскости при помощи преобразования Фурье приводятся к задаче (2), (7) в классе M_j .

§ 2. Однородная задача (2), (7) в классе M_j

Аналогично работе [4] можно показать, что если $\det(Q(x) \times \omega(x)) \neq 0$ всюду кроме конечного числа точек $x_1, x_2, \dots, x_n$, то решение однородной задачи (2), (7) есть функционал, сосредоточенный в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Так как кроме этого ищется решение из класса M_j , то оно представимо в виде

$$u(t, \varphi) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^j c_{lk}(t) \varphi^{(k)}(x_l), \quad \varphi \in S. \quad (12)$$

Пусть $\varphi_{lr}(x)$ — функции из S , удовлетворяющие условиям

$$\varphi'_{lr}(x_l) = 1, \quad \varphi^{(s)}_{lr}(x_r) = 0 \quad \text{при } i \neq r \text{ или } s \neq r. \quad (13)$$

Подставляя $\varphi_{lr}(x)$ в представление (12), получим, что $c_{lr}(t) = u(t, \varphi_{lr}(x))$. Следовательно $c_{lr}(t)$ вместе со своими производными до $(m-1)$ -го порядка растут не быстрее полинома. Из соотношения (12) получим, что

$$\frac{d^p u(t, \varphi)}{dt^p} = \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^j c^{(p)}_{lk}(t) \varphi^{(k)}(x_l). \quad (14)$$

Подставляя $u(t, \varphi)$ из (12) в уравнение (2) и имея в виду соотношение (14), получим

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^j c^{(m)}_{lk}(t) \varphi^{(k)}(x_l) + c^{(m-1)}_{lk}(t) (p_1(x))^{(k)}_{x=x_l} + \dots + \\ + c_{lk}(t) (p_m(x) \varphi(x))^{(k)}_{x=x_l} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Собирая коэффициенты при $\varphi^{(k)}(x_l)$ и приравнявая их к нулю, для определения $c_{lk}(t)$ при любом фиксированном l ($l=1, 2, \dots, n$), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$c^{(m)}_{lj}(t) + p_1(x_l) c^{(m-1)}_{lj}(t) + \dots + p_m(x_l) c_{lj}(t) = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} c^{(m)}_{lk}(t) + p_1(x_l) c^{(m-1)}_{lk}(t) + \dots + p_m(x_l) c_{lk}(t) + \\ + \sum_{\alpha=k+1}^j \sum_{\beta=0}^{m-1} \gamma_{lk\alpha\beta} c^{(\beta)}_{l\alpha}(t) = 0, \quad k=j-1, j-2, \dots, 0, \end{aligned} \quad (17)$$

где $\gamma_{lk\alpha\beta}$ — постоянные.

Запишем граничные условия (7) в векторной форме

$$\sum_{p=0}^{m-1} Q_p(x) \frac{d^p u(0, \varphi)}{dt^p} = l(\varphi), \quad (18)$$

где

$$Q_p(x) = \begin{vmatrix} Q_{0p}(x) \\ Q_{1p}(x) \\ \vdots \\ Q_{q-1p}(x) \end{vmatrix}; \quad l = \begin{vmatrix} l_0 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_{q-1} \end{vmatrix}; \quad \frac{Q_p(x) du^p(0, \varphi)}{dt^p} = \begin{vmatrix} \frac{d^p u(0, Q_{0p}(x) \varphi(x))}{dt^p} \\ \frac{d^p u(0, Q_{1p}(x) \varphi(x))}{dt^p} \\ \vdots \\ \frac{d^p u(0, Q_{q-1p}(x) \varphi(x))}{dt^p} \end{vmatrix}. \quad (19)$$

Подставляя $u(t, \varphi)$ из (12) в граничные условия (18) при $l \equiv 0$ и имея в виду равенство (14), получим

$$\sum_{p=0}^{m-1} \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^j c_{lk}^{(p)}(0) (Q_p(x) \varphi(x))_{x=x_l}^{(k)} = 0. \quad (20)$$

Аналогично рассуждениям, приводящим уравнение (15) к системе (16) и (17) получим, что граничное условие (20) эквивалентно условию вида

$$\sum_{p=0}^{m-1} c_{lj}^{(p)}(0) Q_p(x_l) = 0, \quad (21)$$

$$\sum_{p=0}^{m-1} c_{lk}^{(p)}(0) Q_p(x_l) + \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{\alpha=k+1}^j \delta_{lk\alpha p} c_{l\alpha}^{(p)}(0) = 0, \quad k=0, 1, \dots, j-1, \quad (22)$$

где $\delta_{lk\alpha p}$ — некоторые постоянные q -мерные векторы, 0 — нулевой вектор размерности q .

Решим уравнения (16) и (17) с граничными условиями (21), (22) в классе функций, которые вместе с производными растут не быстрее полинома. Обозначим через

$$a_l(t) = (c_{l0}(t), c_{l1}(t), \dots, c_{lj}(t)) \quad (23)$$

решение системы (16), (17).

Характеристическое уравнение, соответствующее (16), имеет корни $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_m(x)$. Согласно условию (5) $\operatorname{Re} \lambda_r(x_l) \leq 0$, $r=1, 2, \dots, q$ и $\operatorname{Re} \lambda_r(x_l) > 0$ при $r=q+1, q+2, \dots, l$. Следовательно уравнение (16) имеет q линейно независимых решений [1]. Подставляя это решение в уравнение (17) и поступая аналогично мы получим, что система (16), (17) имеет $(j+1)q$ линейно независимых решений.

Пусть

$$a_{kl}(t) = (c_{kl0}(t), c_{kl1}(t), \dots, c_{klj}(t)), \quad k=1, 2, \dots, (j+1)q \quad (24)$$

являются линейно независимыми решениями системы (16), (17) в классе функций, растущих не быстрее полинома, тогда общее решение $a_l(t)$ системы (16), (17) в этом классе дается формулой

$$a_l(t) = \sum_{k=1}^{(j+1)q} a_{kl} a_{kl}(t), \quad (25)$$

где a_{kl} — произвольные постоянные.

Подставляя решение $a_l(t)$ в граничные условия (21) и (22) для определения a_{kl} получим систему вида

$$A_l a_l = 0 \quad (l=1, 2, \dots, n), \quad (26)$$

где $a_l(a_{1,l}, a_{2,l}, \dots, a_{q(j+1),l})$; A_l — некоторая постоянная квадратная матрица порядка $q(j+1)$. Следовательно решение однородной задачи (2), (7) в классе M_j привели к решению алгебраических систем уравнений (26). Из условий $\det(Q(x_l) \omega(x_l)) = 0$ ($l=1, 2, \dots, n$) следует, что $\det A_l = 0$. Обозначим через r_l ранг матрицы A_l , решая алгебраическую систему (26) получим, что однородная задача имеет

$\sum_{l=1}^n [q(j+1) - r_l]$ линейно независимых решений.

§ 3. Решение неоднородной задачи в классе M_j

Пусть $\omega_0(t, x), \dots, \omega_{q-1}(t, x)$ — фундаментальная система решений уравнения (9) с начальными условиями

$$\frac{\partial^k \omega_i}{\partial t^k}(0, x) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq i \\ 1, & \text{если } k = i, \end{cases}$$

$i, k = 0, 1, \dots, q-1$, а $\omega(x)$ — матрица, построенная при помощи этой фундаментальной системы согласно (10). В работе [5] показано, что при условии (5) и (6) коэффициенты уравнения (9) аналитичны относительно действительной переменной x и при $|x| \rightarrow \infty$ они вместе с производными растут не быстрее полинома. Так как реальные части корней характеристического уравнения, соответствующего уравнению (9), меньше или равны нулю, то фундаментальная система решений $\omega_0(t, x), \dots, \omega_{q-1}(t, x)$ и их частные производные при $|x| \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty$ стремятся не быстрее полинома [1]. Если выполнено условие (11), то легко убедиться, что функционал

$$u(t, \varphi) = \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} l_k(a_{mk}(x) \omega_m(t, x) \varphi), \quad \varphi \in S, \quad (27)$$

является решением задачи (2), (7), где a_{mk} — элементы матрицы $(Q(x)\omega(x))^{-1}$.

Пусть $\det(Q(x)\omega(x)) \neq 0$ всюду, кроме конечного числа точек $x_1, x_2, \dots, x_n$, тогда $\det(Q(x)\omega(x))$ представляется в виде

$$\det(Q(x)\omega(x)) = (x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_n)^{m_n} R(x), \quad (28)$$

где $R(x)$ — аналитическая функция всюду отличная от 0, а $m_1, m_2, \dots, m_n$ — некоторые натуральные числа. Обозначим через n_0 и m натуральные числа

$$m_0 = \max(m_1, m_2, \dots, m_n), \quad n_0 = m_1 + m_2 + \dots + m_n.$$

Пусть $l_0(\varphi), \dots, l_{q-1}(\varphi)$ принадлежат к классу M_{r_0} . Решение задачи будем искать в классе M_j при $j > r_0 + m_0$.

Рассмотрим следующий функционал

$$u_0(t, \varphi) = \sum_{m=0}^{q-1} \sum_{k=0}^{q-1} l_k(a_{mk}(x) \omega_m(t, x) (\varphi(x) - \alpha(x) p(x))), \quad (29)$$

где $\alpha(x) \in C_0^\infty$ (классу финитных функций) и в окрестности точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ равна 1, а $p(x)$ — полином порядка $n_0 - 1$, удовлетворяющий условиям

$$\frac{d^k p(x_i)}{dx^k} = \varphi^{(k)}(x_i), \quad k = 0, 1, \dots, m_i - 1; \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (30)$$

Полином $p(x)$ определяется единственным образом и имеет вид

$$p(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^{m_i-1} \varphi^{(k)}(x_i) q_{ik}(x), \quad (31)$$

где $q_{ik}(x)$ вполне определенные полиномы порядка $n_0 - 1$, не зависящие от $\varphi(x)$. Функционал $u_0(t, \varphi)$ определен для $\varphi \in S$ и принадлежит классу $M_{r_0+m_0}$.

Пусть S_0 — класс функций $\varphi(x) \in S$, которые в окрестности точек $x_1, x_2, \dots, x_n$ равны 0. Легко проверить, что

$$L(u_0(t, \varphi)) = 0, \quad \varphi \in S_0, \quad (32)$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} Q_{pk}(x) \frac{d^k u_0(0, \varphi)}{dt^k} - l_p(\varphi) = 0, \quad \varphi \in S_0 (p = 0, 1, \dots, q-1). \quad (33)$$

Отсюда следует, что левые части (32) и (33) есть функционалы, сосредоточенные в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$, кроме того они принадлежат классу $M_{r_0+m_0}$, поэтому они представимы в виде

$$L(u_0(t, \varphi)) = \sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}(t) \varphi^{(k)}(x_i), \quad \varphi \in S, \quad (34)$$

$$L_p u_0 - l_p(\varphi) = \sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{i=1}^n \beta_{pik} \varphi^{(k)}(x_i), \quad \varphi \in S \quad (35)$$

($p = 0, 1, \dots, q-1$),

где $\alpha_{ik}(t)$ — некоторые функции от t , β_{pik} — постоянные.

Пусть $\varphi_{ik}(x)$ — функции из S , удовлетворяющие условию (13). Подставляя $\varphi_{ik}(x)$ в равенства (34) и (35) получим

$$\beta_{pik} = v_p(\varphi_{ik}(x)), \quad \alpha_{ik}(t) = L(u_0(t, \varphi_{ik}(x))), \quad (36)$$

где v_p — левая часть равенства (35).

Из (36) следует, что при $t \rightarrow +\infty$ $\alpha_{ik}(t)$ растут вместе с производными не быстрее чем полином.

Делаем замену искомого решения:

$$u(t, \varphi) = u_0(t, \varphi) + v(t, \varphi), \quad (37)$$

где $v(t, \varphi)$ — новый искомый функционал из класса M_j . Подставляя (37) в уравнения (2) и граничные условия (7) и имея в виду соотношения (34) и (35) получим, что

$$L(v(t, \varphi)) = - \sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{i=1}^n \alpha_{ik}(t) \varphi^{(k)}(x_i), \quad \varphi \in S, \quad (38)$$

$$L_p(v(t, \varphi)) = - \sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{i=1}^n \beta_{pik} \varphi^{(k)}(x_i), \quad \varphi \in S, \quad (39)$$

($p = 0, 1, \dots, q-1$).

Из (38) и (39), имея в виду условие (28) следует (см. [5]), что $v(t, \varphi) = 0$, когда $\varphi \in S_0$.

То есть $v(t, \varphi)$ является функционалом из класса M_j , сосредоточенным в точках $x_1, x_2, \dots, x_n$, поэтому он представим в виде

$$v(t, \varphi) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^j c_{lk}(t) \varphi^{(k)}(x_l), \quad \varphi \in S. \quad (40)$$

Аналогично однородному случаю, здесь также можно показать, что $c_{lk}(t)$ вместе со своими производными до j порядка при $t \rightarrow +\infty$ растут не быстрее полинома.

Подставим $v(t, \varphi)$ из соотношения (40) в уравнение (38) и граничные условия (39). Для определения $c_{lk}(t)$ получим следующие уравнения и граничные условия:

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^j (c_{lk}^{(m)}(t) \varphi^{(k)}(x_l) + c_{lk}(t) (p_1(x) \varphi(x))^{(k)} + \dots + c_{lk}(t) (p_m(x) \varphi(x))^{(k)} + \sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{l=1}^n a_{lk}(t) \varphi^{(k)}(x_l) = 0, \quad \varphi \in S, \quad (41)$$

$$\sum_{l=1}^n \sum_{k=0}^j \sum_{j=0}^{m-1} c_{lk}^{(j)}(0) (Q_{kj}(x) \varphi(x))^{(k)} + \sum_{k=0}^{r_0+m_0} \sum_{l=1}^n \beta_{plk} \varphi^{(k)}(x_l) = 0. \quad (42)$$

Аналогично случаю однородной задачи уравнение (41) с граничным условием (42) приводится к решению неоднородных алгебраических систем

$$A_i a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (43)$$

где матрица A_i и искомый вектор те же самые, что и в уравнении (26), а b_i — постоянные векторы размерности $q(j+1)$, компоненты которых имеют следующий вид:

$$b_{lk} = \sum_{p=0}^{q-1} l_p (\varphi_{plk}(x)), \quad (44)$$

где $\varphi_{plk}(x)$ — вполне определенные функции из класса S .

Покажем, что задача (2), (7) всегда разрешима. Как известно для разрешимости уравнения (43), необходимо и достаточно, чтобы вектор b_i удовлетворял условиям

$$\beta_k b_i = 0, \quad k = 1, 2, \dots, R_i, \quad \text{где } R_i = q(j+1) - r_i, \quad (45)$$

$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{R_i}$ — полная система линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения

$$\beta_k A_i = 0, \quad \beta_k = (\beta_{k1}, \beta_{k2}, \dots, \beta_{kq(j+1)}).$$

Согласно (44) условие (45) можно написать в виде

$$\sum_{p=0}^{q-1} l_p (\psi_{plk}(x)) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, R_i), \quad (46)$$

где ψ_{plk} — некоторые функции из класса S , не зависящие от $l_0, l_1, \dots, l_{q-1}$. Условие (46) будет выполнено, если мы покажем, что $\psi_{plk}(x) \equiv 0$.

Возьмем функционалы

$$l(\varphi) = Q(x) \omega(x) C(\varphi) \quad (l(\varphi) = (l_0(\varphi), l_1(\varphi), \dots, l_{q-1}(\varphi))), \quad (47)$$

где $C(\varphi) = (C_0(\varphi), C_1(\varphi), \dots, C_{q-1}(\varphi))$ — произвольные функционалы из класса M_r , $Q(x)$ и $\omega(x)$ — матрицы, рассмотренные ранее. Для вектор-функционала $l(\varphi)$ уравнение (2), (7) имеет решение

$$u(t, \varphi) = \omega_0(t, x) C_0(\varphi) + \dots + \omega_{q-1}(t, x) C_{q-1}(\varphi),$$

потому что функционал $l(\varphi)$ удовлетворяет условию (46). Подставляя $l(\varphi)$ из (47) в (46) получим

$$C_0(f_0(x)) + C_1(f_1(x)) + \dots + C_{q-1}(f_{q-1}(x)) = 0, \quad (48)$$

где $(f_0(x), \dots, f_{q-1}(x)) = \psi_{ik}(x) Q(x) \omega(x)$, а

$$\psi_{ik}(x) = (\psi_{0ik}(x), \psi_{1ik}(x), \dots, \psi_{q-1ik}(x)).$$

Так как $c_0, c_1, \dots, c_{q-1}$ — произвольные функционалы, то из (48) следует, что $f(x) \equiv 0$, т. е.

$$\psi_{ik}(x) Q(x) \omega(x) \equiv 0, \quad (49)$$

но так как $\det(Q(x) \omega(x)) \neq 0$ всюду, кроме конечного числа точек и $\psi_{ik}(x) \in S$, то $\psi_{ik}(x) \equiv 0$.

Следовательно алгебраическая система (43) также всегда разрешима. Решая ее мы построим все решения неоднородной задачи (2), (7)

Получаем следующую теорему.

Теорема 1. Если выполнено условие (28) и $l_0, l_1, \dots, l_{q-1} \in M_r$, то неоднородная задача (2), (7) в классе M_j при $j \geq r_0 + m_0$ всегда имеет решение.

Замечание. Если дополнительно требовать, чтобы $\operatorname{Re} \lambda_r(x) > \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) для $r = q+1, \dots, m$, то в работе [1] доказано, что уравнение (2) с правой частью $f(t, u)$ из класса M_r имеет частное решение из этого класса. Используя это частное решение можно поставить задачу для неоднородного уравнения привести к рассмотренной задаче для однородного уравнения.

В заключение выражаю благодарность профессору Н. Е. Товмашану, под руководством которого выполнена данная работа.

Курский политехнический институт

Поступила 19.XII.1980

Յ. Մ. ԿՈՇԵԼԻՍԿԱ. Եզրային խնդիր m -րդ կարգի սովորական դիֆերենցիալ հավասարման համար ընդհանրացված ֆունկցիաների դասում (ամփոփում)

Դիտարկվում է

$$L(u) \equiv \frac{d^m u}{dt^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + p_m(x) u = 0$$

հավասարումը հետևյալ եզրային պայմաններով

$$L_k(u) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} Q_{kj}(x) \frac{d^j u(0, \varphi)}{dt^j} = l_k(\varphi), \quad k = 0, 1, \dots, q-1:$$

Աշխատանքում նշվում են պայմաններ $Q_{kj}(x)$ բազմանդամների վրա, որոնց զեպքում համասեռ խնդիր ունի վերջավոր թվով գծերն անկախ լուծումներ, իսկ ոչ համասեռ խնդիրը միշտ լուծելի է: Աշխատանքում տրվում է նշված խնդրի լուծման եղանակը:

T. M. KOSHELEVA. *A boundary problem for ordinary differential equations of m -th order in the class of generalized function (summary)*

We consider the equation

$$L(u) = \frac{d^m u}{dt^m} + p_1(x) \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + p_m(x) u = 0$$

with boundary conditions

$$L_k(u) \equiv \sum_{j=0}^{m-1} Q_{kj}(x) \frac{d^j u(0, \varphi)}{dt^j} = l_k(\varphi), \quad k=0, 1, \dots, q-1.$$

The paper gives conditions on polynoms $Q_{kj}(x)$ under which the homogeneous problem has a finite number of linear independent solutions and the inhomogeneous problem can always be solved.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Е. Шилов. Математический анализ. Второй специальный курс, М., «Наука», 1965.
2. Г. В. Дикополов, Г. Е. Шилов. О корректных краевых задачах для уравнения в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 1960, 369—380.
3. В. П. Паламодов. О корректных краевых задачах для уравнений в частных производных в полупространстве, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, 1960, 381—386.
4. Г. В. Дикополов. О краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Матем. сб., 59 (101), 1962, 215—228.
5. А. А. Павлов. Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в полупространстве, Матем. сб., 103 (145), № 3 (7), 1977, 367—391.
6. Л. Хёрмандер. Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.