ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 6, 1982 Математика

УДК 517.988

А. Б. НЕРСЕСЯН

СТРУКТУРА РЕЗОЛЬВЕНТ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Введение

Рассмотрим интегральный оператор Фредгольма второго рода

$$(\mathrm{I}-\mathrm{K})\, y = y(x) - \int_D K(x, t)\, y(t)\, dt, \quad x \in D \tag{1}$$

где D — область из R^n (необязательно связная), $dt\ (= dt_1 \cdots dt_n)$ — лебегова мера, $K(x, t)$ — комплекснозначная $(N\times N)$-матрица $(N > 1,$ $(x, t) \in \Omega = D\times D)$, а в качестве y могут фигурировать $(N \times \alpha)$-матрицы $(\alpha \geqslant 1)$. Условия на ядро K и, следовательно, пространство, на котором определен оператор K, пока уточнять не будем. Если существует оператор $\mathrm{I}+\mathrm{R}$ с ядром R, обратный справа к $\mathrm{I}-\mathrm{K}$ $((\mathrm{I}-\mathrm{K})\times (\mathrm{I}+\mathrm{R}) = \mathrm{I})$, то

$$R(x, t) = K(x, t) + \int_D K(x, s)\, R(s, t)\, ds. \tag{2}$$

Соответственно, при обратимости слева $((\mathrm{I}+\mathrm{R})(\mathrm{I}-\mathrm{K}) = \mathrm{I})$

$$R(x, t) = K(x, t) + \int_D R(x, s)\, K(s, t)\, ds. \tag{2'}$$

В дальнейшем будем считать оператор $\mathrm{I}-\mathrm{K}$ обратимым, т. е. предполагать, что существует ядро $R(x, t)$ с соответствующими свойствами, удовлетворяющее интегральным уравнениям (2), (2′).

Таким образом, чтобы построить оператор $\mathrm{I}+\mathrm{R} = (\mathrm{I}-\mathrm{K})^{-1}$ надо, вообще говоря, решать уравнение (2) при *любом значении* параметра $t \in D$ (или (2′)—при всех $x \in D$). При наличии дополнительной информации о ядре K эта процедура в некоторых случаях значительно упрощается. Так, в случае вырожденного ядра $K(x, t) = \alpha(x)\,\beta(t)$ (α и β — матрицы размеров $(N \times p)$ и $(p \times N)$ соответственно, $p \geqslant 1$) построение резольвентного ядра сводится к чисто алгебраической задаче. Другой пример—это класс разностных ядер, представляющий большой теоретический и практический интерес ($n = 1$, $D = (a, b)$, $K = K(x-t)$). Хорошо известно (см., например, [1], § 5), что в случае оператора в полных свертках ($a = -\infty$, $b = +\infty$, $K = K(x-t)$, $K(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$) оператор $\mathrm{I}-\mathrm{K}$ ограничен в L_1, а обратный существует при* $\det(I-\hat{K}(\xi))\neq 0$ ($\hat{K}(\xi)$ — преобразование Фурье $K(x)$) и также является оператором свертки ($R=R(x-t)$). В этом случае для восстановления ядра R достаточно решить уравнение (2) при *некотором* зафиксированном значении t ($\in R^1$) (или (2') — при некотором зафиксированном x).

В случае конечного отрезка $(0, \tau)$ и $K=K(|x-t|)$ В. В. Соболев ([2], 1958) обнаружил следующую замечательную формулу**

$$(\partial_x+\partial_t)\,R(x, t)=R(0, x)\,R(0, t)-R(0, \tau-x)\,R(0, \tau-t). \qquad (3)$$

В том же 1958 г. М. Г. Крейн и И. Ц. Гохберг построили общую теорию уравнений (и систем) Винера-Хопфа ($n=1$, $D=(0, +\infty)$, $K=K(x-t)$, $K(x)\in L_1$) при условии нётеровости: $\det(I-\hat{K}(\xi))\neq 0$, $\xi\in R^1$. В этом случае (см. [3, 4]) оператор $\mathbf{I}-\mathbf{K}$ обратим при условии $\operatorname{ind}\det(I-\hat{K}(\xi))=0$, а для резольвентного ядра R справедлива формула

$$R(x, t)=R(x-t, 0)+R(0, t-x)+\int\limits_0^{\min(t, x)} R(x-s, 0)\,R(0, t-s)\,ds, \qquad (4).$$

где принято $R(x, 0)=R(0, x)\equiv 0$ при $x<0$.

Первый результат указанного типа принадлежит, по-видимому, Г. Плачеку, получившему еще в 1945 г. формулу (4) в случае известного в теории переноса излучения ядра $K=E_1|x-t|$ (см. [24], § 6.7).

Результаты подобного типа содержатся и в построенной в 1972—80гг Л. А. Сахновичем теории обращения самых общих операторов с разностным ядром (см. [10]).

В дискретном случае, т. е. когда речь идет об обращении неособой тёплицевой матрицы $T=\|t_{i-j}\|$, $T^{-1}=R=\|r_{ij}\|$, ($i, j=0, 1, \cdots, m$), В. Тренч в 1964 г. предложил следующий весьма эффективный алгорифм (при $r_{00}\neq 0$, $t_k=t_{-k}$, $k=1, 2, \cdots, m$)

$$r_{i+1, j+1}-r_{i, j}=r_{00}^{-1}\,[r_{0, i+1}\,r_{0, j+1}-r_{0, m-i}\,r_{0, m-j}],$$
$$i, j=0, 1, 2, \cdots, m-1. \qquad (5)$$

Нетрудно усмотреть, что формула (5) является дискретным аналогом формулы В. В. Соболева (3).

Соотношения (3)—(5) позволяют восстановить обратный оператор $(\mathbf{I}-\mathbf{K})^{-1}$ (матрицу T^{-1}) по значениям резольвентного ядра (матрицы) на границе области его определения (или на ее части). В дальнейшем формулы (3), (4) были обобщены на случай более общих тёплицевых операторов, а в случае тёплицевых и ганкелевых матриц были получены и некоторые новые алгорифмы обращения (см. [6—9]).

В недавней серии работ Т. Кайлата и М. Морфа с соавторами ([11—13]) введены и изучены новые классы матриц, обобщающих

---

* Через I обозначена единичная матрица.

** Здесь и далее $\partial_x=\partial/\partial x$.

тёплицевы, а в случае оператора (1) на конечном отрезке — симметричные ядра, определяемые уравнением

$$(\partial_x + \partial_t) K(x, t) = d(x) \Lambda d'(t), \quad 0 \leqslant x, t \leqslant \tau < +\infty, \tag{6}$$

где Λ — постоянная $(\alpha \times \alpha)$-матрица, $\alpha > 1$. d — $(N \times \alpha)$-матрица, d' — транспонированная к ней. Этот подход оказался весьма удачным, так как для восстановления резольвентного ядра (которое тоже, оказывается, удовлетворяет уравнению вида (6)) и в этом случае надо предварительно решить лишь *конечное число* уравнений вида $(\mathrm{I} - \mathbf{K})\, y = f$ (f — заданный вектор-столбец, y — искомый). В указанный класс входят многие представляющие большой интерес операторы нетёплицева типа: например, композиции двух тёплицевых или даже ганкелевых операторов (см. ниже пример 5 § 1).

В данной работе вводятся и изучаются более общие интегральные операторы, ядра которых удовлетворяют определенным дифференциальным уравнениям*. Результаты, относящиеся к конкретным классам операторов, допускающим непосредственное описание, выделены в примерах.

§ 1. Интегральный оператор на интервале

1°. Пусть $n=1$, $D=(a, b)$ $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$, $\Omega = (a, b) \times \times (a, b)$. Введем в рассмотрение формально сопряженные операторы L и $L^{\#}$.

$$Lf = \sum_{k=0}^{m} A_k(x)\, \partial_x^k f, \quad L^{\#} f = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k\, \partial_x^k (f A_k(x)), \tag{7}$$

где A_k $(k=0, 1, \cdots, m)$ и f — $(N \times N)$ матрицы из $C^m(a, b)$.

Теорема 1. *Пусть* $-\infty < a < b < +\infty$, $K \in C^m(\Omega) \cap C^{m-1}(\overline{\Omega})$**,

$$\mathrm{L}K \overset{\mathrm{def}}{=} L_x K(x, t) - L_t^{\#} K(x, t) = p(x)\, q(t), \quad (x, t) \in \Omega, \tag{8}$$

где $p(x)$, $q(x)$ — *кусочно-гладкие матрицы размеров* $(N \times \alpha)$ *и* $(\alpha \times N)$ *соответственно* $(\alpha \geqslant 1)$. *Тогда*

$$\mathrm{L}R = \left\{ \sum_{l=1}^{m} \sum_{j=1}^{l} (-1)^{l+j+1}\, \partial_s^{l-j} [R(x, s)\, A_l(s)]\, \partial_s^{j-1} R(s, t) \right\}_{s=a}^{s=b} + \\ + P(x)\, Q(t), \tag{8'}$$

---

* В работе [11] утверждается, что предлагаемый авторами подход позволяет допустить в (6) и операторы $(\partial_x + \partial_t)^n$ $(n > 2)$, однако никаких разъяснений не дано, а сами эти операторы выпадают из схемы, предлагаемой ниже. Там же содержится замечание о ганкелевом ядре $K = K(x+t)$, также оставленное без каких-либо разъяснений, в то время как выясняется (см. ниже, примеры 2, 3 и 5), что в этом случае возникает интересная и, во многих отношениях, новая ситуация.

** Нижний индекс при операторе здесь и далее указывает переменную, по которой он действует.

где матрицы P и Q определяются из уравнений $(\mathrm{I}-\mathrm{K}_x)P=p(x)$ *и* $(\mathrm{I}-\mathrm{K}_t^*)Q=q(t)^*$.

■ Доказательство. Применим к обеим частям уравнения (2) оператор L_x и воспользуемся соотношением (8)

$$L_x R(x, t)=L_t^{\#} K(x, t)+p(x)\left\{q(t)+\int_a^b q(s) R(s, t)\, ds\right\}+\int_a^b L_s^{\#} K(x, s) R(s, t)\, ds=$$

$$=L_t^{\#} K(x, t)+p(x)\left\{q(t)+\int_a^b q(s) R(s, t)\, ds\right\}+\sum_{l=0}^{m}(-1)^l \int_a^b \partial_s^l (K(x, s) A_l(s)) R(s, t)\, ds.$$

Проведя в последних интегралах i-кратное интегрирование по частям, получим, с учетом (2), (2′)

$$\mathrm{L} R(x, t)=p(x)(\mathrm{I}+\mathrm{R}_t^*) q(t)+\int_a^b K(x, s)\, \mathrm{L}R(s, t)\, ds+$$

$$+\left\{\sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{l}(-1)^{l+j+1}\, \partial_s^{l-j}[K(x, s) A_l(s)]\, \partial_s^{j-1} R(s, t)\right\}_{s=a}^{s=b}, \tag{9}$$

откуда, снова воспользовавшись соотношением (2′), придем к формуле (8′). ■

В случае однородного ($p=q\equiv 0$) уравнения первого порядка

$$\mathrm{L}K\overset{\mathrm{def}}{=}A_1(x)\,\partial_x K+\partial_t(KA_1(t))+A_0(x) K-KA_0(t)=0 \tag{10}$$

получаем следующее обобщение формулы В. В. Соболева (3) (а также формул И. Ц. Гохберга — А. А. Семенцула — Г. Хайнига [6, 7], см. ниже, замечание 1).

$$\mathrm{L}R=R(x, a) A_1(a) R(a, t)-R(x, b) A_1(b) R(b, t). \tag{10′}$$

2°. Остановимся на некоторых частных случаях.

◀ Пример 1. Пусть в (10) $A_0=0$ и A_1 — постоянная диагональная матрица $A_1=\mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_N\}$, $\lambda_i\in R^1$ $(i=1, 2, \cdots, N)$. Тогда нетрудно убедиться, что

$$K(x, t)=\|K_{ij}(\lambda_j x-\lambda_i t)\|,\quad i, j=1, 2, \cdots, N, \tag{11}$$

где K_{ij} — заданные комплекснозначные функции одного переменного. Таким образом, лишь диагональные элементы матрицы $K(x, t)$, вооб-

---

* Здесь и далее $(\mathrm{I}-\mathrm{K}_x^*)y=y(x)-\int_D y(s) K(s, x)\, ds$.

ще говоря, зависят от разности аргументов. Формула (10′) в данном случае имеет очень простой вид и матрица R восстанавливается в явной интегральной форме по своим значениям на границе $\partial\Omega$.

Произведем теперь в компонентах $y_i(x)$ вектор-функции y замену переменной $\xi=\lambda_i x$ (в предположении, что $\lambda_i \neq 0$, $i=1, 2, \cdots, N$). Тогда оператор (1) перейдет в оператор $\mathbf{I}-\mathbf{M}$, действующий на вектор-функции $z(x)$ с компонентами $z_i(x)$ $(z_i:(a_i, b_i)\to \mathbf{C}$, $a_i = a|\lambda_i|^{-1}$, $b_i=b|\lambda_i|^{-1}$, $i=1, 2, \cdots, N)$ по формуле

$$[(\mathbf{I}-\mathbf{M})z]_i = z_i(x) - \sum_{j=1}^{N}\int_{a_j}^{b_j} M_{ij}(x-t)\, z_j(t)\, dt, \tag{12}$$

где $M_{ij}(x)=|\lambda_i|^{-1} K(\lambda_i\lambda_j x)$. Из этой формулы следует, что оператор (1) с ядром (11), — если хотя бы одно λ_i $(i=1, 2, \cdots, N)$ не равно по модулю единице, — не сводится к оператору Фредгольма с разностно-суммарным ядром (см. также ниже, примеры 2, 3, 7).

В случае комплексных значений λ_i соответствующие элементы матрицы (11) можно выразить через аналитические функции. Учитывая это обстоительство, можно утверждать, что в данном примере разобран общий случай, когда в (10) $A_0=0$, а постоянная матрица A_1 диагонализируема, так как оператор (1), очевидно, определен с точностью до подобных ядер (точнее, всегда можно перейти к ядру $K_1=C(x)\,K(x, t)\,C^{-1}(t)$, $\det C(x)\neq 0$). С этой точки зрения, следующий пример является частным случаем уже разобранного, однако, он заслуживает отдельного рассмотрения.▶

◀ Пример 2. (тёплицево-ганкелев оператор, первый способ обращения). Пусть $A_1=\|a_{ij}\|$, $(i, j=1, 2)$ — блочная матрица размеров $(2p\times 2p)$ $(p\geqslant 1)$ с квадратными блоками $a_{11}=a_{22}=0$ $a_{12}=a_{21}=I$, $A_0=0$, p, $q=0$. Тогда ядро K имеет вид

$$K(x, t)=\begin{pmatrix} f(x-t)+g(x+t) & \varphi(x-t)+\psi(x+t) \\ \varphi(x-t)-\psi(x+t) & f(x-t)-g(x+t)\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Оператор $\mathbf{L}$ в этом случае гиперболический, с характеристиками $x\pm t=\mathrm{const}$, и не представляет труда по формуле (10′) определить значения резольвентного ядра $R(x, t)$ при $(x, t)\in\Omega$ в явном виде.

Остановимся на частном случае $\varphi=\psi\equiv 0$, когда матрица (13) диагональна и поэтому речь идет, по существу, о построении резольвент двух интегральных операторов $\mathbf{I}-\mathbf{K}$ и $\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{K}}$ с $(p\times p)$-ядрами $K(x, t)=f(x-t)+g(x+t)$ и $\tilde{K}(x, t)=f(x-t)-g(x+t)$. В этом случае мы приходим к следующему интересному алгорифму обращения оператора с ядром K (назовем его тёплицево-ганкелевым оператором): оператор $\mathbf{I}-\mathbf{K}$ рассматривается *в паре* со вспомогательным оператором $\mathbf{I}-\tilde{\mathbf{K}}$ и,— если оба эти оператора обратимы, а R и $\tilde{R}$ соответственно их резольвентные ядра,— из (10′) получаем

$$(\partial_t \pm \partial_x)(R \pm \widetilde{R}) + \{R(x, s)\, \widetilde{R}(s, t) \pm \widetilde{R}(x, s)\; R(s, t)\}_{s=a}^{s=b} = 0. \qquad (14)$$

Эту систему можно решить несколькими способами, соответственно выбору начальных данных на той или иной стороне квадрата $(a, b) \times (a, b)$. Приведем один из них.

Обозначим $U_{\pm} = R \pm \widetilde{R}$ и запишем систему (14) в виде $(\partial_t \pm \pm \partial_x)\, U_{\pm} = F_{\pm}(x, t)$. Тогда

$$U_+(x, t) = U_+(a + x - t, a) + U_+(a, a + t - x) + \\ + \int\limits_a^{\min(x,\, t)} F_+(a + x - s,\, a + t - s)\, ds, \qquad (15)$$

$$U_-(x, t) = U_-(b, x + t - b) + U_-(x + t - a, a) + \\ + \int\limits_a^{\min(t,\, a+b-x)} F_-(x + s - a,\, t - s + a)\, ds,$$

где принято $U_+(a-x, a) = U_+(a, b+x) = U_-(b, a-x) = U_-(b+x, a) \equiv 0$ при $x > 0$. В случае тёплицева оператора ($g(x) \equiv 0$) приходим к формулам работы [7]. В данном случае, как и в [7], приходим к выводу (подставив в (15) $(x, t) \in \partial\Omega$), что из восьми функций $R(x, s)$, $R(s, t)$, $\widetilde{R}(x, s)$, $\widetilde{R}(s, t)$ $(s = a, b)$ только четыре независимы. Отметим следующие два частных случая, когда ядро скалярно ($N = 1$) и эта зависимость явная (для простоты положим $a = 0$, $b = \tau < +\infty$, $0 < x \leqslant \tau$)

$$g(x+\tau) = g(\tau - x) \Rightarrow R(x, \tau) = R(0, \tau - x),\ \widetilde{R}(x, \tau) = \widetilde{R}(0, \tau - x), \qquad (16)$$

$$g(\tau + x) = -g(\tau - x) \Rightarrow R(x, \tau) = \widetilde{R}(0, \tau - x),\ \widetilde{R}(x, \tau) = R(0, \tau - x).$$

В этих случаях соотношения (14) являются полным аналогом фурмулы В. В. Соболева—И. Ц. Гохберга—А. А. Семенцула [2, 6]. ▶

Рассмотренный тёплицево-ганкелев оператор ранее изучался на неограниченном интервале, в скалярном случае, с точки зрения его нормальной разрешимости (см. [15] и [1], гл. II, §§ 7.5, 26.2). Небезынтересно отметить, что при сведении этого оператора к сингулярному интегральному оператору с карлемановским сдвигом вспомогательный оператор сводится к известному „сопутствующему" оператору (см. [25], гл. 11).

◀ Пример 3 (тёплицево-ганкелев оператор, второй способ обращения). Поскольку матрица-функция $K(x, t) = f(x - t) + g(x + t)$ удовлетворяет волновому уравнению $(\partial_x^2 - \partial_t^2)\; K = 0$, то по (8′), при $L_x = \partial_x^2$ и $p = q = 0$ приходим к соотношению

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)\, R(x, t) = \{(\partial_s R(x, s))\, R(s, t) - R(x, s)\, \partial_s R(s, t)\}_{s=a}^{s=b}. \qquad (17)$$

Это уравнение, как и систему (14), можно решить несколькими способами. Обозначив правую часть (17) через $F(x, t)$ и применив известную формулу Даламбера в треугольнике $0 \leqslant t \leqslant \min(x, b-x)$ (при $a=0$), получим

$$2R(x, t) = R(x-t, 0) + R(x+t, 0) + \int_{x-t}^{x+t} \partial_s R(u, s)|_{s=0}\, du + \int_0^t \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} F(v, \tau)\, du\, d\tau. \qquad (17')$$

Аналогичные формулы выписываются и в остальных трех треугольниках, составляющих квадрат $(0, b) \times (0, b)$. Учитывая условие совпадения этих формул на диагоналях квадрата, приходим и выводу, что из восьми функций $R(x, s)$, $R(s, t)$, $\partial_s R(x, s)$, $\partial_s R(s, t)$ $(s = 0, b)$ лишь четыре независимы (см. также предыдущий пример).

Интересно сопоставить формулу (17′) с формулой (12) работы И. И. Кальмушевского [27], в которой для обращения скалярного теплицево-ганкелева оператора S более общего вида требуется определить значения S^{-1} на пяти функциях. ▶

◀ Пример 4 (оператор с гармоническим ядром). Если в операторе (8) положить $L = A\partial_x^2$, $p = q = 0$, где $A = \|a_{ij}\|$ — блочная $(2p \times 2p)$-матрица из примера 2 и, наконец, положить $K = \operatorname{diag}\{K(x, t), \alpha + \beta x + \gamma t - K(x, t)\}$ $(\alpha, \beta, \gamma$ — постоянные матрицы), то нетрудно проверить, что уравнение (8) удовлетворяется, если $(\partial_x^2 + \partial_t^2) \times$ $\times K(x, t) = 0$, т. е. K — (комплекснозначная) гармоническая функция. В данном случае вспомогательным ядром, по аналогии с примером 2, будет ядро $\tilde{K} = \alpha + \beta x + \gamma t - K$. Резольвентные ядра R и $\tilde{R}$ (при условии обратимости операторов $\mathrm{I} - \mathrm{K}$ и $\mathrm{I} - \tilde{\mathrm{K}}$) определяются из системы

$$(\partial_x^2 \pm \partial_t^2)(R \mp \tilde{R}) = \{(\partial_s \tilde{R}(x, s))\, R(s, t) -$$
$$- \tilde{R}(x, s)\, \partial_s R(s, t) \mp [(\partial_s R(x, s))\, \tilde{R}(s, t) - R(x, s)\, \partial_s \tilde{R}(s, t)]\}_{s=a}^{s=b}. \qquad (18)$$

Таким образом, определив значения ядер $R(x, s)$, $R(s, t)$, $\tilde{R}(x, s)$, $\tilde{R}(s, t)$, а также их нормальных производных $\partial_s R(x, s)$, $\partial_s R(s, t)$, $\partial_s \tilde{R}(x, s)$ и $\partial_s \tilde{R}(s, t)$ на границе $\partial\Omega$ (т. е. при $s = a, b$), мы затем должны решить одно волновое уравнение и одно уравнение Пуассона. Так же, как и в примерах 2 и 3, на самом деле и здесь только 8 из указанных 16-ти функций независимы. Но, с другой стороны, в данном случае это избыточная информация весьма полезна, так как при решении уравнения Пуассона для функции $R - \tilde{R}$ мы можем воспользоваться как самой функцией, так и ее нормальной производной на границе и, следовательно, выписать,— на основе известной формулы Грина,— явное решение.

Другой способ обращения оператора с гармоническим ядром получим, отправляясь от уравнения $\mathrm{L}K = (\partial_x^4 - \partial_t^4)K = 0$ (сравнить с примерами 2 и 3). ▶

◀ Пример 5 (композиция простых ядер). Пусть

$$K_1 = K_1(x + \alpha t),\ K_2 = K_2(\beta x + t)\ (0 \neq \alpha,\ \beta \in R^1;\ K_1,\ K_2 \in C^1).$$

Тогда для ядра K композиции этих операторов $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ справедлива формула

$$(\alpha\partial_x + \beta\partial_t)\, K = K_1(x + \alpha b)\, K_2(\beta b + t) - K_1(x + \alpha a)\, K_2(\beta a + t).$$

Таким образом, при $\alpha = \beta$ оператор $\mathbf{K}$ „почти тёплицев" и удовлетворяет уравнению (6) типа (8), откуда следует формула (8′). Этот подход продемонстрирован в работе [11].

При $\alpha = -\beta$ („почти ганкелево" ядро K) проходит соответствующая модификация примеров 2 и 3. Композиция $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ операторов с гармоническими ядрами ($\Delta K_1 = \Delta K_2 = 0$) является „почти тёплицево—ганкелевым" оператором, поскольку

$$(\partial_x^2 - \partial_t^2)\, K(x, t) = \{(\partial_s K_1(x, s))\, K_2(s, t) -$$
$$- K_1(x, s)\, \partial_s K_2(s, t)\}_{s=a}^{s=b}$$

и, таким образом, здесь проходит схема примеров 2, 3. ▶

Приведенные примеры могут создать впечатление, что уравнение (8) содержит лишь гиперболические и эллиптические операторы. На самом деле оператор $\mathbf{L}$ может принадлежать практически всем известным смешанно-составным типам.

Рассмотрим, например, случай оператора L второго порядка при $\det A_2(x) = 0$ (в отдельных точках или, при $N > 2$, во всей области). Уже в скалярном случае ($N=1$), если $A_2(x) \geqslant 0$ и обращается в нуль лишь в отдельных точках отрезка $[a, b]$, то (8′) является вырождающимся гиперболическим уравнением и для него надо решить задачу Коши. В случае, когда $A(x)$ меняет знак (также обращаясь в нуль лишь в отдельных точках отрезка $[a, b]$), возникает комбинация задач Коши для вырождающихся гиперболических уравнений (в тех частях квадрата $\Omega = (a, b) \times (a, b)$, где $A_2(x)\, A_2(t) > 0$) и краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений (где $A_2(x) \times A_2(t) < 0$), причем в последнем случае часть границы может быть освобождена от краевых условий.

Общая теория упомянутых задач еще далека от завершения, но в ряде случаев подобные задачи хорошо исследованы (см., например, [19—21]). Добавим также, что в случае, когда $A_2(x)$ действительно и обращается в нуль на отдельных отрезках, в тех прямоугольниках, где $A_2(x)\, A_2(t) \equiv 0$, $A_2^2(x) + A_2^2(t) \neq 0$, могут возникнуть смешанные задачи для параболических уравнений. В случае комплекснозначности коэффициента $A_2(x)$ возникает более богатый набор задач.

Рассмотрим теперь частный случай постоянной, но вырождающейся матрицы A_2.

◀ Пример 6. Пусть $K = \|K_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2)$ — блочная $(2p \times 2p)$-матрица, удовлетворяющая следующему уравнению типа (8):

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \partial_x^2 K - \partial_t^2 K \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \partial_x K + \partial_t K \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = 0. \qquad (19)$$

Это уравнение эквивалентно системе

$$\partial_x^2 K_{ii} - \partial_t^2 K_{ii} = 0 \ (i = 1, 2), \quad \partial_x^2 K_{12} + \partial_t K_{12} = 0, \quad \partial_x K_{21} - \partial_t^2 K_{21} = 0. \tag{19'}$$

Таким образом, компоненты-блоки K_{11} и K_{22} матрицы K тёплицево-ганкелевы, а K_{12} и K_{21} удовлетворяют уравнениям теплопроводности. Для нахождения резольвенты R, имеющей такой же блочный вид $R = \|r_{ij}\|$ $(i, j = 1, 2)$, надо сначала из уравнений (2) и (2′) найти значения $R(x, s)$, $R(s, t)$, $\partial_s R(x, s)$, $\partial_s R(s, t)$ при $s = a, b$, а затем решить для определения r_{11} и r_{22} по четыре (см. пример 3) задачи Коши для неоднородного волнового уравнения и две смешанные задачи для неоднородного уравнения теплопроводности (для определения r_{12} и r_{21}). ▶

§ 2. Замечания

Теорема 1 и иллюстрирующие ее примеры позволяют сделать вывод, что формула (8′) характеризует структуру резольвентных ядер достаточно широких классов интегральных операторов. Специфика полученных результатов приводит к следующим выводам.

Замечание 1. Формула (8′), вообще говоря, может остаться справедливой и в случае неограниченного интервала (a, b). Как правило, в этом случае в ней надо учитывать лишь конечные значения a или b. В частности, при $a = -\infty$, $b = +\infty$ и $p(x) = q(x) \equiv 0$ ядро K и резольвентное ядро R принадлежат линейному многообразию решений одного и того же уравнения (8) (аналогично уравнению в полных свертках, см. введение).

С другой стороны, класс изучаемых операторов можно расширить за счет рассмотрения обобщенных решений уравнения (8). Можно, наконец, ослабить ограничения и на коэффициенты оператора L. Поскольку уравнение (8), как было указано выше, в общем случае однозначно не классифицируется, каждый отдельный случай требует особого обоснования формулы (8′) (или ее аналога). В качестве метода обобщения формулы (8′) можно принять способ замыкания в соответствующей метрике линейного многообразия решений уравнения (8) (если прямое повторение хода доказательства теоремы 1 не проходит).

Сказанное поясним на примерах § 1. В примере 1 (при $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, 2, \cdots, N$) и в примере 2, исходя из представлений (11) и (13) и из интегральной формы соотношения (8′) (см. также (15)) приходим к выводу, что интервал (a, b) можно считать любым, а функции $K_{ij}(x)$, $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — лишь абсолютно интегрируемыми в областях их естественного определения. Тогда соответствующий оператор ограничен в $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$ (так же, как и в некоторых других пространствах, см. [3, 4]) и мы приходим к обобщениям результатов работ [3, 4, 6, 7, 11]. В частности, в случае матричного тёплицево-ганкелева оператора $\mathbf{K}$ на полуоси $(0, +\infty)$ с ядром $K = f(x - t) + g(x + t)$ $(0 \leqslant x, t < +\infty)$ при $f \in L_1(-\infty, +\infty)$, $g \in L_1(0, +\infty)$ придем к обобщению формулы (4) Крейна-Гохберга [3, 4], если в (15) положим $a = 0$, $b = +\infty$, $U_-(b, x + t - b) \equiv 0$, $\min(t, a + b - x) = t$ и

$$F_c(x, t) = \tilde{R}(x, 0)\, R(0, t) \pm R(x, 0)\, \tilde{R}(0, t). \tag{20}$$

Другую формулу для определения $R(x, t)$ в этом случае (уже без вспомогательного оператора $\tilde{K}$) можно выписать на основе формулы (17′), но уже при условии дифференцируемости f и g. Вместе с тем заметим, что в случае гипоэллиптичности оператора L невозможно выйти из класса бесконечно-дифференцируемых ядер (см. пример 4).

Замечание 2. Формула (10) даже в скалярном ($N=1$) случае представляет определенный интерес. Прежде всего отметим, что при $A_1(x) \neq 0$ ($a \leqslant x \leqslant b$) ядра, удовлетворяющие уравнению (10), соответствуют всевозможным операторам $(\mathrm{I}-\mathrm{K})\,y$, получаемым из оператора с разностным ядром $K = K(x-t)$ ($A_1(x) \equiv 1$, $A_0(x) \equiv 0$) невырожденной заменой x с одновременной линейной заменой функции y. Однако, если функция $A_1(x)$ меняет знак или $A_0(x)$ имеет сингулярности, соответствующий интегральный оператор K уже, вообще говоря, не сводится к оператору с разностным ядром и в этих случаях формула (10′) — новая.

Поясним это на простых частных случаях.

◀ Пример 7. (Оператор Л. Г. Михайлова, см. [1], гл. II, § 5.7). Пусть $a=-1$, $0 < b \leqslant +\infty$, $A_1(x) = xI$, $A_0(x) \equiv 0$. Тогда $K = t^{-1} K(x/t)$ и при $K(x) \in L_1(-\infty, +\infty)$ оператор K ограничен в пространстве функций y, интегрируемых с весом x^{-1} ($y(x)\, x^{-1} \in L(-1, +\infty)$). Экспоненциальная замена переменной сводит уравнение $(\mathrm{I}-\mathrm{K})\,y = f$ к системе

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^{\infty} K_1(x-t)\, y_1(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\log b} K_2(x-t)\, y_2(t)\, dt + f_1(x), \\ y_2(x) &= \int_0^{\infty} K_2(x-t)\, y_1(t)\, dt + \int_{-\infty}^{\log b} K_1(x-t)\, y_2(t)\, dt + f_2(x), \end{aligned} \tag{21}$$

где функция $y_1(x)$ определена на $x \in (0, +\infty)$, а $y_2(x)$ — на $(-\infty, \log b)$, $\log +\infty = +\infty$. Система эта вполне аналогична системе (12) в случае неограниченных интервалов (a_k, b_k) ($k=1, 2$), и соответствующие формулы для резольвентного ядра R сохраняют свою силу (см. замечание 1) и для ядра оператора (21). Система (21) не сводится к системе Винера-Хопфа. ▶

К ганкелевой системе типа (21) придем после той же замены переменной, рассмотрев ядро $K = t^{-1} K(xt)$ ($a=-1$, $b=+\infty$). Для построения резольвентного ядра R, как в примере 2, нужно привлечь вспомогательное ядро $\tilde{K} = t^{-1}(\mathrm{const} - K(xt))$. Отметим еще одно интересное ядро подобного типа: $K = x\, K(x^2+t^2)$ ($a=-1$, $b \leqslant +\infty$), $\tilde{K} = x(\mathrm{const} - K(x^2+t^2))$.

Замечание 3. Специфика уравнений (8), (8′) выявляется уже в простейшем частном случае, когда матрицы A_k ($k=0, 1, \cdots, m$) постоянны. Так, при $a=-\infty$, $b=+\infty$ формальное применение преобразования Фурье к уравнению (8) приводит к известному матричному уравнению

$$MX+XM^{*}=S,\quad \xi,\ \eta\in R^{1},\tag{22}$$

где

$$S=\hat{p}(\xi)\hat{q}(\eta),\ X=\hat{K}(\xi,\ \eta),\ M=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}A_{k}(i\xi)^{k},$$

$$M^{*}=\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}A_{k}(i\eta)^{k}.$$

Таким образом, при $N\geqslant 2$ алгебраические свойства матриц A_k $(k=0,1,\cdots,m)$ играют решающую роль в описании пространства решений уравнения (8) (см. [28], гл. VIII, § 3). Примеры 1—7 хорошо иллюстрируют эту ситуацию. Однако в этих примерах матрицы M и M^{*} диагонализируемы и, в связи с этим, интересно рассмотреть простой случай, когда матрицы эти состоят из одной жордановой клетки.

◀ Пример 8. Пусть ядро K удовлетворяет следующему частному случаю уравнения (10) $(K=\|K_{ij}\|,\ i,\ j=1,\ 2)$

$$\mathrm{L}K=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\partial_{x}K+\partial_{t}K\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=0.\tag{23}$$

Не представляет труда выписать общий вид матрицы K, зависящей от четырех произвольных функций. Отметим, ради простоты, только то обстоятельство, что в этот класс входят матрицы вида

$$K(x,\ t)=\begin{pmatrix}f'(x-t)(t+\alpha) & f''(x-t)(t^{2}+(\alpha+\beta)t+\gamma)\\ -f(x-t) & f'(x-t)(\beta-t)\end{pmatrix}\tag{23'}$$

где f — произвольная дважды дифференцируемая функция, $\alpha,\ \beta,\ \gamma=\mathrm{const}$. Оператор L в данном случае гиперболический и ядро R восстанавливается по формуле (10′) в явном виде интегрированием по характеристикам $x-t=\mathrm{const}$. ▶

Последний пример показывает, что даже при постоянных матрицах A_0 и A_1 (в 10)) появление клетки в жордановой форме матриц M и M^{*} (в (22)) может привести к добавлению многочленных множителей к компонентам матрицы K (сравнить с примером 1).

§ 3. Общий случай

1°. Рассмотрим теперь случай многомерного оператора (1), допустив, к тому же, чтобы область D имела несколько компонент связности. Обозначим

$$Lf=\sum_{|\alpha|\leqslant m}A_{\alpha}(x)D^{\alpha}f,\ L^{*}f=\sum_{|\alpha|\leqslant m}(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}(fA_{\alpha}(x)),\tag{24}$$

где $D^{\alpha}=\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$ $(\alpha_i=0,\ 1,\ 2,\cdots;$ $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, а A_α и f $(\in C^{m}(D))$ $(N\times N)$-матрицы.

Операторы L и L^{*} выбраны формально сопряженными, поэтому,— при естественных ограничениях на границу ∂D и на функции $f,\ g\in C^{m}(D)\cap C^{m-1}(\overline{D})$,— справедлива формула Грина-Стокса

$$\int_D [gLf-(L^{\#}g)f]\,dx=\int_{\partial D} F_s(f,g)\,d\sigma, \tag{25}$$

где $F_x(f, g)=F(f(x), g(x))$ — соответствующий билинейный оператор $(m-1)$-го порядка на паре (f, g) (билинейная форма от

$$\xi=\{D^\alpha f\} \text{ и } \eta=\{D^\beta f\},\ |\alpha|,\ |\beta|\leqslant m-1) \text{ и } F_s(f(s), g(s)) =$$
$$=\lim_{x\to s} F_x(f(x), g(x)),\ x\in D,\ s\in\partial D,\ d\sigma \text{ — мера на } \partial D.$$

Пусть, далее, ядро $K(x, t)((x, t)\in\Omega=D\times D,\ K\in C^m(D))$ оператора (1) удовлетворяет соотношению

$$\mathrm{L}K\overset{\mathrm{def}}{=}L_x K-L_t^{\#}K=\int_\omega p(x,\tau)\,q(\tau, t)\,d\tau, \tag{26}$$

где ω — $\varkappa$-мерное компактное многообразие ($\varkappa\leqslant n-1$, а при $\varkappa=0$ считается, что ω состоит из конечного числа точек), $d\tau$ — мера на ω, $p(x, \tau)$ $((x, \tau)\in D\times\omega))$ и $q(\tau, t)$ $((\tau, t)\in\omega\times D)$ — комплекснозначные кусочно-непрерывные матрицы размерности $(N\times\alpha)$ и $(\alpha\times N)$ соответственно $(\alpha\geqslant 1)$,

Теорема 2. *Пусть D — ограниченная (необязательно связная) область из R^n с кусочно-гладкой (на каждой компоненте связности) границей ∂D, а K удовлетворяет в Ω уравнению* (26) *и* $K\in C^{m-1}(\overline{\Omega})$. *Тогда*

$$\mathrm{L}R=\int_{\partial D} F_s(R(x,s),\ R(s,t))\,d\sigma+\int_\omega P(x,\tau)\,Q(\tau,t)\,d\tau, \tag{26'}$$

где P и Q определяются из уравнений $(\mathrm{I}-\mathrm{K}_x)P(x,\tau)=p(x,\tau)$, $(\mathrm{I}-\mathrm{K}_t^*)\,Q(\tau, t)=q(\tau, t)$ $(\tau\in\omega)$.

■Формула (26′) легко выводится применением схемы доказательства теоремы 1 с учетом формулы (25).■

2°. Остановимся на простых иллюстрациях к теореме 2.

Пусть K удовлетворяет уравнению первого порядка

$$\mathrm{L}K\overset{\mathrm{def}}{=}\sum_{k=1}^n \{A_k(x)\,\partial_{x_k}K+\partial_{t_k}(KA_k(t))\}+A_0(x)\,K-KA_0(t)=0. \tag{27}$$

Тогда по (26′)

$$\mathrm{L}R=\sum_{k=1}^n\int_{\partial D} R(x,s)\,A_k(s)\,R(s,t)\,ds_1\wedge ds_2\cdots ds_{k-1}\wedge ds_{k+1}\cdots\wedge ds_n. \tag{27'}$$

В скалярном случае ($N=1$) ядро K представляется через функцию $(2n-1)$ переменных, а уравнение (27′) позволяет определить R интегрированием по характеристикам, задаваемым системой

$$\frac{dx_i}{A_i(x)}=\frac{dx_j}{A_j(x)}=\frac{dt_k}{A_k(t)}=\frac{dt_p}{A_p(t)}\quad (i, j, k, p=1, 2,\cdots, n).$$

В одномерном случае ($n=1$) соотношения (27) — (27′) переходят в обобщение (10) — (10′), когда $D=\bigcup(a_k, b_k)$, $-\infty<a_0<b_0<a_1<\cdots\cdots<a_r<b_r<+\infty$ (см. также ниже, пример 12).

◀ Пример 9. Рассмотрим скалярный двухмерный ($n=2$) случай, когда $A_i(x)=A_i=\mathrm{const}$, $A_1=1$, $A_0=0$ ($i=1, 2$). В этом случае речь идет о ядре $K(x_1, x_2, t_1, t_2)$ вида

$$K=K(x_1-t_1,\ \ x_2-A_2x_1,\ t_2-A_2x_1). \tag{28}$$

Из (27′) нетрудно в явной форме выразить резольвентное ядро R в Ω через его значения на границе $\partial\Omega$. В результате (см. замечание 1 § 2) приходим к выводу, что достаточно наложить на ядро (28) $K(\xi, \eta, \zeta)$ ограничения типа суммируемости, а область D считать необязательно ограниченной. При $A_1=1$, $A_2=0$, когда $K=K(x_1-t_1, x_2, t_2)$, R определяется интегрированием соотношения

$$(\partial_{x_1}+\partial_{t_1})R(x_1, x_2, t_1, t_2)=\int\limits_{\partial D}\cdot R(x_1, x_2, s_1, s_2)\ R(s_1, s_2, t_1, t_2)\,ds_2, \tag{28′}$$

являющегося обобщением формулы В. В. Соболева (3) на двухмерный случай.

Операторы последнего типа возникают в теории переноса излучения при общих законах некогерентного рассеяния (см. [26], гл. VIII, § 2). ▶

◀ Пример 10. (Ультрагиперболическое уравнение I). Положим $n=2$, $x=(x_1, x_2)$, $t=(t_1, t_2)$ и

$$\mathrm{L}K\overset{\mathrm{def}}{=}(\partial_{x_1}\partial_{x_2}-\partial_{t_1}\partial_{t_2})K(x, t)=0. \tag{29}$$

Тогда по (27′)

$$\mathrm{L}R(x, t)=\int\limits_{\partial D}(\partial_{s_1}R(x, s))\,R(s, t)\,ds_1+R(x, s)\,\partial_{s_2}R(s, t)\,ds_2. \tag{29′}$$

В случае $D=R^2$, когда и ядро K, и резольвентное ядро R удовлетворяют одному и тому же уравнению (29), воспользовавшись формулами интегральной геометрии ([14]), получим

$$R(x_1, x_2, t_1, t_2)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(\partial_{x_2}R(0, x_2+(t_1-\tau)u, t_2+x_1u, \tau)\,d\tau\,du. \tag{29″}$$

Эта формула позволяет, аналогично уравнению в полных свертках (см. введение), восстановить резольвентное ядро R, предварительно решив продифференцированное уравнение (2′) при $x_1=0$. ▶

◀ Пример 11. (Ультрагиперболическое уравнение I). Пусть теперь

$$\mathrm{L}K\overset{\mathrm{def}}{=}(\partial^2_{x_1}+\partial^2_{x_2}-\partial^2_{t_1}-\partial^2_{t_2})K=0, \tag{30}$$

тогда

$$\mathrm{L}R=\int\limits_{\partial D}\{(\partial_{s_1}R(x, s))\,R(s, t)-R(x, s)\,\partial_{s_1}R(s, t)\}\,ds_2+$$
$$+\int\limits_{\partial D}\{(\partial_{s_2}R(x, s))\,R(s, t)-R(x, s)\,\partial_{s_2}R(s, t)\}\,ds_1. \tag{30′}$$

Несмотря на то, что операторы $\mathbf{L}$ в (29) и (30) отличаются лишь линейной заменой переменной, из-за двойственного характера переменных $x=(x_1, x_2)$ и $t=(t_1, t_2)$ (см. (1), (2), (2′)) в данном случае ситуация совершенно иная (сравнить (29′) и (30′)) и неясно, существует ли при $D=R^2$ простой аналог формулы (29″). ▶

Последние два примера приводят к интересным (и, по-видимому не исследованным, кроме упомянутого в примере 2 случая) задачам обращения ультрагиперболического оператора.

3°. В ряде случаев (см. замечание 1 § 2) теорема 2 допускает обобщения, относящиеся к неограниченным областям D или к негладким ядрам K.

В случае, когда область D состоит из нескольких компонент связности, оператор $\mathbf{L}$ фактически определяется в каждой из них по-отдельности, но в формуле (26′) фигурируют границы всех компонент вместе. В частности, интересен случай „мозаичного" ядра, когда связная область G разбивается на конечное число областей ($\overline{G}=\cup\overline{D}_i$, $i=1, 2, \cdots, r$), $D_i\cap D_j=\varnothing\,(i\neq j)$ и $D=\cup D_i$. В этом случае общая часть границы между соседними областями D_i и D_j фигурирует в (26′) дважды. Такая схема может быть применена практически ко всем известным уравнениям с разностными и суммарными ядрами (см. [1], гл. II). Рассмотрим простейший случай.

◀ Пример 12. („Мозаичное" ядро с разностным аргументом). Пусть $G=(-\infty, +\infty)=\cup[a_k, a_{k+1}]$, $-\infty=a_0<a_1<\cdots<a_r=+\infty$, $D=\cup(a_k, a_{k+1})$, $k=0, 1,\cdots, r-1$; $\Omega=D\times D$. Рассмотрим матрицы-функции $K_{pq}(x)\in L_1(a_{p-1}-a_q,\ a_p-a_{q-1})$ и введем в рассмотрение ядро

$$K(x, t)=K_{pq}(x-t)\ \text{при}\ (x, t)\in\Omega_{pq}=(a_{p-1}, a_p)\times(a_{q-1}, a_q). \quad (31)$$

Применив формулу (26′) к одномерному случаю (или же, еще проще повторив ход доказательства теоремы 1), получим ($(x, t)\in\Omega$)

$$(\partial_x+\partial_t)R(x, t)=$$
$$=\sum_{p=1}^{r-1}\{R(x, a_p-0)R(a_p-0, t)-R(x, a_p+0)R(a_p+0, t)\}, \quad (31')$$

где через $R(x, a_p\pm 0)$ и $R(a_p\pm 0, t)\,(p=1, 2,\cdots, r-1)$ обозначены соответствующие решения уравнений (2) и (2′) с учетом обозначений (31). Строго говоря, формула (31′) справедлива в $\Omega=\cup\Omega_{pq}$, если функции K_{pq} дифференцируемы, однако в общем случае не представляет труда в каждой из областей Ω_{pq} выразить ядро R по (31′) через его значения на $\partial\Omega=\cup\partial\Omega_{pq}$ (см. замечание 1 § 2).

В случае известного парного уравнения (см. [1], § 5.3) с матричным ядром

$$K(x, t)=\begin{cases} K_1(x-t), & 0\leqslant x<+\infty \\ K_2(x-t), & -\infty<x<0,\end{cases} \quad (32)$$

когда $r=2$, $a_1=0$ и $K(x, +0)=K(x, -0)$

$$(\partial_x+\partial_t)R(x, t)=R(x, 0)\,Q(t), \quad x\neq 0, \quad (32')$$

где функция $Q(t)=R(-0, t)-R(+0, t)$ определяется из уравнения,

$$Q(t)=K_2(-t)-K_1(-t)+\int_0^{\infty} Q(s)K_1(s-t)\,ds+$$

$$+\int_{-\infty}^{0} Q(s)K_2(s-t)\,ds. \qquad (32'')$$

Аналогично упрощается и общая формула (31′) в случае $K(x, a_k+0)=$ $=K(x, a_k-0)$ или $K(a_k+0, t)=K(a_k-0, t)$ ($\exists k=1, 2, \cdots, r-1$) (см. [1], § 7 и [15, 16]). Отметим также, что операторы (12) и (21) вписываются в данный пример. ▶

Замечание 4. Теоремы 1 и 2 обобщаются на гораздо более общие ситуации. Укажем, например, случай интегро-дифференциально-разностных уравнений (см. [1], § 7 и [10, 15]). Нетрудно видеть также, что в качестве оператора L можно брать интегро-дифференциальный (псевдодифференциальный) оператор на n-мерном многообразии D в m-мерном пространстве ($m>n$). С другой стороны, схема доказательства теоремы 1 позволяет получить (при $p(x)\equiv q(x)\equiv 0$) формулы типа (8′) и (26′) для обобщенных резольвент односторонне обратимых операторов (см. [2, 3]).

Укажем также на наличие аналогов полученных формул, позволяющих эффективно обращать матрицы соответствующих классов. В частности, это относится к матрице Тёплица—Ганкеля $\|t_{i-j}+h_{i+j}\|$ ($i, j=m, m+1,\cdots, n;\ -\infty\leqslant m<n\leqslant+\infty$) (см. также [11—13]).

§ 4. Об условиях нормальной разрешимости

Теория уравнений типа свертки в настоящее время хорошо разработана (см. [1, 3, 4]). В первую очередь, это относится к технике сведения уравнений типа свертки к краевым задачам для аналитических функций, позволяющей выявить условие нётеровости и вычислить индекс в терминах преобразования Фурье.

С другой стороны (см. примеры 1—3, 12), все основные виды уравнений типа свертки укладываются в схему § 1 и для них выписываются формулы, характеризующие структуру резольвент. Возникает естественный вопрос о выявлении условий разрешимости уравнений с более общими операторами §§ 1, 3. Как будет показано ниже, структура этих операторов позволяет в ряде случаев найти условия нётеровости и вычислить индекс.

1°. В работах [11—13] убедительно показано, что ядра вида (6) и их дискретные аналоги позволяют существенно расширить класс операторов, допускающих эффективные рекуррентные алгорифмы обращения. Покажем теперь, что в теоретическом плане операторы этого типа поддаются исследованию применением преобразования Фурье.

◀ Пример 13. (Уравнения с двумя ядрами и парные уравнения). Рассмотрим следующее уравнение, обобщающее известное уравнение типа свертки с двумя ядрами ([1], § 5.2)

$$(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{K})\,y \overset{\text{def}}{=} \lambda y(x)-\int\limits_{-\infty}^{\infty} K(x,t)\,y(t)\,dt=f(x),\quad x\in R^1, \tag{34}$$

где λ — комплексный параметр и

$$K(x,t)=\left|\begin{array}{l} K_1(x-t)+\int\limits_{-\infty}^{0} p_1(x+\tau)\,q_1(\tau+t)\,d\tau,\ 0<t<+\infty \\ K_2(x-t)-\int\limits_{0}^{\infty} p_2(\tau+x)\,q_2(\tau+t)\,d\tau,\ -\infty<t\leqslant 0. \end{array}\right. \tag{34'}$$

При K_1, K_2, p_1, p_2, q_1, $q_2\in L_1(-\infty,+\infty)$, оператор $\mathbf{K}$ ограничен в $L_p\,(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ (см. [2, 3]). В каждой из полуплоскостей $t>0$ и $t<0$ ядро $K(x,t)$ — типа (6).

Как и в примере 12, для построения резольвентного ядра этого оператора применима формула (26') ($D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, $\partial D=\{x=0\}$; K_1, K_2 — $(N\times N)$-матрицы, p_1, p_2 — матрицы $(N\times\alpha)$ и q_1, q_2 — $(\alpha\times N)$-матрицы, $\alpha\geqslant 1$).

Применение преобразования Фурье к (34) приводит к следующему соотношению:

$$\left[\lambda I-\widehat{K}_1(\xi)-\frac{\pi}{2}\widehat{p}_1(\xi)\check{q}_1(\xi)\right]y_+(\xi)+\left[\lambda I-\widehat{K}_2(\xi)-\frac{\pi}{2}\widehat{p}_2(\xi)\check{q}_2(\xi)\right]y_-(\xi)+$$

$$+\frac{1}{2i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[\widehat{p}_2(\xi)\check{q}_2(\eta)\,y_-(\eta)-\widehat{p}_1(\xi)\check{q}_1(\eta)\,y_+(\eta)]\frac{d\eta}{\eta-\xi}=\widehat{f}(\xi), \tag{35}$$

где, как обычно, знаком $\wedge$ ($\vee$) обозначено прямое (обратное) преобразование Фурье, $\widehat{y}(\xi)=y_+(\xi)+y_-(\xi)$, где $y_+(\xi)$ ($y_-(\xi)$) — одностороннее преобразование Фурье на $(0,+\infty)$ ($(-\infty,0)$) от $y(x)$.

Таким образом, уравнение (34) свелось к своеобразной граничной задаче (для пары аналитических в верхней и нижней полуплоскости функций $y_\pm(\xi)$), содержащей сингулярный интегральный оператор. Стандартным применением известной формулы Племеля-Сохоцкого (см. [1, 3, 4]) придем к следующему условию нётеровости:

$$\det(\lambda I-\widehat{K}_l(\xi)-\pi\widehat{p}_l(\xi)\check{q}_l(\xi))\neq 0\quad(l=1,2). \tag{36}$$

Индекс оператора $\lambda\mathbf{I}-\mathbf{K}$ вычисляется по формуле*

$$\varkappa=\operatorname{ind}\frac{\det(\lambda I-\widehat{K}_1(\xi)-\pi\widehat{p}_1(\xi)\check{q}_1(\xi))}{\det(\lambda I-\widehat{K}_2(\xi)-\pi\widehat{p}_2(\xi)\check{q}_2(\xi))}. \tag{36'}$$

---

* Строго говоря, на $\widehat{K}_l$, $\widehat{p}_l$, $\check{q}_l$ ($l=1,2$) надо наложить условие типа гельдеровости, а при $\lambda=0$ еще и условие на бесконечности, обеспечивающее осмысленность формулы (36') (см. [1]).

Интересно отметить, что в случае $p_2=p_1$, $q_2=q_1$, $\widehat{K}_2(\xi)=\widehat{K}_1(\xi)+\pi\widehat{p}_1(\xi)\widecheck{q}_1(\xi)$ (т. е. когда обе строчки в (34′) совпадают), в отличие от уравнения в полных свертках (см. введение), индекс $\varkappa$ не всегда равен нулю. В случае $K_2=p_2=q_2=0$ имеем аналог уравнения Винера—Хопфа на полуоси $(0, +\infty)$. Ядро $K_1(x, t)=K(t, x)$ соответствует обобщению на случай ядер типа (6) известного парного уравнения ([1], § 5.3) и, разумеется, полученные результаты переносятся на этот случай. ▶

Аналогичные результаты получаются при исследовании операторов с модифицированными на основе неоднородного уравнения (8) ((26)) ядрами из примеров 1—3, 12. По сути дела, в этих случаях теория уравнений типа свертки обобщается без серьезных затруднений, по аналогии с известными результатами (см. [1, 3, 4, 15, 16, 23]).

В случае некоторых бесконечных алгебраических систем, являющихся дискретными аналогами уравнений с ядрами (6) (см. [11—13]), условие разрешимости и индекс выписываются применением теории граничных задач для функций, аналитических внутри и вне единичного круга (см., например, [3]).

2°. В известной книге У. Гренандера и Г. Сегё [17] введено общее понятие тёплицева оператора. В частности, в гл. 7, 8 приведена схема построения тёплицевых интегральных операторов с симметричными ядрами, не являющимися, вообще говоря, разностными.

Оказывается, что в ряде важнейших случаев эти ядра хорошо вписываются в схему § 1. Так, ядро Фурье—Бесселя имеет вид

$$K(x, t)=\sqrt{xt}\int_0^{+\infty}k(s)\,J_m(xs)\,J_m(ts)\,s\,ds,\quad \operatorname{Re} m>-\frac{1}{2},\tag{37}$$

где $k(s)$ — заданная функция, J_m — функция Бесселя. Нетрудно убедиться, что ядро это удовлетворяет следующему однородному уравнению вида (8)

$$(\partial_x^2-\partial_t^2)\,K(x, t)=\left(m^2-\frac{1}{4}\right)(x^{-2}-t^{-2})\,K(x, t)\tag{37′}$$

и, следовательно (см. замечание 1 § 2) для резольвентного ядра выписывается формула типа (8′). В случае уравнения с этим ядром на полуоси $(0, +\infty)$ при условии $1-k(s)\neq 0$ ядро R также задается формулой (37) с заменой $k(s)$ на $r(s)=k(s)(1-k(s))^{-1}$ (аналогия с уравнением в полных свертках, см. введение). В случае уравнения на интервале $(0, b)$, $0<b<+\infty$ (или $(b, +\infty)$) естественно применить преобразование Фурье—Бесселя, связанное очевидным образом с уравнением (37′) (аналогия с уравнением Винера—Хопфа). В некоторых других случаях к операторам из [17] надо применять дискретные преобразования (например, разложения по ортогональным полиномам).

В результате приходим к выводу, что разрешимость уравнений (1) с ядрами (8) ((26)) естественно формулировать в терминах „коэффициентов“ разложений по собственным функциям подходящих операторов, определяемых формальным дифференциальным выражением $Ly=\lambda y$ (см. (7), (24)).

Именно так обстоит дело с вопросами разрешимости уравнений с тёплицево-ганкелевыми операторами из примера 2 на отрезке, полуоси и оси (см. [23] и [1], § 7.5 и 26.2) В основе этого подхода лежит то обстоятельство, что оператор $\mathbf{L}$ и область $\Omega=D\times D$ (§§ 1, 3) идеально приспособлены к применению метода разделения переменных

§ 5. Некоторые приложения

Компоненты матричных ядер K, изучаемых в §§ 1, 3, удовлетворяют (см. выше, конец § 1) определенным уравнениям в частных производных практически всех известных типов. Построение резольвентного ядра R на основе теоремы 1 сводится к предварительному решению *конечного числа* уравнений вида $(\mathbf{I}-\mathbf{K})y=f$ и $(\mathbf{I}-\mathbf{K}^*)y=f$ с последующим решением соответствующих задач для уравнения (8′), отличающегося от (8) лишь свободным членом. На этом пути представляется эффективным построение конечно-разностных схем на последнем этапе, хотя многие из возникающих задач мало исследованы или не исследованы вообще (см. § 1, а также примеры 10 и 11).

В многомерном случае процедура восстановления резольвентного ядра на основе формулы (26′) также позволяет (см. (2)) сократить количество операций, по крайней мере, на один порядок (см. [11—13]), так как в (26′) размерность параметров интегрирования s и τ не превышает $n-1$.

В уравнениях (1) с ядрами §§ 1, 3, для которых реализован подход § 4, могут быть эффективны приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений или граничных задач для аналитических функций (см. [1, 15, 22, 23]).

Метод введения вспомогательного ядра (см. примеры 2, 4, 7), который, как легко убедиться, проходит для ядер K, удовлетворяющих в общем случае вместо (26) уравнению

$$L_xK(x,\ t)+L_t^*K(x,\ t)=\int\limits_{\omega}p(x,\ \tau)\,q(\tau,\ t)\,d\tau \tag{38}$$

может явиться хорошей основой для построения эффективных алгорифмов, ибо позволяет избежать ряда процедур, связанных с дифференцированием (сравнить примеры 2, 3, 4 и замечание 1 § 1). Что же касается дополнительного объема вычислений, связанного с построением резольвентного ядра $\widetilde{R}$ на границе $\partial\Omega$, то можно отметить, что ядро $\widetilde{K}$ выбирается с точностью до определенных конечномерных слагаемых, а это позволяет осуществить оптимальный выбор (например, добиваться оценки $\|\widetilde{K}\|<1$).

Одним из эффективных методов решения интегрального уравнения представляется аппроксимация его ядра $Q(x,\ t)$ ядрами §§ 1, 3. При реализации этого способа естественно поставить задачу о нахождении минимума функционала

$$F(K)=\|Q-K\| \tag{39}$$

в подходящей метрике и в классе ядер K, удовлетворяющих уравнению (8) ((26)). В некоторых случаях задача эта решается точно. Рассмотрим, например, простейший случай аппроксимации разностными ядрами $K=K(x-t)$ в квадрате $[0, \tau]\times[0, \tau]=\Omega$, $0<\tau<+\infty$ в метрике $L_2(\Omega)$. Нетрудно подсчитать, что в этом случае минимум функционала (39) достигается (при $\operatorname{Im} Q(x, t)=0$) на функции

$$K_\tau(x)=\begin{cases}(\tau+x)^{-1}\int\limits_{-x}^{\tau} Q(x+t, t)\,dt, & -\tau\leqslant x\leqslant 0\\ (\tau-x)^{-1}\int\limits_{0}^{\tau-x} Q(x+t, t)\,dt & 0<x\leqslant\tau,\end{cases} \tag{40}$$

а погрешность $F(K_\tau)$ вычисляется по формуле

$$F^2(K_\tau)=\int\limits_{-1}^{0}\left\{\int\limits_{-x}^{\tau} Q^2(x+t, t)\,dt-(\tau+x)^{-1}\left(\int\limits_{-x}^{\tau} Q(x+t, t)\,dt\right)^2\right\}dx+$$

$$+\int\limits_{0}^{1}\left\{\int\limits_{0}^{\tau-x} Q^2(x+t, t)\,dt-(\tau-x)^{-1}\left(\int\limits_{0}^{\tau-x} Q(x+t, t)\,dt\right)^2\right\}dx. \tag{40'}$$

◀ Пример 14. (Оператор В. В. Соболева [18]).

В теории переноса излучения возникает оператор (1) на полуоси $(0, +\infty)$ с ядром $Q(x, t)=K(x-t)\lambda(t)$, где $0\leqslant K(x)=K(-x)\in L_1(0, +\infty)$, $0\leqslant\lambda(x)\leqslant 1$, $\lambda(+\infty)=1$. Ядро это, вообще говоря, в схему § 1 не вкладывается, но его можно с большой точностью аппроксимировать ядрами нужного типа.

Самый простой способ — это замена функции $\lambda(t)$ кусочно-постоянной функцией $\lambda(t)\approx\lambda_k$, $t\in(a_k, a_{k+1})$, $k=1, 2,\cdots, r-1$, $\lambda_{r-1}=1$, где $0=a_1<a_2<\cdots<a_{r-1}<a_r=+\infty$. Построение резольвентного ядра в этом случае сводится к обращению формулы (31′) в том случае, когда в (31) $K_{pq}=K_q$ $(p, q=1, 2,\cdots, r-1)$ и $K_1\equiv 0$, $K_{r-1}=K$.

Рассмотрим теперь ядро $Q_1(x, t)=\sqrt{\lambda(x)\lambda(t)}\,K(x-t)$, эквивалентное ядру Q, но обладающее тем преимуществом, что оно симметрично. Наметим два способа его аппроксимации.

а) Зафиксируем $\tau>0$ и пусть $K(x)\in L_2(0, \tau)$. Вне квадрата $(0, \tau)\times(0, \tau)$ заменим функцию Q_1 разностным ядром $K(x-t)$. В квадрате $[0, \tau]\times[0, \tau]$ аппроксимируем $Q_1(x, t)$ разностным ядром $K_\tau(x-t)$ по формулам (40)—(40′). Функция K_τ симметрична и имеет вид

$$K_\tau(x)=(\tau-x)^{-1}K(x)\int\limits_{0}^{\tau-x}\sqrt{\lambda(t)\lambda(x+t)}\,dt,\quad 0\leqslant x\leqslant\tau. \tag{41}$$

Погрешность $F(K_\tau)$ при этом вычисляется по формуле

$$F^2(K_\tau)=2\int_0^\tau K^2(x)\left\{\int_0^{\tau-x}\lambda(t)\lambda(x+t)\,dt-\right.$$

$$\left.-(\tau-x)^{-1}\left[\int_0^{\tau-x}\sqrt{\lambda(t)\lambda(t+x)}\,dt\right]^2\right\}dx. \qquad (41')$$

Как видим, погрешность эта хорошо реагирует на „отклонение" функции $\lambda(x)$ от постоянной.

Таким образом, в этом случае резольвентное ядро строится по формуле (31′) при $r=3$, $a_1=0$, $a_2=\tau$.

б) Ядро Q_1 удовлетворяет уравнению

$$(\partial_x+\partial_t)\,Q_1(x,\ t)=[\mu'(x)\,\mu(t)+\mu(x)\,\mu'(t)].K(x,\ t), \qquad (42)$$

где функция $\mu(x)=\sqrt{\lambda(x)}$ предполагается дифференцируемой. Сравнивая (42) с (6), приходим к выводу, что целесообразно заменить ядро $K(x-t)$ вырожденным

$$K(x-t)\approx\sum_{j=0}^{n}a_jK_j(x)\,\dot{K}_j(t). \qquad (43)$$

Разумеется, эта аппроксимация может быть осуществлена с большой точностью многими способами. Одним из эффективных подходов (и в то же время удобных для ситуации [18]) является применение преобразования Фурье, когда

$$2\pi\,K(x-t)\approx\sum_{j=-n}^{n}\widehat{K}(\varepsilon j)\,e^{i\varepsilon j\,(t-x)}, \qquad (43')$$

где $\widehat{K}(\xi)$ — преобразование Фурье от $K(x)$, $\varepsilon>0$ достаточно мало́, а n достаточно велико́.

Использование формулы (43) целесообразно, прежде всего, потому, что в [11] для случая (6) разработана чрезвычайно эффективная рекуррентная процедура для вычисления резольвентного ядра. В данном случае по (43) аппроксимирующее ядро Q_τ определяется из уравнения типа (6)

$$(\partial_x+\partial_t)\,Q_\tau=(\mu'(x)\,\mu(t)+\mu(x)\,\mu'(t))\sum_{j=0}^{n}a_j\,K_j(x)\,K_j(t) \qquad (44)$$

при условии $Q_\tau(x,\ t)=Q_\tau(t,\ x)$, $(x,\ t)\in(0,\ \tau)\times(0,\ \tau)$, $Q_\tau(x,\ 0)=$ $=\mu(0)\,\mu(x)\,K(x)$.

Наконец, заметим, что в случае, когда функции $\mu(x)$ и $K_j(x)$ продолжаются в комплексную плоскость (например, как рациональные функции), использование аппроксимации (44) позволяет воспользоваться аппаратом обобщенных функций (см. [1], гл. 8) для решения граничной задачи примера 12 § 4. ▶

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 4.V.1982

Հ. Բ. ՆԵՐՍԻՍՅԱՆ. Որոշ ինտեգրալ օպերատորների ռեզոլվենտաների կառուցվածքը (ամփոփում)

Դիտարկվում են Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումներ, որոնց կորիզները բավարարում են որոշակի դիֆերենցիալ հավասարումների։ Ստացվում են բանաձևեր, որոնք թույլ են տալիս վերականգնել ռեզոլվենտային կորիզը, եթե այն հայտնի է տիրույթի եզրի վրա։

Ընդհանրացվում են փաթեթի տիպի հավասարումների տեսության մեջ հայտնի մի շարք արդյունքներ։

A. B. NERSESIAN. *The structure of resolvent of some integral operators*
(summary)

The paper deals with the Fredholm integral equations of second kind with the kernels satisfying some differential equations. The formulas which gives an opportunity to reconstruct the resolvent kernel on its value on the boundary are obtained. Particularly, the formulae which are known in the case of difference kernel are generalized at the cases of all main types of the equations of type of convolution.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский*. Уравнения типа свертки, М., «Наука», 1978.
2. *В. В. Соболев*. К теории диффузии излучения, Изв. АН Арм.ССР, сер. физ.-мат наук, 11, № 5, 1958, 39—50.
3. *М. Г. Крейн*. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН, 13, 5 (83), 1958, 3—120.
4. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, 2 (80), 1958, 3—72.
5. *W. Trench*. An algorithm for the inversion of finite Toeplitz matrices, J. Soc. Indust. Appl. Math., 12, 1964, 515—522.
6. *И. Ц. Гохберг, А. А. Семенцул*. Об обращении конечных тёплицевых матриц и их континуальных аналогов, Матем. исслед., Кишинев, 7:2, 1972, 201—223.
7. *И. Ц. Гохберг, Г. Хайниг*. О матричных интегральных операторах на конечном интервале с ядрами, зависящими от разности аргументов, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 20, № 1, 1975, 55—74.
8. *И. Ц. Гохберг, Г. Хайниг*. Обращение конечных тёплицевых матриц, составленных из элементов некоммутативной алгебры, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 19, № 5, 1974, 623—664.
9. *И. С. Иохвидов*. Ганкелевы и тёплицевы матрицы и формы, М., «Наука», 1974.
10. *Л. А. Сахнович*. Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке, УМН, 35, 4 (214), 1980, 69—129.
11. *T. Kailath, L. Ljung, M. Morf*. Generalized Krein—Levinson Equations for Efficient Calculation of Fredholm Resolvents of Nondisplacement Kernels, Topics in Functional Anal. Advances in Math. Suppl. Studies, 3, 1978, 169—183.
12. *T. Kailath, A. Vieira, M. Morf*. Inverses of Toeplitz operators, innovations and orthogonal polynomials, SIAM Review, 20, № 1, 1978, 106—119.
13. *T. Kailath, S. Y. Kung, M. Morf*. Displasement ranks of matrix, Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.), 1, № 5, 1979, 769—773.
14. *F. John*. The Ultrahyperbolic differential equations with four independent variables, Duke Math. J., V. 4, 1938, 300—322.
15. *И. Б. Симоненко*. О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки, Изв. вузов, Математика, № 2, 1959, 213—226.
16. *И. И. Комяк*. Об интегральном уравнении типа свертки с N ядрами, ДАН СССР, 179, № 2, 1968, 279—282.
17. *У. Гренандер, Г. Сегё*. Тёплицевы формы и их приложения, ИИЛ, 1961.

18. *В. В. Соболев.* Проблема Милна для неоднородной атмосферы, ДАН СССР, 239, № 3, 1978, 558—561.
19. *О. А. Олейник.* О гиперболических уравнениях второго порядка, вырождающихся внутри области и на ее границе, УМН, 24, 2 (146), 1969, 229—230.
20. *М. М. Смирнов.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения, М., «Наука», 1966.
21. *А. Б. Нерсесян, А. О. Оганесян, Г. Р. Оганесян.* Об одном методе исследования задачи Коши для слабо гиперболических уравнений, Труды Всесоюзной конф., посвящ. 75-летию И. Г. Петровского, МГУ, 1978, 391—395.
22. *Ф. Д. Гахов.* Краевые задачи, М., Физматгиз, 1963.
23. *М. П. Ганин.* Об интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящим от разности аргументов, Изв. вузов, Математика, 2 (33), 1963, 31—43.
24. *Б. Дэвисон.* Теория переноса нейтронов, М., Атомиздат, 1960.
25. *Г. С. Литвинчук.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом, М., «Наука», 1977.
26. *В. В. Соболев.* Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет, М., ГИТТЛ, 1956.
27. *И. И. Кальмушевский.* О решении некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от суммы и разности аргументов, Дифф. уравн., 16, № 5, 1980, 941—943.
28. *Ф. Р. Гантмахер.* Теория матриц, ГИТТЛ, 1953.