

УДК 517.983

М.  АВТЯН

О ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕКОТОРОГО НЕЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

§ 1. Постановка задачи. Необходимые пространства

На поверхности цилиндра $Q = [0, T] \times S^1$, где $S^1 = \{x = e^{ix}, 0 \leq x \leq 2\pi\}$ — единичная окружность, рассматривается задача Дирихле для нелинейного гиперболического уравнения

$$A(u) \equiv \square^p u + |u|^{p-2} u = h(t, x); \quad (1)$$

$$u(0, x) = u'(0, x) = 0, \quad (2)$$

$$u(T, x) = u'(T, x) = 0. \quad (3)$$

Здесь $u \equiv u(t, x): Q \rightarrow \mathbb{R}^1$ — искомая функция, $\square \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ — волновой оператор, $p > 1$ — произвольное число.

В настоящей работе методом компактности для нелинейных уравнений (см. [1], [2] и др.) доказывается корректность задачи Дирихле для нелинейного гиперболического уравнения вида (1). Отметим, что в случае линейных гиперболических уравнений с двойными характеристиками корректность задачи Дирихле была установлена в работах [3], [4] методом эллиптической регуляризации.

Как известно, рассмотрение задачи (1)–(3) на поверхности цилиндра эквивалентно рассмотрению этой же задачи в прямоугольнике $Q = [0, T] \times [0, 2\pi]$ с дополнительным условием периодичности по x . В дальнейшем удобно рассматривать исходную задачу именно в этой форме.

Введем необходимые пространства решений $u(t, x)$ и правой части $h(t, x)$ и дадим определение обобщенного решения.

Обозначим через $\dot{H}(Q)$ пространство, полученное замыканием гладких функций $u(t, x)$, удовлетворяющих условиям (2), (3) и периодических по x с периодом 2π , по нормам

$$\|u\|_{\dot{H}(Q)} = \|\square u\|_{L_2(Q)} + \|u\|_{L_p(Q)}. \quad (4)$$

Очевидно, $\dot{H}(Q)$ — банахово пространство (при $p = 2$ — гильбертово пространство).

Отметим, что функции $u(t, x) \in \dot{H}(Q)$ имеют следы $u(t, x)$ и $u'(t, x)$ при любом $t \in [0, T]$ и удовлетворяют условиям (2), (3). Это вытекает из известной оценки решений задачи Коши для волнового уравнения:

$$\max_{t \in [0, T]} (|u'_t(t, x)|^2_{L_2(0, 2\pi)} + |u'_x(t, x)|^2_{L_2(0, 2\pi)}) \leq c \int_Q u^2_{L_2(Q)},$$

$c > 0$ — некоторая постоянная.

Пространство $\dot{H}(Q)$ есть пространство обобщенных решений задачи (1)–(3).

Определение 1. Функция $u(t, x) \in \dot{H}(Q)$ называется обобщенным решением задачи (1)–(3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\iint_Q u \square v dx dt + \iint_Q |u|^{p-2} u v dx dt = \iint_Q h v dx dt, \quad (5)$$

где $v(t, x) \in \dot{H}(Q)$ — произвольная функция.

Правая часть $h(t, x)$ будет выбираться из пространства $L_{p'}(Q)$,

где $p' = \frac{p}{p-1}$.

§ Основная теорема

Целью настоящей работы является доказательство следующего утверждения.

Теорема. Для любого $h(t, x) \in L_{p'}(Q)$ задача Дирихле (1)–(3) имеет единственное решение $u(t, x) \in \dot{H}(Q)$.

Доказательство. Пусть $v_1(t, x), v_2(t, x), \dots$ — полная система функций в $\dot{H}(Q)$. Приближенное решение $u_n(t, x)$ ищется в виде

$$u_n(t, x) = \sum_{j=1}^n c_j v_j(t, x),$$

где неизвестные постоянные $c_1, c_2, \dots, c_n$ определяются из системы (нелинейных) уравнений

$$\begin{aligned} \langle A u_n, v_j \rangle &= \iint_Q \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} \right] dx dt + \\ &+ \iint_Q |u_n|^{p-2} u_n v_j dx dt = \iint_Q h v_j dx dt, \quad j=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6)$$

Для доказательства разрешимости системы (6) относительно $c_1, c_2, \dots, c_n$ нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. Пусть $\bar{P}(\bar{C}) \equiv (P_1(\bar{C}), \dots, P_n(\bar{C}))$ — непрерывное отображение $R^n \rightarrow R^1$. Пусть для нас сформулировано условие $S_R = \{\bar{C} : |\bar{C}| = R\}$ ($R > 0$ — некоторое число) выполнено «условие острого угла»

$$(\bar{P}(\bar{C}), \bar{C}) > 0.$$

Тогда существует по крайней мере одна точка $\bar{C}$, $|\bar{C}| \leq R$, такая, что

$$\bar{P}(\bar{C}) = 0.$$

Лемма 1 известна и ее доказательство мы не приводим. Его можно найти, например, в [1], [2].

Лемма 2. Имеет место следующее равенство:

$$\langle Au_n, u_n \rangle = \|u_n\|_{L_1(Q)}^2 + \|u_n\|_{L_p(Q)}^p.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \langle Au_n, v_j \rangle &= \iint_Q \left[\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right] \left[\frac{\partial^2 v_j}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_j}{\partial x^2} \right] dxdt + \\ &+ \iint_Q |u_n|^{p-2} u_n v_j dxdt, \quad j=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

Умножая (7) на C_j и суммируя по j от 1 до n , получаем

$$\begin{aligned} \langle Au_n, u_n \rangle &= \iint_Q \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} \right|^2 dxdt + \iint_Q |u_n|^p dxdt = \\ &= \|u_n\|_{L_1(Q)}^2 + \|u_n\|_{L_p(Q)}^p. \end{aligned}$$

Из приведенных лемм вытекает разрешимость системы (6) относительно $c_1, c_2, \dots, c_n$. Действительно, обозначим через

$$\begin{aligned} P_j(c_1, c_2, \dots, c_n) &\equiv \iint_Q u_n v_j dxdt + \\ &+ \iint_Q |u_n|^{p-2} u_n v_j dxdt - \iint_Q h v_j dxdt, \\ j &= 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

и покажем, что векторное поле

$$\bar{P}(\bar{C}) \equiv (P_1(\bar{C}), P_2(\bar{C}), \dots, P_n(\bar{C})) ,$$

удовлетворяет условию леммы 1, т. е. при $|\bar{C}| \gg 1$: $\bar{P}(\bar{C}), \bar{C} \geq 0$. Имеем

$$\begin{aligned} (\bar{P}(\bar{C}), \bar{C}) &\equiv \langle Au_n, u_n \rangle - \iint_Q h u_n dxdt \equiv \\ &\equiv \iint_Q |u_n|^2 dxdt + \iint_Q |u_n|^p dxdt - \iint_Q h u_n dxdt. \end{aligned}$$

Так как $h(t, x) \in L_p(Q)$, то применяя неравенство Юнга, получаем

$$\left| \iint_Q h u_n dx dt \right| \leq \varepsilon \iint_Q |u_n|^p dx dt + c(\varepsilon) \iint_Q |h|^{p'} dx dt, \quad (8)$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольная постоянная.

Таким образом

$$\begin{aligned} (\vec{P}(\vec{C}), \vec{C}) &\geq \iint_Q |\square u_n|^2 dx dt + \iint_Q |u_n|^p dx dt - \\ &- \varepsilon \iint_Q |u_n|^p dx dt - c(\varepsilon) \iint_Q |h|^{p'} dx dt = \\ &= \iint_Q |\square u_n|^2 dx dt + (1 - \varepsilon) \iint_Q |u_n|^p dx dt - c(\varepsilon) \iint_Q |h|^{p'} dx dt = \\ &= \|\square u_n\|_{L_2(Q)}^2 + (1 - \varepsilon) \|u_n\|_{L_p(Q)}^p - c(\varepsilon) \|h\|_{L_{p'}(Q)}^{p'}. \end{aligned}$$

Итак, при некотором фиксированном $\varepsilon < 1$ получаем, что

$$(\vec{P}(\vec{C}), \vec{C}) \geq 0, \quad (9)$$

если норма $\|\square u_n\|_{L_2(Q)} + \|u_n\|_{L_p(Q)}$ достаточно велика. Поскольку в конечномерном пространстве все нормы эквивалентны, это означает, что неравенство (9) выполнено и при $|\vec{C}| = R$, где $R > 0$ достаточно велико.

Таким образом, разрешимость системы (6) установлена и последовательность приближенных решений $u_n(t, x)$ найдена.

Получим для $u_n(t, x)$ априорную оценку. Докажем, что для всех $n = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\|\square u_n\|_{L_2(Q)}^2 + \|u_n\|_{L_p(Q)}^p \leq c, \quad (10)$$

где $c = c(h)$ не зависит от n .

Действительно, из системы уравнений (6) имеем

$$\iint_Q \square u_n \square u_n dx dt + \iint_Q |u_n|^p dx dt = \iint_Q h u_n dx dt.$$

Отсюда, применяя неравенство (8), получаем, что

$$\begin{aligned} \iint_Q |\square u_n|^2 dx dt + (1 - \varepsilon) \iint_Q |u_n|^p dx dt &\leq \\ &\leq c(\varepsilon) \iint_Q |h|^{p'} dx dt. \end{aligned}$$

При $0 < \varepsilon < 1$ фиксированном это означает справедливость неравенства (10).

Из оценки (10) и слабой компактности ограниченных множеств в рефлексивном банаховом пространстве вытекает, что существует под-

последовательность (обозначим ее по-прежнему u_n) такая, что $u_n(t, x)$ сходится в $L_p(Q)$ к некоторой функции $u(t, x)$ слабо, а $\square u_n(t, x)$ слабо сходится в $L_2(Q)$ к функции $w(t, x)$. Учитывая, что $\square$ — замкнутый оператор, имеем $w(t, x) \equiv \square u(t, x)$. Таким образом,

$$u_n(t, x) \rightarrow u(t, x),$$

$$\square u_n(t, x) \rightarrow \square u(t, x),$$

$n \rightarrow \infty$, слабо, по крайней мере в $L_2(Q)$.

Однако, ввиду нелинейности рассматриваемой задачи, полученной слабой сходимости недостаточно для перехода к пределу при $n \rightarrow \infty$ в приближенных уравнениях (6). Покажем, что из оценки (10) следует, что $u_n(t, x) \rightarrow u(t, x)$, $n \rightarrow \infty$, сильно в $L_2(Q)$. Для этого воспользуемся известной оценкой решений задачи Коши для строго гиперболического уравнения и, в частности, волнового уравнения. Именно, если $u(t, x)$ — решение задачи Коши

$$\square u = f(t, x)$$

(при условии периодичности по x), то имеет место неравенство

$$\max_{t \in [0, T]} \int_0^{2\pi} \left[\left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right|^2 \right] dx \leq k \|\square u\|_{L_2(Q)}^2, \quad (11)$$

где $k > 0$ — некоторая постоянная.

Так как в силу (10) для приближенных решений $u_n(t, x)$ имеем $\|u_n\|_{L_2(Q)} \leq c$, то получаем оценку

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, T]} \int_0^{2\pi} \left[\left| \frac{\partial u_n(t, x)}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial u_n(t, x)}{\partial x} \right|^2 \right] dx + \\ + \int_Q |u_n(t, x)|^p dx dt \leq c(h). \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, получаем оценку

$$\|u_n\|_{W_2^1(Q)} + \|u_n\|_{L_p(Q)} \leq c,$$

где $c > 0$ не зависит от $n = 1, 2, \dots$.

Из этой оценки и из компактности вложения $W_2^1(Q) \subset L_2(Q)$ следует, что подпоследовательность сходится к $u(t, x)$ сильно в $L_2(Q)$.

Покажем, что найденная функция $u(t, x)$ есть искомое решение. Для этого зафиксируем в (6) индекс j и устремим $n \rightarrow \infty$. Последовательно имеем

$$\int_Q \square u_n \square v_j dx dt \rightarrow \int_Q \square u \square v_j dx dt,$$

ибо $\square u_n \rightarrow \square u$, $n \rightarrow \infty$, слабо в $L_2(Q)$.

Так как $u_n(t, x) \rightarrow u(t, x)$, $n \rightarrow \infty$, сильно в $L_2(Q)$, то существует подпоследовательность (не станем менять обозначений и обозначим ее опять через $u_n(t, x)$) такая, что

$$u_n(t, x) \rightarrow u(t, x), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{почти всюду в } Q.$$

Покажем, что

$$\iint_Q |u_n|^{p-2} u_n v_j dx dt \rightarrow \iint_Q |u|^{p-2} u v_j dx dt, \quad n \rightarrow \infty.$$

Как известно (теорема Д. Витали, см., например, [5], с. 149), достаточным условием возможности предельного перехода под знаком интеграла является свойство равностепенной абсолютной непрерывности семейства интегралов.

В нашем случае надо установить равностепенную абсолютную непрерывность семейства интегралов

$$\iint_Q |u_n|^{p-2} u_n v_j dx dt. \quad (12)$$

Действительно, хорошо известно (следствие теоремы Ш.—Ж. Валле-Пуссена, см., например, [5], с. 152), что если семейство функций $f(t, x)$ образует ограниченное множество в $L_p(Q)$, то интегралы

$$\iint_Q |f(t, x)|^q dx dt \text{ равностепенно абсолютно непрерывны для любого } q < p.$$

Так как для приближенных решений $u_n(t, x)$ имеем

$$\iint_Q |u_n(t, x)|^p dx dt \leq c,$$

то отсюда следует, что при любой фиксированной функции $v_j(t, x)$ (базисные функции $v_j(t, x)$ можно считать гладкими) интегралы (12) равностепенно абсолютно непрерывны.

По теореме Д. Витали получаем, что

$$\iint_Q |u_n|^{p-2} u_n v_j dx dt \rightarrow \iint_Q |u|^{p-2} u v_j dx dt, \quad n \rightarrow \infty.$$

В итоге полученных рассуждений из (6) следует, что для любой базисной функции $v_j(t, x)$ в пределе имеем

$$\iint_Q \square u_n \square v_j dx dt + \iint_Q |u|^{p-2} u v_j dx dt = \iint_Q h v_j dx dt, \\ j = 1, 2, \dots$$

Так как система $\{v_j(t, x)\}$ есть полная система в $\dot{H}(Q)$, то $u(t, x)$ удовлетворяет тождеству

$$\iint_Q \square u \square v dQ + \iint_Q |u|^{p-2} u v dQ = \iint_Q h v dQ,$$

$\forall v \in H(Q)$, то есть найденная функция удовлетворяет исходному уравнению в смысле обобщенных функций.

Далее, из оценки (10) и неравенства (11) вытекает, что предельная функция $u(t, x)$ удовлетворяет всем граничным условиям (2), (3).

Итак, существование решения задачи (1) — (3) установлено.

Единственность. Пусть $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ — два обобщенных решения задачи (1) — (3) с конечным интегралом

$$\iint_Q |u_i|^2 dx dt + \iint_Q |u_i|^p dx dt, \quad i = 1, 2. \quad (13)$$

По определению обобщенного решения функции $u_i(t, x)$ удовлетворяют интегральному тождеству

$$\begin{aligned} \iint_Q u_i \square v dx dt + \iint_Q |u_i|^{p-2} u_i v dx dt = \\ = \iint_Q h v dx dt, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (14)$$

где $v(t, x) \in \dot{H}(Q)$ — произвольная функция.

Вычитая в (14) одно равенство из другого, получаем, что для любой функции $v(t, x) \in \dot{H}(Q)$ имеем

$$\iint_Q \square (u_1 - u_2) \square v dx dt + \iint_Q [|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2] v dx dt = 0.$$

Положим в этом тождестве $v(t, x) \equiv u_1(t, x) - u_2(t, x)$. Тогда получим, что

$$\iint_Q \square (u_1 - u_2)^2 dx dt + \iint_Q [|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2] (u_1 - u_2) dx dt = 0. \quad (15)$$

Нетрудно вычислить, что

$$\begin{aligned} \iint_Q [|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2] (u_1 - u_2) dx dt \geq \\ \geq a_0 \iint_Q |u_1 - u_2|^p dx dt, \end{aligned}$$

где $a_0 > 0$ — некоторая постоянная.

Следовательно, из (15) получаем, что

$$\iint_Q \square (u_1 - u_2)^2 dx dt + a_0 \iint_Q |u_1 - u_2|^p dx dt \leq 0.$$

Из последнего неравенства следует, что $u_1(t, x) \equiv u_2(t, x)$.

Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что совершенно аналогично может быть рассмотрена более общая задача

$$\square^2 u + f(u) = h(t, x),$$

где $f(u)$ — непрерывная монотонно возрастающая функция. Кроме того, тем же методом можно изучить нелинейные краевые задачи для гиперболических уравнений высших порядков с двойными характеристиками. Этому вопросу будет посвящена другая работа.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 22.I.1982

Մ. Դ. ԴԱՎԹՅԱՆ. Մի ոչ գծային երկբարձրական հավասարման համար Դիրիխլեի խնդրի մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը բազմապատիկ բնութագրիչներով ոչ ոչ գծային երկբարձրական հավասարումների մի դասի համար: Դրված խնդրի համար կոմպակտության միջոցով հաստատվում է լուծելիությունը:

M. D. DABTYAN. *On the Dirichlet problem for a nonlinear hyperbolic equation (summary)*

The paper considers the Dirichlet problem for a class of nonlinear hyperbolic equations with multiple characteristics. The existence and uniqueness of the solution is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Дубинский. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения, ВИНТИ, Итоги науки и техники, т. 9, 1976, 5—130.
2. Ж. Л. Лионс. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972.
3. М. Д. Давтян. Общие краевые задачи для некоторых классов гиперболических уравнений высших порядков с двойными характеристиками, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», IX, № 4, 1974, 269—284.
4. М. Д. Давтян. Теорема существования и единственности решения краевой задачи безмоментной теории оболочек для оболочки отрицательной кривизны, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», XIII, № 2, 1978, 151—157.
5. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М., «Наука», 1974.