ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 5, 1982 Математика

УДК 517.98

А. О. БАБАЯН

ОСОБЫЙ СЛУЧАЙ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА-ХОПФА

§ 1. Введение. Формулировка результатов

В этой работе исследуется уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\, ds = f(t),\ t \geqslant 0. \quad (1)$$

Здесь $k \in L^1(-\infty, \infty)$, $f \in L^p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, φ ищется из того же класса $L^p(0, \infty)$, которому принадлежит f. В случае, когда символ уравнения

$$1-K(\lambda) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{it\lambda}\, dt$$

отличен от нуля на всей вещественной оси, полное исследование (1) было дано М. Г. Крейном в [1]. В работах [2—5] рассматривается случай, когда символ имеет вырождение степенного вида в некоторых точках, то есть когда символ допускает представление:

$$1-K(\lambda) = \prod_{k,j} \left(\frac{\lambda-\lambda_k}{\lambda+i}\right)^{\sigma_k} \left(\frac{\lambda-\lambda_j}{\lambda-i}\right)^{\eta_j} H(\lambda).$$

Здесь λ_k, λ_j — действительные числа, $\operatorname{Re}\sigma_k > 0$, $\operatorname{Re}\eta_j > 0$, $H(\lambda) \neq 0$ при всех действителеных λ. В работе М. И. Хайкина [6] рассматривался более общий случай, а именно, когда $\ln(1-K(\lambda))$ локально интегрируем на вещественной оси. При дополнительных предположениях, что $\operatorname{mes} E(\lambda) < \lambda^\alpha$, где $E(\lambda) = \{t : |1-K(t)| < \lambda\}$, $\alpha > 0$ и что $\arg(1-K(\lambda))$ ограничен, доказывается возможность факторизации символа в классе S (класс медленно растущих распределений) и на этой основе решается однородное уравнение

$$\varphi(t) - \int_0^\infty k(t-s)\varphi(s)\, ds = 0,\ t > 0. \quad (2)$$

В настоящей работе методом, отличным от метода работы [5], исследуется не только однородное, но и неоднородное уравнение в случае, когда символ допускает следующее представление:

$$1-K(\lambda) = \theta(\lambda)(1-H(\lambda)). \quad (3)$$

Здесь $H(\lambda)$ — образ Фурье функции $h \in L^1(-\infty, \infty)$, $1-H(\lambda) \neq 0$ для всех λ, а $\theta(\lambda)$ имеет следующий вид:

$$\theta(\lambda)=1,\ |\lambda|>2\varepsilon;\ \theta(\lambda)=\begin{cases} a\left|\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\alpha_1}, & 0>\lambda>-\varepsilon \\ b\left|\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\alpha_2}, & 0<\lambda<\varepsilon, \end{cases} \tag{4}$$

где a и b — постоянные, $a\neq 0$, $b\neq 0$. Кроме того предполагается, что $\theta(\lambda)$ не обращается в нуль нигде, кроме точки нуль, и что $\theta(\lambda)$ бесконечно дифференцируема везде, кроме точки нуль. Кроме того предполагается, что $\alpha_1-\alpha_2$ — действительное число (хотя α_1 и α_2, вообще говоря, комплексные числа, такие, что $\mathrm{Re}\,\alpha_1>0$, $\mathrm{Re}\,\alpha_2>0$). В дальнейшем не умаляя общности, можно предположить, что $\alpha_1-\alpha_2>0$.

В параграфе 2 будет доказано, что при этих условиях символ может быть представлен в виде

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{-\alpha_-}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}, \tag{5}$$

где

$$\psi(\lambda)=\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda+i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2-\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right], \tag{6}$$

$$\mathrm{Re}\,\alpha_+>0,\ 0<\mathrm{Re}\,\alpha_-<1,\ \beta=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{4\pi i},\ \Phi^{\pm}(\lambda)\neq 0$$

для всех $\lambda\in\overline{D^{\pm}}$ ($D^+=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Im}\,z>0\}$, $D^-=\{z\in\mathbf{C}:\mathrm{Im}\,z<0\}$), γ — целое число. Под $[\lambda/(\lambda+i)]^{\alpha_+}$, $[\lambda/(\lambda-i)]^{-\alpha_-}$ понимаются те ветви этих функций, которые аналитически продолжимы соответственно в D^+ и D^-. Пусть теперь

$$g_1(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+}\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda+i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right], \tag{7}$$

$$g_2(\lambda)=\frac{1}{\Phi_0^-(\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\alpha_-}\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]. \tag{8}$$

Тогда результаты, полученные в настоящей работе, могут быть сформулированы так:

1. Случай $1<p<\infty$. Предполагается, что преобразование Фурье правой части (1) допускает представление

$$F(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m G(\lambda)+F_1^-(\lambda), \tag{9}$$

где $G(\lambda)$—преобразование Фурье функции $g(t)\in L^1\cap L^p$, а $F_1^-(\lambda)$--образ Фурье функции из L^1, и, кроме того, $F_1^-(\lambda)$ допускает аналитическое продолжение в D^-; $m=\left[\mathrm{Re}\,\alpha_++i\beta\pi+\dfrac{1}{p}\right]$, где $[\cdot]$ означает целую часть числа. Такому условию удовлетворяют, в частности, функции, имеющие некоторую скорость убывания на бесконечности, а именно

$$\int_0^\infty t^k |f(t)|\, dt < \infty, \quad k = 0, 1, \cdots, m+1.$$

Теорема 1. *Уравнение* (1) *с правой частью, допускающей представление* (9), *имеет решение, принадлежащее* $L^p(0, \infty)$ *при* $m+\gamma > 0$ *тогда и только тогда, когда выполнены* $m+\gamma$ *условий*

$$\int_0^\infty t^k e^{-t} \psi_1(t)\, dt = 0, \quad k = 0, 1, \cdots, m+\gamma-1, \tag{10}$$

где $\psi_1(t)$ — *прообраз Фурье функции* $g_2(\lambda)\, G(\lambda)$. *Однородное уравнение не имеет нетривиальных решений.*

Теорема 2. *При* $m+\gamma = 0$ *существует и единственное решение уравнения* (1) *в классе* L^p *при правой части, допускающей представление* (9). *Это решение определяется как прообраз Фурье функции*

$$\Phi^+(\lambda) = g_1^{-1}(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m \Phi_0^+(\lambda)\, \pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]. \tag{11}$$

Теорема 3. *При* $m+\gamma < 0$ *уравнение* (1) *при правой части, допускающей представление* (9), *всегда разрешимо, и однородное уравнение имеет* $|m+\gamma|$ *линейно независимых решений.*

Общее решение определяется как прообраз Фурье функции

$$\Phi^+(\lambda) = g_1^{-1}(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\gamma} \Phi_0^+(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m \times$$

$$\times \left[\pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)] + \sum_{j=0}^{-\gamma-m-1} \frac{c_j \lambda^j}{(\lambda-i)^{-\gamma-m}}\right]. \tag{12}$$

Здесь c_j — *произвольные постоянные.*

2. Случай $p = 1$. При $\alpha_+ + i\beta\pi \neq [\mathrm{Re}\, \alpha_+ + i\beta\pi]$ остаются справедливыми теоремы 1, 2, 3. При $\alpha_+ + i\beta\pi = [\mathrm{Re}\, \alpha_+ + i\beta\pi]$ достаточно требовать, чтобы преобразование Фурье правой части (1) допускало представление

$$F(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{m-1} G(\lambda) + F_1^-(\lambda). \tag{13}$$

На $G(\lambda)$ и $F_1^-(\lambda)$ налагаются те же ограничения, что и в представлении (9). Тогда теоремы 1, 2, 3 будут верны при замене m на $m-1$ и подстановке $G(\lambda)$ из представления (13).

3. Случай $p = \infty$. При $\mathrm{Re}\, \alpha_+ + i\beta\pi \neq [\mathrm{Re}\, \alpha_+ + i\beta\pi]$ остаются справедливыми теоремы 1, 2, 3. В случае, когда $\mathrm{Re}\, \alpha_+ + i\beta\pi = [\mathrm{Re}\alpha_+ + i\beta\pi]$ достаточно требовать, чтобы преобразование Фурье правой части (1) допускало представление (13). Тогда теоремы 1, 2, 3 будут выполнены при замене m на $m-1$ и подстановке $G(\lambda)$ из (13).

§ 2. Вспомогательные предложения

Множество функций, имеющих вид

$$c+\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, e^{it\lambda}\, dt,\ h\in L^1(-\infty,\ \infty) \tag{14}$$

будем обозначать R. Класс функций вида (14), когда $h(x)=0$ п.в. при $x<0$, обозначим R^+, а класс функций вида (14) с $h(x)=0$ п.в. при $x>0$ обозначим R^-. Свойства этих классов описаны в [1]. Обозначим через R_p, R_p^+, R_p^- классы преобразований Фурье функций, принадлежащих соответственно $L^p(-\infty,\infty)$, $L^p(0,\infty)$, $L^p(-\infty,0)$(где $L^p(0,\infty)$— класс функций из $L^p(-\infty,\infty)$, обращающихся в нуль на $(-\infty,0)$. Аналогично определяется $L^p(-\infty,0)$). Класс R_p при некоторых p состоит вообще говоря из обобщенных функций, действующих на S (пространство бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций) таким образом:

$$(\hat{f},\psi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\hat{\psi}(t)\,dt \text{ при } \psi\in S.$$

Здесь $\hat{f}$ -- преобразование Фурье функции f. Если функция $h\in L^1(-\infty,\infty)$, то $\hat{h}\hat{f}$ будет обозначать следующую обобщенную функцию:

$$(\hat{h}\hat{f},\ \psi)=\int_{-\infty}^{\infty}(h*f)(t)\,\hat{\psi}(t)\,dt,\ \psi\in S. \tag{15}$$

Из этого определения ясно, что R_p инвариантен относительно умножения на функции из R (умножение понимается в смысле (15)). Аналогично R_p^+ (R_p^-) инвариантно относительно умножения на функции из R^+ (R^-). Операторы π^+ и π^-, переводящие R_p в R_p^+ и R_p^- соответственно, определим следующим образом:

$$\pi^+[\hat{f}]=\widehat{\chi f},\ \pi^-[\hat{f}]=(\widehat{1-\chi)f},$$

где $\chi(t)$ — функция Хевисайда.

При доказательстве теорем 1, 2, 3 будет использовано другое представление $1-K(\lambda)$.

Лемма 1. *При условиях, наложенных на символ уравнения* (1) *в* § 1, *символ допускает представление* (5).

Доказательство. Прежде всего, используя тот факт, что

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}}=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}},\ \lambda=\bar{\lambda}$$

(под $[\lambda/(\lambda+i)]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}$, $[\lambda/(\lambda-i)]^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}$ понимаются те ветви этих функций, которые аналитически продолжимы соответственно в полуплоскости $D^+=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Im} z>0\}$, $D^-=\{z\in\mathbf{C}:\operatorname{Im} z<0\}$). Функцию $1-K(\lambda)$ можно представить в виде

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\theta_1(\lambda)(1-H(\lambda)).$$

Здесь $\theta_1(\lambda)$ имеет в окрестности нуля следующий вид:

$$\theta_1(\lambda)=\begin{cases} a\left|\dfrac{\lambda}{\lambda+i}\right|^{\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}, & -\varepsilon<\lambda<0 \\ b\left|\dfrac{\lambda}{\lambda-i}\right|^{-\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}}, & 0<\lambda<\varepsilon. \end{cases}$$

Для того чтобы уничтожить этот разрыв в нуле введем функцию (6). Эта функция в окрестности нуля допускает такие оценки:

$$\psi(\lambda)\sim\exp\left[\beta\pi^2-2\pi i\beta\log|\lambda/(\lambda+i)|\right],\quad \lambda\to+0,$$
$$\psi(\lambda)\sim\exp\left[-\beta\pi^2+2\pi i\beta\log|\lambda/(\lambda+i)|\right],\quad \lambda\to-0.$$

Следовательно, если β определить из соотношения

$$2\pi i\beta=\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2},$$

то функция

$$\eta(\lambda)=\psi^{-1}(\lambda)\,\theta_1(\lambda)\,(1-H(\lambda))$$

нигде не обращается в нуль, а в точке 0 имеет разрыв первого рода. Значит можно подобрать такое δ, чтобы

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{-\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\delta}\eta(\lambda)$$

была непрерывна в нуле. Для этого можно определить δ из соотношения

$$-\beta\pi^2+\frac{1}{2}\log\frac{b}{a}=-i\delta\pi$$

или

$$\delta=-i\beta\pi+\frac{i}{2\pi}\log\frac{b}{a},$$

Окончательно получим, что функция

$$g(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{-\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\delta}\eta(\lambda)$$

не обращается в нуль на $[-\infty,\infty]$ и непрерывна. Кроме того из вида функций $\theta_1(\lambda)$ и $\psi^{-1}(\lambda)$ можно заключить, что $g(\lambda)\in R$. Следовательно символ можно записать так:

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{-\delta}(c+H_0(\lambda)).$$

Здесь $H_0(\lambda)\in R_1$ и $c+H_0(\lambda)\neq 0$ для всех действительных λ. В силу этих свойств функция $c+H_0(\lambda)$ допускает факторизацию (см. [1]):

$$c+H_0(\lambda)=\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}.$$

В этой формуле $\Phi_0^+(\lambda)\in R^+,\Phi_0^-(\lambda)\in R^-$, $\Phi_0^+(z)\neq 0$ при $\operatorname{Im} z>0$, $\Phi_0^-(z)\neq 0$ при $\operatorname{Im} z\leqslant 0$, $\varkappa$ — целое число, равное индексу функции $c+H_0(\lambda)$. В силу этого соотношения символ можно представить так:

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)},\qquad(5^*)$$

откуда и получается представление (5). При этом

$$\alpha_+=\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta+\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta\right)\right]+1;\ \alpha_-=\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta\right)\right]+$$
$$+1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\delta;\ \gamma=\varkappa-\left[\operatorname{Re}\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}-\delta\right)\right]-1.$$

Доказательство закончено.

Кроме того понадобится также одно свойство преобразований Фурье-Лапласа функций из $L^p(0,\infty)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Обозначим следующую дугу через Γ_ξ:

$$\Gamma_\xi=\{x+ix^2\colon\ 0\leqslant x\leqslant\xi\},\ \xi>0,$$
$$\Gamma_\xi=\{x+ix^2\colon\ \xi\leqslant x\leqslant 0\},\ \xi<0.\qquad(16)$$

Лемма 2. *Пусть*

$$\Phi^+(\lambda)=\int_0^\infty\varphi(t)\,e^{it\lambda}\,dt,\ \operatorname{Im}\lambda>0.$$

Если $\varphi\in L^p(0,\infty)$ *при* $1<p<\infty$, *а* Γ_ξ *определяется формулами* (16), *то справедливы следующие оценки:*

$$|\Phi^+(\lambda)-c|=o(1),\ \lambda\to 0\ \text{при}\ p=1,\qquad(17)$$

$$\left|\int_{\Gamma_\xi}\Phi^+(\lambda)\,d\lambda\right|=o(1)\,|\xi|^{\frac{1}{p'}},\ \xi\to 0\ \text{при}\ 1<p<\infty,\qquad(18)$$

$$\left|\int_{\Gamma_\xi}\Phi^+(\lambda)\,d\lambda\right|<c_0\,\|\varphi\|_\infty,\ \xi\to 0\ \text{при}\ p=\infty.\qquad(19)$$

Здесь $c = \int_0^{\infty} \varphi(t)\,dt$, c_0 — *некоторая постоянная, не зависящая от* φ.

Доказательство. Оценка (17) очевидна, так как при $\varphi \in L^1(0, \infty)$ $\Phi^+(\lambda)$ непрерывна в замкнутой верхней полуплоскости D^+. Пусть $1 < p \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Имеем

$$\left|\int_{\Gamma_\xi} \Phi^+(\lambda)\,d\lambda\right| = \left|\int_0^{\infty} \varphi(t)\left(\int_{\Gamma_\xi} e^{i\lambda t}\,d\lambda\right)dt\right| =$$

$$= \left|\int_0^{\infty} \varphi(t)\,\frac{e^{i(\xi+i\xi^2)t}-1}{it}\,dt\right| \leqslant \|\varphi\|_p\left(\int_0^{\infty}\frac{|e^{i(\xi+i\xi^2)t}-1|^q}{|t|^q}\,dt\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant c_0\|\varphi\|_p|\xi|^{\frac{1}{p}}. \quad (20)$$

Здесь c_0 — абсолютная постоянная, а $\|\varphi\|_p$ — норма φ в $L^p(0, \infty)$. Это доказывает утверждение леммы в случае $p = \infty$. При $1 < p < \infty$ эту оценку можно уточнить. Действительно, (18) справедлива для функций $\varphi \in L^1(0, \infty)$, а так как такие функции образуют плотное подмножество в $L^p(0, \infty)$ при $1 < p < \infty$ в силу (20) получим, что оценка справедлива для всех функций из $L^p(0, \infty)$. Доказательство закончено.

§ 3. Доказательство теорем 1, 2, 3.

Наиболее существенную часть доказательства составляет следующее предложение.

Лемма 3. *Уравнение* (1) *в* $L^p(0, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *при* $\gamma > 0$ *эквивалентно следующему уравнению:*

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+[g_2(\lambda)F(\lambda)]. \quad (21)$$

Здесь $F(\lambda)$ — *образ Фурье функции* f, *а решение* $\Phi^+(\lambda)$ *ищется в классе* R_p^+.

При $\gamma < 0$ *уравнение* (1) *эквивалентно такому уравнению:*

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)} = \pi^+[g_2(\lambda)F(\lambda)] + \sum_{k=1}^{-\gamma}\frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda - i)^k}. \quad (22)$$

Здесь $\sum_{k=1}^{-\gamma}\frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda - i)^k}$ — *главная часть разложения Лорана функции*

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}.$$

Доказательство. Уравнение (1) можно записать в виде:

$$\varphi(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t - s)\,\varphi(s)\,ds = b(t) + f(t), \quad -\infty < t < \infty.$$

Здесь φ и f доопределяются на $(-\infty, 0)$ равными нулю, а $b(t)$ определяется следующим образом:

$$b(t)=\begin{cases} 0, & t\geqslant 0\\ -\int\limits_0^{\infty} k(t-s)\,\varphi(s)\,ds, & t<0.\end{cases}$$

Перейдем к преобразованиям Фурье:

$$(1-K(\lambda))\,\Phi^+(\lambda)=\Phi^-(\lambda)+F(\lambda). \tag{23}$$

Здесь $\Phi^+(\lambda)$ — образ Фурье $\varphi(t)$, $\Phi^-(\lambda)$, $F(\lambda)$ — образы Фурье $b(t)$ и $f(t)$ соответственно. Учитывая представление (5) уравнение (23) примет вид:

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\alpha_+}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{-\alpha_-}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}\,\Phi^+(\lambda)=\Phi^-(\lambda)+F(\lambda).$$

Так как $g_2(\lambda)\in R^-$ (g_2 определяется из (8)), то можно умножить обе части уравнения на эту функцию. Тогда получим

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}=g_2(\lambda)\,\Phi^-(\lambda)+g_2(\lambda)\,F(\lambda) \tag{24}$$

(g_1 определяется из (7)). Так как $g_2(\lambda)F(\lambda)\in R_p$, то эта функция единственным образом представима в виде суммы функции из R_p^+ и функции из R_p^-:

$$g_2(\lambda)\,F(\lambda)=\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]+\pi^-[g_2(\lambda)\,F(\lambda)].$$

Учитывая это равенство, уравнение (24) преобразуем в следующее уравнение:

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}=g_2(\lambda)\,\Phi^-(\lambda)+\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]+\pi^-[g_2(\lambda)\,F(\lambda)].$$

Предположим сначала, что $\gamma\geqslant 0$. Перепишем уравнение (24) таким образом:

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}-\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]=$$
$$=g_2(\lambda)\,\Phi^-(\lambda)+\pi^-[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]. \tag{25}$$

Так как $g_1(\lambda)$, $\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}$, $[\Phi_0^+(\lambda)]^{-1}$ принадлежат R^+, а $\Phi^+(\lambda)\in R_p^+$, то первый член разности в левой части (25) принадлежит R_p^+. В силу определения оператора π^+ функция $\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]$ также принадлежит R_p^+. Следовательно, левая часть (25) принадлежит R_p^+. Аналогично правая часть (25) принадлежит R_p^-. Отсюда сразу следует, что обе части должны равняться нулю, в частности

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\gamma}\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}=\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)].$$

Таким образом, если φ удовлетворяет (1), то $\Phi^{+}(\lambda)$ удовлетворяет (21). Допустим теперь, что $\Phi^{+}(\lambda)$ удовлетворяет (21) и $\varphi \in L^p(0, \infty)$ — прообраз Фурье функции $\Phi^{+}(\lambda)$. Докажем, что φ — решение уравнения (1). Предположим, что это не так.

Тогда для некоторой функции $g(t) \in L^p(0, \infty)$ справедливо:

$$\varphi(t) - \int_0^{\infty} k(t-s)\,\varphi(s)\,ds = g(t), \quad t > 0$$

(так как $\varphi \in L^p(0, \infty)$ и $k(t) \in L^1(-\infty, \infty)$). Принимая это уравнение за исходное после тех же рассуждений, с помощью которых перешли от (1) к (21), получим

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\gamma} \frac{\Phi^{+}(\lambda)}{\Phi_0^{+}(\lambda)} = \pi^{+}[g_2(\lambda)\, G(\lambda)] \qquad (26)$$

($G(\lambda)$ — преобразование Фурье функции $g(t)$).

Но так как $\Phi^{+}(\lambda)$ удовлетворяет также и (21), то имеем

$$\pi^{+}[g_2(\lambda)(F(\lambda) - G(\lambda))] = 0$$

или

$$g_2(\lambda)(F(\lambda) - G(\lambda)) = R^{-}(\lambda), \qquad (27)$$

где $R^{-}(\lambda) \in R_p^{-}$. Так как $g_2(\lambda)$ имеет вид (8), где β — чисто мнимое число, то существует целое число n такое, что функция

$$\psi(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^n [g_2(\lambda)]^{-1}$$

принадлежит R^{-}. После умножения равенства (27) на эту функцию получим

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^n (F(\lambda) - G(\lambda)) = \psi(\lambda)\, R^{-}(\lambda).$$

Правая часть этого равенства принадлежит R_p^{-}. Рассмотрим левую часть. Так как $F(\lambda) - G(\lambda)$ аналитически продолжима в D^{+}, то функция

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^n (F(\lambda) - G(\lambda))$$

может иметь в точке i полюс порядка не выше n. Пусть $\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(\lambda - i)^k}$ — главная часть разложения Лорана в точке i этой функции. Тогда функция

$$B(\lambda) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^n (F(\lambda) - G(\lambda)) - \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(\lambda - i)^k}$$

аналитически продолжима в D^{+}. Кроме того $B(\lambda) \in R_p^{-}$, следовательно $B(\lambda) \equiv 0$ или

$$\lambda^n (F(\lambda) - G(\lambda)) = \sum_{j=0}^{n-1} b_j \lambda^j. \qquad (28)$$

Так как $F(\lambda)-G(\lambda)\in R_p^+$, то при $1\leqslant p<\infty$ из (28) следует, что $F(\lambda)\equiv G(\lambda)$. Следовательно, $f(t)=g(t)$ п.в. и φ является решением уравнения (1). Осталось рассмотреть случай $p=\infty$. В этом случае из (28) следует, что

$$G(\lambda)=F(\lambda)+\frac{c}{\lambda},$$

где c — некоторая постоянная, или в прообразах Фурье

$$g(t)=f(t)+c\,\theta(t).$$

Здесь

$$\theta(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t<0.\end{cases}$$

Таким образом, надо доказать, что уравнение (1) с правой частью, равной $c\theta(t)$, не имеет решения в $L^\infty(0,\infty)$. Предположим противное, пусть φ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t)-\int\limits_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds=c\,\theta(t),\ t>0. \tag{29}$$

Перейдем к уравнению (21)

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^\gamma\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}=\pi^+\,[g_2(\lambda)\,c\,\hat{\theta}(\lambda)].$$

Но так как $g_2(\lambda)=0$ при $\lambda=0$, то

$$\pi^+\,[g_2(\lambda)\,c\,\hat{\theta}(\lambda)]=0,$$

то есть $\Phi^+(\lambda)=0$ ($\Phi^+(\lambda)$ ищется в классе R_∞^+). Следовательно, (29) не имеет решения из $L^\infty(0,\infty)$.

Итак, доказано, что при $\gamma>0$ все решения уравнения (1) в пространствах $L^p(0,\infty)$, $1\leqslant p<\infty$ являются прообразами Фурье решений уравнения (21), принадлежащих R_p^+, $1\leqslant p\leqslant\infty$.

Аналогично доказывается, что (1) и (22) эквивалентны при $\gamma<0$. Лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству теорем 1, 2, 3.

1. Рассмотрим сначала уравнение (1) в пространствах $L^p(0,\infty)$, $1<p<\infty$. В силу леммы 3 уравнение (1) можно свести к уравнению (21) при $\gamma>0$ или к уравнению (22) при $\gamma<0$.

а). Пусть $\gamma>0$. Исследуем уравнение (21).

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^\gamma\frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}=\pi^+\,[g_2(\lambda)\,F(\lambda)].$$

Сначала преобразуем это уравнение. Так как $\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^\gamma$ и $\Phi^+(\lambda)$ принадлежат R, то можно умножить обе части уравнения на эти функции. Тогда получим

$$g_1(\lambda)\,\Phi^+(\lambda) = \Phi_0^+(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\gamma}\pi^+\,[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]. \tag{30}$$

Теперь выясним, каким условиям должна удовлетворять функция $f \in L^p(0, \infty)$, чтобы это уравнение имело решение. Прежде всего, так как левая часть (30) аналитически продолжима в D^+, то и

$$\Phi_0^+(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\gamma}\pi^+\,[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]$$

должна быть аналитична в D^+. А это означает, что функция $\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]$ должна иметь нуль порядка не ниже γ в точке i, так как $[(\lambda - i)/(\lambda + i)]^{-\gamma}$ имеет в этой точке полюс порядка γ, а $\Phi_0^+(\lambda)$ не обращается в нуль для всех $\lambda \in D^+$. То есть, если ψ — прообраз Фурье функции $g_2(\lambda)\,F(\lambda)$, то для разрешимости уравнения (30) необходимо выполнение следующих условий:

$$\int\limits_0^\infty t^k e^{-t}\,\psi(t)\,dt = 0,\quad k = 0, 1, \cdots, \gamma - 1. \tag{31}$$

Кроме того, для разрешимости (30) в R_p^+ необходимо выполнение еще некоторых условий, так как наличие сомножителя $g_1(\lambda)$ в левой части (30) накладывает некоторые ограничения на поведение функции $\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]$ в окрестности нуля.

Функция $g_1(\lambda)$ имеет следующий порядок убывания при $\lambda \in \Gamma_\xi$, $|\lambda| \to 0$ (Γ_ξ определено в (16))

$$g_1(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_+},\quad \lambda = x + ix^2,\quad x \to +0, \tag{32}$$

$$g_1(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_+}\exp\,[i\beta\pi\,\log\,|\lambda|] = |\lambda|^{\alpha_+ + i\beta\pi},\quad \lambda = x + ix^2,\quad x \to -0.$$

Таким образом, в силу (18) и (32) для левой части (30) справедлива следующая оценка:

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\xi} g_1(\zeta)\,\Phi^+(\zeta)\,d\zeta\right| = o(1)\,|\xi|^{\alpha_+ + i\beta\pi + \frac{1}{p}},\quad \xi \to -0.$$

Следовательно, эта же оценка должна выполняться и для правой части (30):

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\xi} \pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]\,d\lambda\right| = o(1)\,|\xi|^{\alpha_+ + i\beta\pi + \frac{1}{p}},\quad \xi \to -0. \tag{33}$$

Оценка (33) необходима, чтобы решение (21) существовало, но в более узком классе функций, преобразования Фурье которых допускают представление (9), она будет также и достаточной.

Посмотрим какой вид для таких функций примет функция $\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]$:

$$\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)] = \pi^+\left[g_2(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^m G(\lambda) + g_2(\lambda)\,F_1^-(\lambda)\right] =$$

$$=\pi^+\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m g_2(\lambda)\, G(\lambda)\right]$$

(равенство справедливо, так как $g_2(\lambda)\in R^-$). Далее

$$\pi^+\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m g_2(\lambda)\, G(\lambda)\right]=\pi^+\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\left[\pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\pi^-[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]\right]\right]=\pi^+\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]\right].$$

Пусть c_k — значение k-ой производной функции $\{\lambda^m\pi^+[g_2(\lambda)\times\times G(\lambda)]\}$ в точке i. Рассмотрим функцию

$$E(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]-\sum_{k=1}^m\frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda-i)^k}. \tag{34}$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^m\frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda-i)^k}$ — главная часть разложения Лорана функции $\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]$ в точке i, то функция (34) аналитична в D^+. Кроме того, так как по предположению $G(\lambda)\in R_1\cap R_p$, то и функция (34) принадлежит тем же классам. Следовательно, по теореме Пэли-Винера

$$E(\lambda)=\pi^+[E(\lambda)]=\pi^+\left[\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]\right].$$

Окончательно

$$\pi^+[g_2(\lambda)\, F(\lambda)]=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]-\sum_{k=1}^m\frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda-i)^k}. \tag{35}$$

Условие (33) в этом случае принимает вид:

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\xi}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]\, d\lambda-\int\limits_{\Gamma_\xi}\sum_{k=1}^m\frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda-i)^k}\, d\lambda\right|=$$

$$=o(1)\,|\xi|^{\alpha_++i\beta_\pi+\frac{1}{p}},\quad \xi\to-0.$$

Вспоминая, что $m=\left[\operatorname{Re}\alpha_++i\beta_\pi+\frac{1}{p}\right]$, выводим

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\xi}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m\pi^+[g_2(\lambda)\, G(\lambda)]\, d\lambda\right|=o(1)\,|\xi|^{\alpha_++i\beta_\pi+\frac{1}{p}},\quad \xi\to-0. \tag{36}$$

Следовательно, для того, чтобы выполнялось (33), необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\xi}\sum_{k=1}^m\frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda-i)^k}\, d\lambda\right|=o(1)\,|\xi|^{\alpha_++i\beta_\pi+\frac{1}{p}},\quad \xi\to-0.$$

Выполнение этого условия возможно только при $c_k=0$, $k=0, 1, \cdots, m-1$; то есть для того, чтобы (33) выполнялось, необходимо и достаточно, чтобы сама функция $\pi^+[g_2(\lambda)\,G(\lambda)]$ и первые $m-1$ ее производные обращались в нуль в точке i. Если $\psi_1(t)$ — прообраз Фурье функции $g_2(\lambda)\,G(\lambda)$, эти условия запишутся так:

$$\int\limits_0^\infty t^k e^{-t}\,\psi_1(t)\,dt=0,\quad k=0, 1, \cdots, m-1. \tag{37}$$

Можно объединить эти условия с (31). Действительно, учитывая (37) представление (35) примет вид

$$\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m \pi^+[g_2(\lambda)\,G(\lambda)] \tag{38}$$

и, следовательно, условия (31) имеют вид

$$\int\limits_0^\infty t^k e^{-t}\,\psi_1(t)\,dt=0,\quad k=m,\cdots,\ m+\gamma-1.$$

Таким образом, для того, чтобы уравнение (21) было разрешимо в R_p^+, $1<p<\infty$, когда $F(\lambda)$ допускает представление (9), необходимо выполнение $m+\gamma$ условий (10).

Эти условия будут также и достаточными. Действительно, если (10) выполнены, то справедлива формула (38) и, следовательно, функция

$$\Phi^+(\lambda)=\Phi_0^+(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\gamma} g_1^{-1}(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^m \pi\,[g_2(\lambda)\,G(\lambda)]$$

является решением (21). Кроме того, так как $m=\left[\operatorname{Re}\alpha_+ + i\beta\pi+\frac{1}{p}\right]$, то $\Phi^+(\lambda)\in R_p^+$. В случае $\gamma>0$ теорема 1 доказана.

б). Пусть теперь $\gamma<0$. Рассмотрим уравнение (22);

$$g_1(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^\gamma \frac{\Phi^+(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}=\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]+\sum_{k=1}^{-\gamma}\frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda-i)^k}.$$

Так же, как и при $\gamma\geqslant 0$, правая часть должна удовлетворять условию (33) для того, чтобы решение (22) в R_p^+ существовало:

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\xi}\left[\pi^+[g_2(\lambda)\,F(\lambda)]+\sum_{k=1}^{-\gamma}\frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda-i)^k}\right]d\lambda\right|=o(1)\,|\xi|^{\alpha_+ + i\beta\pi+\frac{1}{p}},\ \xi\to-0. \tag{39}$$

Для $F(\lambda)$, допускающих представление (9), справедлива формула (35), следовательно, учитывая (36), условие (39) примет вид

$$\left|\int\limits_{\Gamma_\xi}\left[\sum_{k=1}^{-\gamma}\frac{\zeta_{-k-\gamma}}{(\lambda-i)^k}-\sum_{k=1}^{m}\frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda-i)^k}\right]d\lambda\right|=$$

$$=o(1)\,|\xi|^{\alpha_+ + i\beta\pi+\frac{1}{p}},\ \xi\to-0. \tag{40}$$

Пусть сначала $m \geqslant -\gamma + 1$. В этом случае для выполнения (40) необходимо и достаточно, чтобы

$$\zeta_{-\gamma-k} = \frac{c_{m-k}}{(m-k)!}, \quad k = 1, \cdots, -\gamma, \tag{41}$$

$$c_{m-k} = 0, \quad k = -\gamma + 1, \cdots, m. \tag{42}$$

Тогда решение (22) запишется так:

$$\Phi^+(\lambda) = g_1^{-1}(\lambda)\left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{-\gamma} \Phi_0^+(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^m \pi^+ [g_2(\lambda)\, G(\lambda)]. \tag{43}$$

При выполнении условий (42) формула (43) определит решение (22) в R_p^+, причем можно проверить, что для этой $\Phi^+(\lambda)$ (41) также выполняются. Следовательно (42) необходимы и достаточны, чтобы решение (22) в R_p^+ существовало. Если ψ_1—прообраз Фурье функции $g_2(\lambda) \times G(\lambda)$, то условия (42) имеют вид (10). Теорема 1 доказана.

Пусть теперь $m = -\gamma$. В этом случае условие (40) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\zeta_{m-k} = \frac{c_{m-k}}{(m-k)!}, \quad k = 1, \cdots, m. \tag{44}$$

Но формула (43), которая в этом случае примет вид (11), определяет функцию $\Phi^+(\lambda)$, которая удовлетворяет условиям (44) и является решением (22) в R_p^+. Теорема 2 доказана.

Теперь рассмотрим последний случай $m < -\gamma$.

Для выполнения условий (40) в этом случае необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\left\{\sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-\gamma-k}}{(\lambda - i)^k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda - i)^k}\right\}$$

имела следующий вид:

$$\sum_{k=1}^{-\gamma} \frac{\zeta_{-\gamma-k}}{(\lambda - i)^k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_{m-k}}{(m-k)!\,(\lambda - i)^k} = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i}\right)^m \frac{P_{-\gamma-m-1}(\lambda)}{(\lambda - i)^{-\gamma-m}}.$$

Здесь $P_{-\gamma-m-1}(\lambda)$ — полином степени $-\gamma - m - 1$. Из этого следует, что уравнение (22) в R_p^+ всегда разрешимо и однородное уравнение имеет $-\gamma - m$ линейно независимых решений. Общее решение определяется по формуле (12). Теорема 3 доказана.

2. В случае, когда уравнение (1) решается в пространстве $L^1(0, \infty)$ или $L^\infty(0, \infty)$ в силу леммы 2 условия (33) при $\gamma > 0$ и (3) при $\gamma < 0$ следует заменить на

$$\left|\frac{1}{|x|^{\alpha_+ + i\beta_\kappa}} \pi^+[g_2(x + ix^2)\, F(x + ix^2)] - c\right| = o(1), \quad x \to -0 \tag{45}$$

при $\gamma \geqslant 0$

$$\left|\frac{1}{|x|^{\alpha_++i\beta\pi}}\left[\pi^+[g_2(x+ix^2)F(x+ix^2)]+\sum_{k=1}^{-\gamma}\frac{\zeta_{-\gamma-k}}{(x+ix^2-i)^k}\right]-\right.$$

$$\left.-c\right|=o(1),\ x\to-0, \tag{46}$$

при $\gamma<0$ в случае $L^1(0,\infty)$; и

$$\left|\int_{\Gamma_\xi}\pi^+[g_2(\lambda)G(\lambda)]\,d\lambda\right|\leqslant M\cdot|\xi|^{\alpha_++i\beta\pi},\ \xi\to-0, \tag{47}$$

при $\gamma\geqslant0$,

$$\left|\int_{\Gamma_\xi}\left|\pi^+[g_2(\lambda)F(\lambda)]+\sum_{k=1}^{-\gamma}\frac{\zeta_{-\gamma-k}}{(\lambda-i)^k}\right|d\lambda\right|\leqslant M\cdot|\xi|^{\alpha_++i\beta\pi},\ \xi\to-0, \tag{48}$$

при $\gamma<0$ в случае $L^\infty(0,\infty)$. Все остальные рассуждения вполне аналогичны рассуждениям пункта 1.

§ 4. Случай симметрического ядра

Рассмотрим случай, когда ядро уравнения (1) симметрическое: $k(t)=\overline{k}(-t)$. В этом случае символ уравнения $1-K(\lambda)$ — действительная функция. При этом условии факторизацию (5) можно уточнить. Рассмотрим представление символа (5*):

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-\delta}\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\varkappa}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)}.$$

Здесь $\psi(\lambda)$ — функция (6), $\delta=-i\beta\pi+\dfrac{i}{2\pi}\log[b/a]$, $i\beta\pi=\dfrac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)$, a, b, α_1 и α_2 определяются из представления (4). Так как $1-K(\lambda)$ — действительная функция, то $\alpha_1=\overline{\alpha}_1$, $\alpha_2=\overline{\alpha}_2$.

Перейдем к комплексно сопряженной функции

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-i\beta\pi-\frac{i}{2\pi}\overline{\log[b/a]}}\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+i\beta\pi+\frac{i}{2\pi}\overline{\log[b/a]}}\times$$

$$\times\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\varkappa}\frac{\Phi_1^-(\lambda)}{\Phi_1^+(\lambda)}. \tag{49}$$

Здесь $\Phi_1^\mp(\lambda)=\overline{[\Phi_0^\mp(\lambda)]}^{-1}$, $\Phi_1^\pm(\lambda)$ аналитически продолжимы в $D^\pm$ и не обращаются в этих областях в нуль. Равенство (49) можно переписать в виде

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-i\beta\pi+\frac{i}{2\pi}\overline{\log[b/a]}}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+i\beta\pi-\frac{i}{2\pi}\overline{\log[b/a]}}\times$$

$$\times\psi(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-\varkappa}\frac{\Phi_1^-(\lambda)}{\Phi_1^+(\lambda)} \tag{50}$$

(были использованы соотношения:

$$\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda+i}-i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]=\exp\left[\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda+i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{-2\pi i\beta}e^{-\beta\pi^2},$$

$$\exp\left[-\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}-i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]=\exp\left[-\beta\left(\log\frac{\lambda}{\lambda-i}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+i\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{2\pi i\beta}e^{\beta\pi^2}.$$

Для действительной функции $1-K(\lambda)$ представления (5*) и (50) должны совпадать. Следовательно, $(b/a)>0$ и $\varkappa=0$. Окончательно представление (5*) примет вид

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\delta}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-\delta}\psi(\lambda)\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)},\tag{51}$$

причем $\operatorname{Re}\delta=-i\beta\pi$. Факторизация символа типа (5) имеет вид

$$1-K(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\delta+k}\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^{\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-\delta-k}\varphi(\lambda)\times$$

$$\times\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{-k}\frac{\Phi_0^-(\lambda)}{\Phi_0^+(\lambda)},\tag{52}$$

где

$$k=\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+i\beta\pi\right]+1.$$

Следовательно, полученные результаты в данном случае примут следующий вид:

1. Пусть $1<p<\infty$ или $p=1,\infty$ и $\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)\right]\neq\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)$.

Предполагается, что $m=\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{p}\right]+k$.

Теорема 1′. *Уравнение* (1) *с правой частью, допускающей представление* (9), *имеет решение, принадлежащее* $L^p(0,\infty)$, *при* $\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{p}\right]>0$ *тогда и только тогда, когда выполнены* $\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{p}\right]$ *условий*

$$\int_0^\infty t^k e^{-t}\psi_1(t)\,dt=0,\ k=0,1,\cdots,\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\frac{1}{p}\right]-1,$$

где $\psi_1(t)$ — *прообраз Фурье функции* $g_2(\lambda)G(\lambda)$. *Однородное уравнение не имеет нетривиальных решений.*

Теорема 2'. *При* $\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\frac{1}{p}\right]=0$ *существует единственное решение уравнения* (1) *в классе* $L^p(0, \infty)$ *при правой части, допускающей представление* (9). *Это решение определяется, как прообраз Фурье функции*

$$\Phi^+(\lambda)=g_1^{-1}(\lambda)\left(\frac{\lambda}{\lambda+i}\right)^m \Psi_0^+(\lambda)\,\pi^+[g_2(\lambda)\,G(\lambda)].$$

2. Пусть $p=1$, $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)=\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)\right]$. Теорема 1' останется в силе при замене m на $m-1$ и $\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\frac{1}{p}\right]$ — на $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)$.

3. Пусть $p=\infty$, $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)=\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)\right]$. Теоремы 1' и 2' останутся в силе при замене m на $m-1$ и $\left[\frac{\alpha_1+\alpha_2}{4}+\frac{1}{p}\right]$ — на $\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)-1$.

Случай, когда $\alpha_1+\alpha_2=0$ не рассматриваем, так как в этом случае символ не вырождается (см. [1]).

Пример.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(t)-\int_0^\infty k(t-s)\,\varphi(s)\,ds=ce^{-\delta t},\quad t>0, \tag{53}$$

где $\delta>0$

$$k(t)=(1-e^{-it})\frac{1}{t^2}-\frac{6}{t^4}+\left(\frac{6}{t^4}-\frac{6i}{t^3}-\frac{3}{t^2}\right)e^{it}.$$

Тогда

$$1-K(\lambda)=\begin{cases}\lambda, & 0<\lambda\leqslant 1\\ -\lambda^3, & -1\leqslant\lambda\leqslant 0\end{cases},\quad 1-K(\lambda)=1,\ |\lambda|>1.$$

Найдем решения этого уравнения, принадлежащие $L^\infty(0, \infty)$. Так как $\alpha_1=3$, $\alpha_2=1$, то $i\beta\pi=\frac{1}{4}(\alpha_1-\alpha_2)=\frac{1}{2}$ и

$$m-1=\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+\left[\frac{1}{4}(\alpha_1+\alpha_2)+i\beta\pi\right]=2.$$

Для функции $F(\lambda)$ — преобразования Фурье функции $ce^{-\delta t}$, справедливо представление (9):

$$F(\lambda)=\frac{c}{\lambda+i\delta}=\left(\frac{\lambda}{\lambda-i}\right)^2\frac{c_1}{\lambda+i\delta}+\frac{c_2}{\lambda-i}+\frac{c_3}{(\lambda-i)^2},$$

где

$$c_1=c\left(1+\frac{3}{\delta^2}\right),\ c_2=-\frac{3c}{\delta^2},\ c_3=\frac{ic}{\delta}\left(\frac{3}{\delta}-1\right),$$

следовательно

$$\pi^+ [g_2(\lambda) G(\lambda)] = \frac{g_2(-\delta i) c_1}{\lambda + i\delta}.$$

В данном случае $\frac{1}{4}(\alpha_1 + \alpha_2) = 1$, следовательно, в силу 3, уравнение (53) имеет в $L^-(0, \infty)$ единственное решение, которое определяется как прообраз Фурье функции

$$\Phi^+(\lambda) = g_1^{-1}(\lambda) \left(\frac{\lambda}{\lambda + i}\right)^2 \Phi_0^+(\lambda) \frac{g_2(-\delta i) c_1}{\lambda + \delta i}.$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 31.VIII.1981

Ա. Հ. ԲԱԲԱՅԱՆ. Վիներ–Հոպֆի հավասարման հատուկ դեպք *(ամփոփում)*

Աշխատանքում հետազոտվում է Վիներ-Հոպֆի ինտեգրալ հավասարումը $L_p(0, \infty)$ $1 < p < \infty$ *դասերում։*

Հավասարման $1 - K(\lambda)$ *սիմվոլը, զերոյի շրջակայքում ունի հետևյալ գնահատումները՝*

$$1 - K(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_1}, \ \lambda \to -0$$

$$1 - K(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_2}, \ \lambda \to +0$$

որտեղ $\alpha_1 - \alpha_2$ *իրական թիվ է։*

Գտնված են համասեռ հավասարման բոլոր լուծումները և նույնպես լուծման պայմանները ոչ համասեռ հավասարման համար, աջ մասի վրա որոշ սահմանափակումների դեպքում։

A. O. BABAYAN. *Degenerative case of Wiener—Hopf equation* (summary)

The paper investigates the Wiener—Hopf equation in $L^p(0, \infty)$, $1 < p < \infty$ classes. It is assumed that the $1 - K(\lambda)$ symbol of the equation admits the following behaviour at zero;

$$1 - K(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_1}, \ \lambda \to -0,$$

$$1 - K(\lambda) \sim |\lambda|^{\alpha_2}, \ \lambda \to +0,$$

where $\alpha_1 - \alpha_2$ is the real number. Conditions making the non-homogeneous equation solvable and all solutions of homogeneous integral equation have been found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. Г. Крейн.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН 13, вып. 5, 1958, 3—120.
2. *Ф. Д. Гахов, Ю. И. Черский.* Особые интегральные уравнения типа свертки, Изв. АН СССР, сер. матем., 20, № 1, 1956, 3—52.
3. *Н. Е. Товмасян.* Особый случай интегрального уравнения Винера—Хопфа, Сибирский матем. журнал, XIX, № 4, 1978, 902—922.
4. *Н. К. Карапетянц.* Интегральные уравнения Винера—Хопфа с символом, имеющим нуль дробного порядка, Дифф. уравнения, т. XIII, № 8, 1977, 1471—1479.
5. *З. Прёсдорф.* Некоторые классы сингулярных уравнений, М., 1972.
6. *М. И. Хайкин.* Однородное уравнение Винера—Хопфа в классе функций умеренного роста, Изв. вузов, матем., 8, 1978, 91—103.