ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 5, 1982 Математика

УДК 517.98

С. М. ПОЗИН, Л. А. САХНОВИЧ

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ С РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ

Введение

Рассмотрим ограниченный оператор S, действующий в пространстве $L^p(0, \omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ и определенный формулой

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^{\omega} f(t)\, s(x-t)\, dt, \tag{0.1}$$

где

$$s(x) \in L^q(-\omega, \omega), \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Если

$$s(x) = \int_0^x k(t)\, dt, \quad k(t) \in L(-\omega, \omega),$$

то мы получаем важный частный случай операторов вида (0.1):

$$Sf = \int_0^{\omega} f(t)\, k(x-t)\, dt. \tag{0.2}$$

Новый метод решения уравнения

$$Sf = \varphi \tag{0.3}$$

описан в статьях [1, 2].

При помощи этого метода в данной работе находятся условия ограниченности $f(x)$ и исследуется поведение $f(x)$ у концов интервала „0“ и „ω“. Отдельно рассматривается уравнение со специальной правой частью

$$SB(x, \lambda) = e^{i\lambda x}. \tag{0.4}$$

Уравнение (0.4) играет существенную роль в различных теоретических и прикладных задачах. Так, например, диаграмма рассеяния при дифракции на ленте совпадает с функцией [2, 3]

$$\rho(\lambda, \mu) = \int_0^{\omega} B(x, \lambda)\, e^{i\mu x}\, dx. \tag{0.5}$$

В статье также вводятся аналоги функций В. А. Амбарцумяна $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$, через которые выражается $\rho(\lambda, \mu)$. Полученные результаты иллюстрируются на примерах, имеющих важное значение в теории упругости [4, 5], гидродинамике [2, 6, 7) и других прикладных задачах.

§ 1. Ограниченность решений

1°. Сформулируем необходимый нам результат из статьи [2]:

Теорема 1.1. Пусть в $L^p(0, \omega)$ $(1 \leqslant p \leqslant 2)$ существуют такие функции $N_1(x)$, $N_2(x)$, что

$$SN_1 = s(x), \quad SN_2 = 1. \tag{1.1}$$

Если уравнение

$$Sf = 0 \tag{1.2}$$

имеет в $L^p(0, \omega)$ только тривиальное решение, то уравнение (0.3) при $\varphi \in W_q^{(2)}(0, \omega)$ имеет в $L^p(0, \omega)$ одно и только одно решение $f(x)$, которое можно представить следующим образом:

$$f(x) = P(\varphi) N_1(x) + Q(\varphi) \; N_2(x) + R(x; \varphi), \tag{1.3}$$

где

$$P(\varphi) = \int_0^{\omega} \varphi'(t) N_2(\omega - t)\, dt, \quad Q(\varphi) = \varphi(\omega) - \int_0^{\omega} \varphi'(t) N_1(\omega - t)\, dt, \tag{1.4}$$

$$R(x, \varphi) = -\int_x^{\omega} \varphi'(x - t + \omega) N_2(t)\, dt - \int_x^{\omega} \int_{\omega - x}^{\omega} \varphi''(x - t + s) [N_2(\omega - s) \times$$
$$\times N_1(t) - N_1(\omega - s) N_2(t)]\, ds dt. \tag{1.5}$$

(Через $W_q^{(2)}(0, \omega)$ обозначается класс функции $\varphi(x)$ таких, что $\varphi''(x) \in \in L^q(0, \omega)$).

2°. Введем еще обозначение

$$\|\varphi\|_p = \left[\int_0^{\omega} |\varphi(x)|^p \, dx \right]^{1/p}.$$

Тогда из (1.5) следует оценка

$$|R(x, \varphi)| < \|N_2\|_p [\|\varphi'\|_q + 2 \|N_1\|_p \|\varphi''\|_q]. \tag{1.6}$$

Сравнивая (1.3) и (1.6), получаем

$$f(x) = P(\varphi) N_1(x) + Q(\varphi) N_2(x) + O(1). \tag{1.7}$$

Из (1.7) непосредственно вытекает

Теорема 1.2. Пусть выполняются условия теоремы 1.1 и функция $C_1 N_1(x) + C_2 N_2(x)$ ограничена на сегменте $[0, \omega]$ лишь при $C_1 = C_2 = 0$. Тогда решение $f(x)$ уравнения (0.3) ограничено на сегменте $[0, \omega]$ в том и только в том случае, когда

$$P(\varphi) = 0, \quad Q(\varphi) = 0. \tag{1.8}$$

В ряде прикладных вопросов [5, 6] из физических соображений вытекает требование ограниченности решения $f(x)$. В частности, представляет интерес

Задача А. Пусть правая часть уравнения (0.3) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + C_1 + C_2 x. \tag{1.9}$$

Требуется так подобрать постоянные C_1 и C_2, чтобы соответствующее решение $f(x)$ было ограниченным на сегменте $[0, \omega]$.

Следствие 1.1. Если выполняются условия теоремы 1.2 и

$$R = \int_0^{\omega} N_2(t)\, dt \neq 0, \tag{1.10}$$

то задача А имеет одно и только одно решение.

В самом деле, из (1.4), (1.8) и (1.9) выводим:

$$C_2 = -\frac{1}{R}\int_0^{\omega} \varphi_0'(x) N_2(\omega - x) dx,$$

$$C_1 = \int_0^{\omega} [\varphi_0'(x) + C_2] N_1(\omega - x)\, dx - \varphi_0(\omega) - C_2\omega.$$

§ 2. Поведение решений при $x \to 0$ и $x \to \omega$

1°. Дополнительно к условиям теоремы 1.1 в данном параграфе будем предполагать, что

$$N_1(x) = \alpha_1 x^{-\gamma} + \beta_1(\omega - x)^{-\nu} + O(1) \quad (0 \leqslant x \leqslant \omega), \tag{2.1}$$

$$N_2(x) = \alpha_2 x^{-\gamma} + \beta_2(\omega - x)^{-\nu} + O(1) \quad (0 \leqslant x \leqslant \omega), \tag{2.2}$$

причем

$$\Delta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0, \ 0 < \gamma, \ \nu < 1. \tag{2.3}$$

Формула (1.7) принимает теперь вид

$$f(x) = P_1(\varphi) x^{-\gamma} + Q_1(\varphi)(\omega - x)^{-\nu} + O(1) \quad (0 \leqslant x \leqslant \omega), \tag{2.4}$$

где

$$P_1(\varphi) = \alpha_1 P(\varphi) + \alpha_2 Q(\varphi), \ Q_1(\varphi) = \beta_1 P(\varphi) + \beta_2 Q(\varphi). \tag{2.5}$$

В силу (2.4) верна

Теорема 2.1. *Пусть выполняются условия теоремы* 1.1 *и соотношения* (2.1)—(2.3). *Решение* $f(x)$ *уравнения* (0.3) *является ограниченным на левом конце* ($x = 0$) *интервала* (0, ω) *в том и только том случае, когда*

$$P_1(\varphi) = 0. \tag{2.6}$$

В теории движения подводного крыла [6] известен постулат Жуковского—Чаплыгина, согласно которому скорость у задней кромки крыла должна быть конечной. Это условие приводит к следующей задаче.

Задача В. Пусть правая часть уравнения (0.3) имеет вид

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + C. \tag{2.7}$$

Требуется так подобрать постоянную C, чтобы соответствующее решение $f(x)$ было ограниченным на левом конце ($x=0$) интервала $(0, \omega)$.

Следствие 2.1. Если выполняются условия теоремы 2.1 и

$$\alpha_2 \neq 0, \tag{2.8}$$

то задача В имеет одно и только одно решение. Действительно, из (1.4), (2.5)—(2.8) вытекает

$$C = -P_1(\varphi_0)/\alpha_2.$$

2°. В ряде работ по астрофизике [8, 9] рассматривались обратимые операторы вида

$$Sf = f(x) + \int_0^{\omega} f(t)\, k(x-t)\, dt, \quad k(x) \in L(-\omega, \omega).$$

В этом случае функция $B(x, \lambda)$, определенная соотношением (0.4), непрерывна на сегменте $[0, \omega]$. Функции В. А. Амбарцумяна [8] вводятся следующим образом:

$$X(\lambda) = B(0, \lambda); \quad Y(\lambda) = B(\omega, \lambda). \tag{2.9}$$

Как известно [8, 9], $\rho(\lambda, \mu)$ выражается через $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$.

При условиях (2.1)—(2.2) функции В. А. Амбарцумяна теряют смысл. Далее вводятся аналоги функций В. А. Амбарцумяна, при помощи которых снова удается выразить $\rho(\lambda, \mu)$.

Теорема 2.2. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.1 *и соотношения* (2.1)—(2.3). *Тогда существуют пределы*

$$X(\lambda) = \lim_{x\to 0} B(x, \lambda)\, x^{\gamma}, \quad Y(\lambda) = \lim_{x\to\omega} B(x, \lambda)(\omega - x)^{\gamma}$$

и справедливо равенство

$$\rho(\lambda, \mu) = -i\, e^{i\omega\mu} \frac{X(\lambda)\, Y(-\mu) - X(-\mu)\, Y(\lambda)}{(\lambda+\mu)\,\Delta}. \tag{2.10}$$

Доказательство. При условиях теоремы 1.1 верно равенство [2]

$$\rho(\lambda, \mu) = -ie^{i\omega\mu}\, \frac{a(\lambda)\, b(-\mu) - b(\lambda)\, a(-\mu)}{\lambda+\mu}, \tag{2.11}$$

где

$$a(\lambda) = i\lambda \int_0^{\omega} e^{i\lambda t} N_2(\omega - t)\, dt, \quad b(\lambda) = e^{i\lambda\omega} - i\lambda \int_0^{\omega} e^{i\lambda t} N_1(\omega - t)\, dt. \tag{2.12}$$

Из соотношний (1.3), (1.4) и (2.1), (2.2) выводим

$$X(\lambda) = a(\lambda)\, \alpha_1 + b(\lambda)\, \alpha_2, \quad Y(\lambda) = a(\lambda)\, \beta_1 + b(\lambda)\, \beta_2. \tag{2.13}$$

Согласно (2.3) из (2.13) получаем

$$a(\lambda) = \frac{1}{\Delta}\left[\beta_2 X(\lambda) - \alpha_2 Y(\lambda)\right],\quad b(\lambda) = \frac{1}{\Delta}\left[-\beta_1 X(\lambda) + \alpha_1 Y(\lambda)\right]. \tag{2.14}$$

Сопоставляя (2.11) и (2.14), убеждаемся в справедливости доказываемого соотношения (2.10).

§ 3. Примеры

Рассмотрим интегральные уравнения, встречающиеся в прикладных задачах. Для каждого из этих уравнений найдем решения $N_1(x)$ и $N_2(x)$, принадлежащие пространству $L^p(0, \omega)$ $(1 < p < 2)$ и удовлетворяющие условиям (2.1)—(2.3). Тем самым будет доказано, что утверждения, содержащиеся в §§ 1, 2 верны для рассматриваемых уравнений.

Пример 1. Запишем уравнение

$$Sf \equiv \int_0^\omega f(t)\left[\ln\frac{A}{2|x-t|} + r(x-t)\right]dt = \varphi(x),\quad \varphi \in W_q^{(2)}(0, \omega), \tag{3.1}$$

где $A > 0$, $A \neq \frac{\omega}{2}$.

Предположим, что уравнение

$$Sf = 0 \tag{3.2}$$

имеет только тривиальное решение и при некотором C выполняется неравенство

$$|r''(x)| \leqslant C \quad (-\omega \leqslant x \leqslant \omega). \tag{3.3}$$

Оператор вида (3.1), (3.3) появляется при рассмотрении контактных задач теории упругости в отсутствии сил трения между сжимаемыми телами [4].

Функции $N_1(x)$ и $N_2(x)$, удовлетворяющие уравнениям (1.1) существуют и имеют следующий вид [2]:

$$N_l(x) = \alpha_l x^{-\frac{1}{2}} + \beta_l(\omega - x)^{-\frac{1}{2}} + O(1) \quad (l = 1, 2). \tag{3.4}$$

Введем оператор S_0 равенством

$$S_0 f = \int_0^\omega f(t)\ln\frac{A}{2|x-t|}\,dt.$$

Через $N_2^0(x)$ и $L_2^0(x)$ обозначим решения следующих уравнений:

$$S_0 N_2^0(x) = 1,\quad S_0 L_2^0(x) = X. \tag{3.5}$$

Известно, что [10]

$$N_2^0(x) = \frac{R}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(\omega-x)}},\quad R = \left(\ln\frac{2A}{\omega}\right)^{-1}, \tag{3.6}$$

$$L_2^0(x) = \frac{\omega}{2}N_2^0(x) + \frac{1}{\pi}\frac{x - \frac{\omega}{2}}{\sqrt{x(\omega-x)}}. \tag{3.7}$$

Из (3.1) и (3.5) вытекает:

$$SN_2^0=\varphi_1,\ SL_2^0=\varphi_2, \tag{3.8}$$

где

$$\varphi_1(x)=1-\int_0^\omega N_2^0(t)\,r(x-t)\,dt,\ \varphi_2(x)=X-\int_0^\omega L_2^0(t)\,r(x-t)\,dt. \tag{3.9}$$

Как видно из (3.3) и (3.9) $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x)\in W_q^2(0,\omega)$. Поскольку уравнение (3.2) имеет только тривиальное решение, то по теореме 1.1 уравнения (3.8) имеют единственные решения, которые можно записать так:

$$\begin{cases} N_2^0(x)=P(\varphi_1)\,N_1(x)+Q(\varphi_1)\,N_2(x)+O(1)\\ L_2^0(x)=P(\varphi_2)\,N_1(x)+Q(\varphi_2)\,N_2(x)+O(1). \end{cases} \tag{3.10}$$

Из формул (3.6), (3.7) следует, что любая нетривиальная линейная комбинация $N_2^0(x)$ и $L_2^0(x)$ является неограниченной функцией. Тогда из (3.10) вытекает, что этим же свойством обладает пара функций $N_1(x)$ и $N_2(x)$. Значит, в силу (3.4) получаем

$$\Delta=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0.$$

Теперь для функции $B(x,\lambda)$, являющейся решением уравнения (0.4), верны соотношения

$$B(x,\lambda)=\frac{X(\lambda)}{\sqrt{x}}+O(1)\ (x\to 0);\ \ B(x,\lambda)=\frac{Y(\lambda)}{\sqrt{\omega-x}}+O(1)\ (x\to\omega). \tag{3.11}$$

Функции $X(\lambda)$ и $Y(\lambda)$, определенные равенством (3.11), являются аналогами функций В. А. Амбарцумяна (2.9) из § 2. Функция $\rho(\lambda,\mu)$ вычисляется по формуле (2.10). В некоторых частных случаях аналоги функций В. А. Амбарцумяна вводились в работах [2, 11].

Пример 2. Запишем уравнение Т. Карлемана [10]

$$S_0 f\equiv\int_0^\omega f(t)\,|x-t|^{-h}\,dt=\varphi(x),\ 0<h<1,\ \varphi\in W_q^{(2)}. \tag{3.12}$$

Известно [10], что функции $N_2^0(x)$ и $L_2^0(x)$, удовлетворяющие уравнениям

$$S_0N_2^0=1,\ S_0L_2^0=X, \tag{3.13}$$

имеют следующий вид:

$$N_2^0(x)=\frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi h}{2}\,[x(\omega-x)]^{\frac{h-1}{2}}, \tag{3.14}$$

$$L_2^0(x)=\left(\frac{\omega}{2}+\frac{x-\frac{\omega}{2}}{h}\right)N_2^0(x). \tag{3.15}$$

Через T_0 обозначим оператор, являющийся правым обратным к S_0. В работах [2, 12], исследуя оператор T_0 в форме [1], было доказано, что при $f'(x) \in L^p(0, \omega)$ $\left(\frac{2}{1+h} < p \leqslant 2\right)$

$$S_0 T_0 f = f \tag{3.16}$$

и имеет место следующая оценка:

$$|T_0 f| \leqslant \text{const}\,[x(\omega - x)]^{\frac{h-1}{2}}. \tag{3.17}$$

Пусть $f'(x) \in L^{P_1}(0, \omega)$, где $\frac{2}{1+h} < P_1 < \min\left[\frac{1}{h}, 2\right]$. Тогда функция

$$\frac{d}{dx} S_0 f = f(0)\, x^{-h} - f(\omega)(\omega - x)^{-h} + \int_0^\omega f'(t)\, |x-t|^{-h}\, dt$$

принадлежит $L^{P_1}(0, \omega)$. Отсюда и из (3.16) выводим, что если $f'(x) \in L^{P_1}(0, \omega)$ и уравнение $S_0 f = 0$ имеет только тривиальное решение, то

$$T_0 S_0 f = f. \tag{3.18}$$

Рассмотрим теперь возмущенное уравнение Т. Карлемана:

$$Sf \equiv \int_0^\omega f(t)\,[|x-t|^{-h} + r(x-t)]\, dt = \varphi(x),\ 0 < h < 1,\ \varphi \in W_p^{(2)}(0, \omega). \tag{3.19}$$

Предположим, что уравнение

$$Sf = 0 \tag{3.20}$$

имеет в $L^p(0, \omega)$ только тривиальное решение и при некотором C выполняется неравенство

$$|r''(x)| \leqslant C \quad (-\omega \leqslant x \leqslant \omega)). \tag{3.21}$$

К уравнению (3.19), (3.21) приводит рассмотрение контактной задачи нелинейной теории ползучести [13].

Методом регуляризации [2] легко доказывается, что если уравнение (3.20) имеет только тривиальное решение и $\varphi'(x) \in L^{P_1}(0, \omega)$, $\frac{2}{1+h} < P_1 < \min\left[\frac{1}{h}, 2\right]$, то уравнение (3.19), (3.21) имеет в $L^{P_1}(0, \omega)$ одно и только одно решение и существуют функции $N_1(x), N_2(x) \in L^{P_1}(a, \omega)$, удовлетворяющие уравнениям

$$SN_1 = \int_0^x [|t|^{-h} + r(t)]\, dt,\quad SN_2 = 1. \tag{3.22}$$

Из (3.12), (3.19) и (3.22) имеем

$$S_0 N_1 = g_1,\quad S_0 N_2 = g_2, \tag{3.23}$$

где

$$g_1=\int_0^x [|t|^{-h}+r(t)]\,dt-\int_0^\omega N_1(t)\,r(x-t)\,dt,\quad g_2=1-\int_0^\omega N_2(t)\,r(x-t)\,dt.$$

Поскольку $g_1'(x),\ g_2'(x)\in L^{p_1}(0,\omega)$, то применяя оператор T_0 к левым и правым частям равенств (3.23) и учитывая (3.17), получим

$$N_l=\alpha_l x^{\frac{h-1}{2}}+\beta_l(\omega-x)^{\frac{h-1}{2}}+O(1)\quad (l=1,2).$$

Тот факт, что

$$\Delta=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$$

доказывается так же как и в примере 1.

Пример 3. В контактных задачах теории упругости при наличии сил трения возникает оператор [4]

$$Sf=\int_0^x f(t)\,dt+\mu\int_0^\omega f(t)\ln\frac{1}{|x-t|}\,dt. \tag{3.24}$$

Оператор S может быть представлен в форме (0.1), если положить

$$s(x)=\mu\int_0^x \ln\frac{1}{u}\,du+x\quad (x>0),\quad s(x)=\mu\int_0^x \ln\frac{1}{|u|}\,du\quad (x<0). \tag{3.25}$$

Введем обозначение

$$\lambda=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\pi\mu}\left(-\frac{1}{2}<\lambda<\frac{1}{2}\right). \tag{3.26}$$

Используя представление оператора $T=S^{-1}$ [4], легко показать, что функции $N_2(x)$ и $L_2(x)$, удовлетворяющие уравнениям

$$SN_2=1 \text{ и } SL_2=X,$$

имеют следующий вид:

$$N_2(x)=\frac{C_0}{X^{\frac{1}{2}+\lambda}(\omega-x)^{\frac{1}{2}-\lambda}},\quad L_2(x)=\frac{C_1+C_2X}{X^{\frac{1}{2}+\lambda}(\omega-x)^{\frac{1}{2}-\lambda}}, \tag{3.27}$$

где

$$C_0=\frac{\cos\pi\lambda}{\pi\mu D_1},\quad D_1=\ln\frac{1}{\omega}+\psi(1)+\psi\left(\frac{1}{2}-\lambda\right), \tag{3.28}$$

$$C_1=-\frac{\omega\cos\pi\lambda}{\pi\mu}\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\frac{D_2}{D_1},\quad D_2=\ln\frac{1}{\omega}+\psi(2)-\psi\left(\frac{3}{2}-\lambda\right), \tag{3.29}$$

$$C_2=\frac{\cos\pi\lambda}{\pi\mu},\quad \psi(x)=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \tag{3.30}$$

Мы предполагаем ω таким, что $D_1\neq 0$.

Из (3.27) имеем

$$R=\int_0^{\omega} N_2(t)\,dt=\frac{1}{\mu D_1}\neq 0. \tag{3.31}$$

Как показано в работе [2], функция $N_1(x)$ может быть определена по формуле

$$N_1(x)=\frac{1}{R}\left[L_2(x)-\frac{\omega}{2}N_2(x)+\int_x^{\omega} N_2(t)\,dt\right]. \tag{3.32}$$

Из (3.27) и (3.32) выводим

$$N_l=\alpha_l x^{-\frac{1}{2}-\lambda}+\beta_l(\omega-x)^{-\frac{1}{2}+\lambda}+O(1)\ (l=1,2), \tag{3.33}$$

где

$$\alpha_1=\frac{\omega^{\lambda}}{R\sqrt{\omega}}\left(C_1-\frac{\omega}{2}C_0\right),\quad \beta_1=\frac{\omega^{-\lambda}}{R\sqrt{\omega}}\left(C_1+\omega C_2-\frac{\omega}{2}C_0\right), \tag{3.34}$$

$$\alpha_2=\frac{\omega^{\lambda}C_0}{\sqrt{\omega}},\quad \beta_2=\frac{\omega^{-\lambda}C_0}{\sqrt{\omega}}. \tag{3.35}$$

Из (2.3), (3.31), (3.34) и (3.35) вытекает

$$\Delta=-\frac{C_0C_2}{R}=-\frac{\cos^2\pi\lambda}{\pi^2\mu}\neq 0. \tag{3.36}$$

Пример 4. При рассмотрении контактной задачи теории ползучести с учетом сил трения [14] и в теории случайных процессов [15] большую роль играет оператор вида

$$Sf=\int_0^{\omega} f(t)\,\frac{a_2+a_1\,\mathrm{sign}\,(x-t)}{|x-t|^{1-\mu}}\,dt,\ 0<\mu<1,\ a_2>a_1\geqslant 0. \tag{3.37}$$

Решение $N_2(x)$ уравнения $SN_2=1$ имеет вид [14]:

$$N_2(x)=Dx^{-\rho}(\omega-x)^{\rho-\mu}\quad (0<\rho<\mu<1), \tag{3.38}$$

где

$$D=\frac{H}{\pi},\ \rho=\frac{1}{\pi}\arcsin\,(a_1+a_2)\,H, \tag{3.39}$$

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sin\pi\mu}{\sqrt{a_1^2\,(1-\cos\pi\mu)+a_2^2\,(1+\cos\mu\pi)}}. \tag{3.40}$$

Используя этот результат можно показать, что функция $L_2(x)$, удовлетворяющая уравнению $SL_2=x$, равна

$$L_2(x)=\left(\omega\frac{\rho-\mu}{1-\mu}+\frac{x}{1-\mu}\right)N_2(x). \tag{3.41}$$

Обозначив через $B(\rho,\mu)$ бета-функцию, запишем:

$$R = \int_0^\infty N_2(t)\,dt = D\omega^{1-\mu} B(1-\rho,\, 1+\rho-\mu) \neq 0. \tag{3.42}$$

Из (3.38) и (3.41), учитывая соотношение (3.32) между функциями $N_1(x)$, $N_2(x)$ и $L_2(x)$, получим

$$N_l(x) = \alpha_l\, x^{-\rho} + \beta_l(\omega - x)^{\rho-\mu} + O(1),\quad (l=1,\,2), \tag{3.43}$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{R} D\omega^{1+\rho-\mu}\left(\frac{\rho-\mu}{1-\mu} - \frac{1}{2}\right),\quad \beta_1 = \frac{1}{R}\, D\omega^{1-\rho}\left(\frac{1+\rho-\mu}{1-\mu} - \frac{1}{2}\right), \tag{3.44}$$

$$\alpha_2 = D\omega^{\rho-\mu},\quad \beta_2 = D\omega^{-\rho}. \tag{3.45}$$

Из формул (2.3), (3.42), (3.44) и (3.45) следует:

$$\Delta = -\frac{D}{(1-\mu)\, B(1-\rho,\, 1+\rho-\mu)} \neq 0.$$

Одесский филиал Киевского
проектно-конструкторского бюро АСУ

Поступила 27.III.1981

Ս. Մ. ՊՈԶԻՆ, Լ. Ա. ՍԱԽՆՈՎԻՉ. Տարբերական կորիզով հավասարման լուծումների վարքի մասին (*ամփոփում*)

Դիտարկվում են

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^\infty f(t)\, s(x-t)\, dt = \varphi(x)$$

տեսքի հավասարումներ, որտեղ S օպերատորը սահմանափակ է և գործում է $L^p(0,\,\omega)$ $(1 < p < 2)$ *տարածության մեջ։ Գտնվում են այն պայմանները, որոնց դեպքում* $f(x)$ *լուծումը լինում է սահմանափակ և հետազոտվում է* $f(x)$*-ի վարքը* $(0,\,\omega)$ *ինտերվալի ծայրակետերի մոտ։ Առանձին դիտարկվում է* $\varphi(x) = e^{i\lambda x}$ *հատուկ աջ մասով հավասարումը և մտցվում են Վ. Հ. Համբարձումյանի ֆունկցիաների անալոգները։*

Ստացված արդյունքները լուսաբանվում և ճշգրտվում են առաձգականության տեսության, հիդրոդինամիկայի, պատահական պրոցեսների տեսության մեջ և ուրիշ կիրառական խնդիրներում կարևոր նշանակություն ունեցող օրինակների վրա։

S. M. POZIN, L. A. SAKHNOVICH. *On solution behaviour of the equation with difference nucleus* (summary)

The equation of the form of

$$Sf = \frac{d}{dx}\int_0^\infty f(t)\, s(x-t)\, dt = \varphi(x),$$

are considered, where the operator S is bounded and acts in the space $L^p(0,\,\omega)$ $(1 < p < 2)$. The conditions for having bounded solutions $f(x)$ are found and solution's behaviour at the ends of the interval $(0,\,\omega)$ is considered. The equations with $\varphi(x) = e^{i\lambda x}$ is considered separately and V. H. Hambartsumian's functions analagues are considered.

The results are illustrated and made precise on the examples of importance in the theory of elasticity, hydromechanics, in the theory of random processes and in, other applied problems.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Сахнович.* Об интегральном уравнении с ядром, зависящим от разности аргументов, Математические исследования, Кишинев, 8—2, 1973, 138—146.
2. *Л. А. Сахнович.* Уравнения с разностным ядром на конечном отрезке, УМН, 35:4, 1980, 64—129.
3. *H. Hönt, A. W. Maae, K. Westpfahl.* Theorie der beugung, Berlin, Springer—Verlag, 1961. (русский перевод: Х. Хенл. Л. Мауэ, К. Вестпфаль, Теория дифракции, М., „Мир", 1964).
4. *И. Я. Штаерман.* Контактная задача теории упругости, М.—Л., Гостехиздат, 1949.
5. *И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко.* Неклассические смешанные задачи теории упругости, М., «Наука», 1974.
6. *М. В. Келдыш, М. А. Лаврентьев.* О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости, Труды конференции по теории волнового сопротивления, ЦАГИ, 1937.
7. *Л. А. Сахнович.* Об уравнении обтекания подводного крыла, Тезисы докладов (Крыловские чтения), 1980, 136—138.
8. *В. А. Амбарцумян.* Научные труды, т. 1, Ереван, 1960.
9. *В. В. Соболев.* Рассеяние света в атмосферах планет, М., «Наука», 1972.
10. *T. Carleman.* Zur Theorie der linearen Integraleichungen, Math. Z., 9, 1921, 196—217.
11. *Ю. Н. Лебедев.* Аналоги функций Амбарцумяна для задачи дифракции на полосе, Радиотехника и электроника, 24:8, 1979, 1663—1665.
12. *С. М. Позин.* Об одном специальном уравнении первого рода, Украинский математический журнал, 28:4, 1976, 551—554.
13. *Н. Х. Арутюнян.* Плоская контактная задача теории ползучести, Прикладная математика и механика, XXIII, вып. 5, 1959, 901—924.
14. *Н. Х. Арутюнян, М. М. Манукян.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения, Прикладная математика и механика, XXVII, вып. 5, 1963, 813—820.
15. *M. Kac.* On some connections between probability theory and differential and integral equations, Proc. Sec. Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., Berkeley 1951, 189—215. (Русский перевод: Кац М. О некоторых связях теории вероятности с дифференциальными и интегральными уравнениями, Периодический сборник переводов иностранных статей, Математика, т. I, № 2, 1957, 95—124).