ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 4, 1982 Математика

УДК 517.51

М. М. ДЖРБАШЯН, В. М. МАРТИРОСЯН

К ТЕОРИИ α-КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИХ КЛАССОВ

§ 0. Введение и предварительные сведения

0.1. После того, как А. Данжуа [1] открыл некоторые достаточные и, наряду с тем, также необходимые условия квазианалитичности, Т. Карлеман [2] дал исчерпывающее решение проблемы Ж. Адамара [3] для класса $C\{[0, +\infty); M_n\}$. Это класс ограниченных и бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} |\varphi^{(n)}(x)| < A_\varphi B_\varphi^n M_n \quad (n=1, 2, \cdots), \tag{0.1}$$

где $A_\varphi > 0$ и $B_\varphi > 0$ — постоянные, зависящие, вообще говоря, только от функции φ, а $\{M_n\}_1^\infty$ — произвольная последовательность положительных чисел.

Как известно, для случая полуоси $[0, +\infty)$ проблема заключалась в следующем:

Какими должны быть последовательности $\{M_n\}_1^\infty$, чтобы соответствующие классы $C\{[0, +\infty); M_n\}$ были квазианалитическими, т. е. чтобы для любой функции $\varphi(x) \in C\{[0, +\infty); M_n\}$ из условий

$$L_n \varphi \equiv \varphi^{(n)}(0) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{0.2}$$

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$?

Впоследствии А. Островский [4] дал эквивалентное условию Т. Карлемана более простое условие квазианалитичности класса $C\{[0, +\infty); M_n\}$. В его формулировке теорема Данжуа—Карлемана гласит.

Теорема А. *Для квазианалитичности класса $C\{[0, +\infty); M_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = +\infty, \tag{0.3}$$

где

$$T(r) = \sup_{n\geq 1} \frac{r^n}{M_n}. \tag{0.4}$$

Отметим, что до 1968 г., т. е. в течение четырех десятков лет, ни в одной работе о квазианалитических классах, в том числе и в целой серии работ С. Мандельбройта, подытоженных в его известной

монографии [5], не содержалось даже попытки выйти из рамок классической квазианалитичности, поскольку в них всегда условие

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = +\infty$$

предполагалось безусловно выполненным.

0.2 (а). Согласно теореме А Данжуа—Карлемана при условии

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr < +\infty \tag{0.5}$$

класс функций $C\{[0, +\infty); M_n\}$ будет заведомо неквазианалитическим. А именно, как хорошо известно, при условии (0.5) существуют нетривиальные функции $\varphi(x)$ из класса $C\{[0, +\infty); M_n\}$ и, более того, как легко можно показать [6], удовлетворяющие условиям вида

$$|\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n e^{-\nu x};\ x \in [0, +\infty)(\nu > 0;\ n = 1, 2, \cdots),$$

для которых $\varphi^{(n)}(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$.

В связи с этим естественно возник следующий вопрос [7]:

Если класс $C\{[0, +\infty); M_n\}$ — неквазианалитический, то какие данные вместо последовательности значений $\varphi^{(n)}(0)(n = 0, 1, 2, \cdots)$ определяют функции этого класса единственным образом?

(б) Именно в связи с этим вопросом первым из авторов данной статьи, по существу, была поставлена следующая общая проблема [7], сводящаяся при $\gamma = 1$ к отмеченной выше классической проблеме, полностью решенной Данжуа и Карлеманом.

Пусть $\{M_n\}_0^\infty$ — произвольная последовательность положительных чисел и $T(r) = \sup\limits_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}$. Для заданного значения параметра γ $(0 < \gamma < +\infty)$ какими должны быть подклассы $C_\gamma\{M_n\} \subset C\{[0, +\infty); M_n\}$ и простейшие функционалы $\{L_n^\gamma \varphi\}_0^\infty$, чтобы лишь при

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = +\infty \tag{0.6}$$

для любой функции $\varphi(x) \in C_\gamma\{M_n\}$ из равенств

$$L_n^\gamma \varphi = 0\ (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{0.7}$$

следовало тождество

$$\varphi(x) \equiv 0,\ x \in [0, +\infty).$$

При этом для достижения решения этой проблемы оказалось целесообразным ввести новый параметр α посредством соотношения

$$\gamma = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\ (-1 < \alpha < 1). \tag{0.8}$$

Следует заметить, что тогда:

1) если $0 < \alpha < 1$, то $0 < \gamma \leqslant 1$;

2) если $-1<\alpha<0$, то $1<\gamma<+\infty$.

На пути решения проблемы (0.6)—(0.7) был введен класс $C_\alpha^{(-)}$ $(-1<\alpha<1)$ бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty} \{(1+x^{|\alpha| m})\,|\varphi^{(n)}(x)|\}<+\infty \quad (n, m=0, 1, 2, \cdots), \tag{0.9}$$

и его подклассы $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}\subset C_\alpha^{(-)}$ тех функций $\varphi(x)\in C_\alpha^{(-)}$, для которых

$$\sup_{0<x<+\infty} \{(1+|\alpha|\,x^2)|\,\varphi^{(n)}(x)|\}<A_\varphi B_\varphi^n M_n \tag{0.10}$$

$$(n=1, 2, \cdots).$$

Метод, открытый в исследовании [7] для решения поставленной общей проблемы, естественным образом привел к раскрытию явного вида простейших функционалов единственности сначала в случае $0\leqslant\alpha<1$.

Затем этот же метод позволил А. А. Китбаляну [8] получить вид соответствующих функционалов и в случае $-1<\alpha<0$.

Для значений параметра $0\leqslant\alpha<1$ (*т. е. при* $0<\gamma\leqslant 1$) *эти функционалы имеют вид**

$$L_n^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_0^{+\infty}\varphi^{(n)}(t)\,t^{\alpha n-1}\,dt \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{0.11}$$

Для значений же $-1<\alpha<0$ (*т. е. при* $1<\gamma<+\infty$) *вид надлежащих функционалов таков:*

$$L_n^\alpha\varphi=\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_0^{+\infty}\varphi^{(2\alpha)}(t)\,t^{(1+\alpha)n-1}\,dt \quad (n=0, 1, 2, \cdots). \tag{0.12}$$

Полное решение общей проблемы (0.6)—(0.7) для принципиально важнейшего случая, когда $0<\alpha<1$ (т. е. при $0<\gamma<1$), т. е. именно *для случая неквазианалитических классов функций*, было дано в 1968 г. в исследовании [7]. При этом соответствующие классы единственности были названы *α-квазианалитическими*.

Для случая же $-1<\alpha<0$ (т. е. при $1<\gamma<+\infty$) (*а в этом случае функции рассматриваемых классов оказались целыми*) решение проблемы (0.6)—(0.7) содержится в работе [8], в которой развитый уже в исследовании [7] метод естественным образом был распространен и на этот случай.

Общая теорема для всех α $(-1<\alpha<1)$ гласит.

Теорема Б. *Для того, чтобы класс* $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1<\alpha<1)$ *был α-квазианалитическим, т. е. чтобы для любой функции* $\varphi(x)\in C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$ *из условий*

$$L_n^\alpha\varphi=0 \quad (n=0, 1, 2, \cdots) \tag{0.13}$$

* В [7] было показано, что при $n=0$ или $\alpha=0$ естественно полагать $L_0^\alpha\varphi=\varphi(0)$ и $L_n^0\varphi=L_n\varphi=\varphi^{(n)}(0)$ $(n>0)$ соответственно.

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)\, dr}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}} = +\infty. \tag{0.14}$$

При установлении этой теоремы в исследовании [7] (аналогично в работе [8]) проблема решалась сначала для других классов $C_\alpha^*\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1)$, определяемых посредством интегро-дифференциальных операторов дробного порядка, а затем уже совершался переход к решению проблемы для классов $C_\alpha\{[0, +\infty); M_n\}$. Для формулировки соответствующего результата и надлежащих пояснений приведем некоторые известные определения и факты, которые нужны нам и при дальнейшем изложении.

0.3 (а). Пусть $f(x) \in L(0, l)$ $(0 < l < +\infty)$ — произвольная функция. Тогда при данном α $(0 < \alpha < +\infty)$ функцию

$$D_0^{-\alpha} f(x) \equiv \frac{d^{-\alpha} f(x)}{dx^{-\alpha}} \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)\, dt, \quad x \in (0, l), \tag{0.15}$$

принято называть *интегралом от* $f(x)$ *порядка* α *в смысле Римана—Лиувилля с началом в точке* $x = 0$.

Известно, что при данном α $(0 < \alpha < 1)$ функция $D_0^{-\alpha} f(x)$ определена почти всюду на $(0, l)$ и вновь принадлежит классу $L(0, l)$, а при $1 \leqslant \alpha < +\infty$ эта функция, очевидно, абсолютно-непрерывна на $[0, l]$.

Известно также, что во всех точках Лебега $x \in (0, l)$ функции $f(x)$

$$\lim_{\alpha \to +0} D_0^{-\alpha} f(x) = f(x),$$

поэтому естественно интеграл нулевого порядка отождествить с самой функцией $f(x)$ и положить

$$[D_0^{-\alpha} f(x)]_{\alpha=0} \equiv f(x), \quad x \in [0, l]. \tag{0.15'}$$

Предположим теперь, что функция $f(x) \in L(0, l)$ такова, что при данном α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ интеграл Римана—Лиувилля $D_0^{-(1-\alpha)} f(x)$ почти всюду на $(0, l)$ обладает производной, причем не обязательно суммируемой. Тогда функцию

$$D_0^{\alpha} f(x) \equiv \frac{d^{\alpha} f(x)}{dx^{\alpha}} \equiv \frac{d}{dx} D_0^{-(1-\alpha)} f(x) \tag{0.16}$$

называют *производной порядка* α *от* $f(x)$ *с началом в точке* $x = 0$.

Отметим при этом, что ввиду (0.15′) будем иметь

$$D_0^1 f(x) = f'(x). \tag{0.16'}$$

Таким образом, операторы $D_0^{-\alpha} f(x)$ определены для любого значения параметра α $(-1 \leqslant \alpha < +\infty)$.

Приведем еще две формулы, которыми воспользуемся в следующем параграфе: при $-1<\gamma<+\infty$ и $0<\alpha<+\infty$

$$D_0^{-\alpha}\left\{\frac{x^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1+\gamma)}\int_0^x (x-t)^{\alpha-1}\,t^\gamma\,dt=$$

$$=\frac{x^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)},\quad x\in(0,+\infty); \tag{0.17}$$

$$D_l^{-\alpha}\left\{\frac{(l-x)^\gamma}{\Gamma(1+\gamma)}\right\}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1+\gamma)}\int_x^l (t-x)^{\alpha-1}\,(l-t)^\gamma\,dt=$$

$$=\frac{(l-x)^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(1+\gamma+\alpha)},\quad x\in(0,l). \tag{0.18}$$

Отметим, что эти и более подробные сведения о свойствах операторов Римана—Лиувилля приведены в гл. IX монографии [9].

(б) Известно, что функции вида

$$x^{\mu-1}\,E_\rho(\lambda x^{1/\rho};\ \mu)\ (\rho>0,\ \mu>0),$$

где

$$E_\rho(z;\ \mu)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{\Gamma\left(\mu+\dfrac{n}{\rho}\right)} \tag{0.19}$$

— целая функция типа Миттаг—Леффлера порядка ρ и типа 1, а λ — произвольный, вообще говоря, комплексный параметр, являются решениями задач типа задачи Коши для специальных дифференциальных операторов дробного порядка.

В частности, полагая, что $-1<\alpha<1$ и обозначая

$$\frac{1}{\rho}=(1-\alpha)\ \left(\frac{1}{2}<\rho<+\infty\right), \tag{0.20}$$

для функции

$$\mathrm{E}_\rho(x;\ \lambda)=E_\rho\left(\lambda x^{\frac{1}{\rho}};\ \frac{1}{\rho}\right)x^{\frac{1}{\rho}-1} \tag{0.21}$$

можно утверждать следующее:

1°. *Функция* $\mathrm{E}_\rho(x,\ \lambda)$ *является решением следующей задачи типа Коши на полуоси* $[0,\ +\infty)$:

$$D_0^{1/\rho}\,y(x)-\lambda y(x)=0, \tag{0.22}$$

$$D_0^{-\alpha}\,y(x)|_{x=0}=1. \tag{0.23}$$

При этом в случае $0\leqslant\alpha<1$ $(1\leqslant\rho<+\infty)$

$$D_0^{1/\rho}\,y(x)=\frac{d}{dx}\,D_0^{-\alpha}\,y(x), \tag{0.24}$$

а в случае $-1<\alpha<0\left(\frac{1}{2}<\rho<1\right)$ —

$$D_0^{1/\rho} y(x) = \frac{d}{dx} D_0^{-(1+\varepsilon)} \frac{d}{dx} y(x). \tag{0.25}$$

То обстоятельство, что посредством функций типа Миттаг—Леффлера могут быть представлены решения задач типа Коши для гораздо более общих интегро-дифференциальных операторов дробного порядка, впервые было установлено в работах [10, 11]. Что касается приведенной выше менее общей задачи типа Коши (0.22) — (0.23), то при надлежащих значениях параметра $-1 < \alpha < 1$ она была приведена в работе [7], а затем в [8].

(в) Известно, что функции вида

$$e_\rho(x;\ \lambda) = e^{-\lambda^\rho x}\left(|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2\rho},\ \frac{1}{2} < \rho < +\infty\right)$$

также являются решениями задач типа задачи Коши, но уже для дифференциальных операторов дробного порядка в смысле Вейля.

Напомним, что если функция $\varphi(x)$ определена и измерима на полуоси $(0, +\infty)$, то, в предположении их существования, почти всюду на полуоси $(0, +\infty)$ можно ввести в рассмотрение функции

$$D_\infty^{-\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha-1} \varphi(t)\, dt \quad (0 < \alpha < +\infty) \tag{0.26}$$

и

$$D_\infty^{\alpha} \varphi(x) \equiv \frac{d}{dx} D_\infty^{-(1-\alpha)} \varphi(x) \quad (0 < \alpha \leqslant 1). \tag{0.27}$$

Функции эти принято называть, соответственно, *интегралом и производной от* $\varphi(x)$ *по Вейлю порядка* α.

Простейшее условие, обеспечивающее существование интеграла $D_\infty^{-\alpha} \varphi(x)$ $(0 < \alpha < +\infty)$ заключается в следующем:

Если $x^\alpha \varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$, *то интеграл* $D_\infty^{-\alpha} \varphi(x)$ *существует почти всюду на* $(0, +\infty)$ *и принадлежит* $L_1(0, +\infty)$.

Если не только $\varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$, но и $x^\alpha \varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$ при некотором $\alpha > 0$, то можно доказать, что во всех точках Лебега $x \in (0, +\infty)$ функции $\varphi(x)$

$$\lim_{\alpha \to +0} D_\infty^{-\alpha} \varphi(x) = \varphi(x).$$

Поэтому и в случае интегралов $D_\infty^{-\alpha} \varphi(x)$ естественно положить

$$[D_\infty^{-\alpha} \varphi(x)]_{\alpha=0} = \varphi(x). \tag{0.26'}$$

Отсюда, в силу (0.27), будем иметь

$$D_\infty^{1} \varphi(x) = \varphi'(x), \tag{0.28}$$

т. е. оператор D_∞^1 совпадает с оператором обычного дифференцирования.

По поводу отмеченных выше свойств операторов Вейля см., напр., [7].

Имея ввиду эти определения, можно утверждать следующее:

2°. *Функция*

$$e_\rho(x;\ \lambda) = e^{-\lambda^\rho x}\left(|\arg\lambda| < \frac{\pi}{2\rho},\ \frac{1}{2} < \rho < +\infty\right) \tag{0.29}$$

является решением следующей задачи типа Коши:

$$D_\infty^{1/\rho}\, y(x) + \lambda y(x) = 0,\ y(0) = 1. \tag{0.30}$$

При этом, с учетом обозначения (0.20), операторы $D_\infty^{1/\rho}$ определяются следующим образом:

$$D_\infty^{1/\rho} y(x) = \frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha}\, y(x)\ (0 \leqslant \alpha < 1), \tag{0.31}$$

$$D_\infty^{1/\rho}\, y(x) = -\frac{d}{dx} D_\infty^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dx}\, y(x)\ (-1 < \alpha < 0), \tag{0.32}$$

см., напр., [12], [7], а также [8]).

(в) Метод решения проблемы α-квазианалитичности (0.6)—(0.7), развитый в исследовании [7], а затем примененный также в [8], существенно опирается на сформулированные выше решения задач типа Коши (0.22)—(0.23) и (0.30).

На основании самого вида задачи (0.30)—(0.31) для значений параметра $0 \leqslant \alpha < 1$ $(1 < \rho < +\infty)$ в работе [7] в основу были положены следующие формулы для определения операторов последовательного дифференцирования $D_\infty^{n/\rho}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ дробного порядка:

$$D_\infty^0\, \varphi(x) = \varphi(x),\ D_\infty^{1/\rho}\, \varphi(x) = \frac{d}{dx} D_\infty^{-\alpha}\, \varphi(x),$$

$$D_\infty^{n/\rho}\, \varphi(x) = D_\infty^{1/\rho} D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\, \varphi(x)\ (n = 2, 3, \cdots). \tag{0.33}$$

Для значений параметра $-1 < \alpha < 0\left(\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$, по аналогии со сказанным выше, на основании самого вида соответствующей задачи типа Коши (0.30), (0.32) естественно было операторы последовательного дифференцирования $D_\infty^{n/\rho}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ дробного порядка определить уже по формулам:

$$D_\infty^0\, \varphi(x) = \varphi(x),\ D_\infty^{1/\rho}\, \varphi(x) = -\frac{d}{dx} D_\infty^{-(1+\alpha)} \frac{d}{dx}\, \varphi(x),$$

$$D_\infty^{n/\rho}\, \varphi(x) = D_\infty^{1/\rho} D_\infty^{\frac{n-1}{\rho}}\, \varphi(x)\ (n = 2, 3, \cdots) \tag{0.34}$$

(см. [8]). При этом как в (0.33), так и в (0.34) положено $\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha$.

Именно использование этих операторов и привело к раскрытию явного вида функционалов единственности (0.11) и (0.12), поскольку ввиду определений (0.34) операторов $D_\infty^{n/\rho}$

$$D_\infty^{n/\rho}\, \varphi(0) = L_n^\alpha\, \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n)}(t)\, t^{\alpha n - 1}\, dt\ (0 \leqslant \alpha < 1,\ n \geqslant 0), \tag{0.11'}$$

$$D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(0)=L_n^{\alpha}\varphi=\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_0^{+\infty}\varphi^{(2n)}(t)\,t^{(1+\alpha)n-1}\,dt\ (-1<\alpha<0,\ n\geqslant 0). \tag{0.12'}$$

(г) Как уже отмечалось, в работах [7, 8] критерий α-квазианалитичности устанавливался сначала в классах $C_{\alpha}^{*}\{[0,+\infty);M_n\}\subset C_{\alpha}^{(-)}(-1<\alpha<1)$. При любом $\alpha\,(-1<\alpha<1)$ этот класс определялся как множество функций $\varphi(x)\in C_{\alpha}^{(-)}$, удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<x<+\infty}|D_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)|\leqslant A_{\varphi}\cdot B_{\varphi}^{n}M_n\,(n=1,2,\cdots). \tag{0.35}$$

Общая теорема, дающая критерий α-квазианалитичности классов $C_{\alpha}^{*}\{[0,+\infty);M_n\}$, может быть сформулирована следующим образом.

Теорема В. *Для того, чтобы класс $C_{\alpha}^{*}\{[0,\infty);M_n\}\,(-1<\alpha<1)$ был α-квазианалитическим, т. е. чтобы для любой функции $\varphi(x)\in C_{\alpha}^{*}\{[0,+\infty);M_n\}$ из равенств*

$$L_n^{\alpha}\varphi=0\quad(n=0,1,2,\cdots) \tag{0.36}$$

следовало тождество $\varphi(x)\equiv 0$, $x\in[0,+\infty)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty. \tag{0.37}$$

Отметим, что 0-квазианалитические классы $C_0\{[0,+\infty);M_n\}$ и $C_0^{*}\{[0,+\infty);M_n\}$ совпадают с классическими квазианалитическими классами $C\{[0,+\infty);M_n\}$, и при $\alpha=0$ справедливы также равенства

$$L_n^{0}\varphi=L_n\varphi=\varphi^{(n)}(0)\quad(n=0,1,2,\cdots). \tag{0.38}$$

Поэтому как теорема Б, так и теорема В содержат в себе классическую теорему А Данжуа—Карлемана в качестве специального случая, когда $\alpha=0$.

0.4. Для решения проблемы α-квазианалитичности (т. е. проблемы (0.6) — (0.7)) в исследовании [7] был предложен метод, основанный на применении развитой первым автором данной статьи теории интегральных преобразований с ядрами типа Миттаг—Леффлера, подытоженной в его монографии [9], с одновременным привлечением операторов интегродифференцирования дробного порядка.

Этот метод позволил, как и в классическом случае, свести проблему α-квазианалитичности к известной проблеме Ватсона о максимальной скорости убывания ограниченной аналитической функции в круге (или в полуплоскости), но уже для угловой области определенного раствора, и существенно опирается также на наличие отличной от нуля аналитической функции, предельно быстро убывающей в этом угле. Речь идет о следующей хорошо известной теореме (см. [7], где приведены подробные литературные указания).

Теорема Г. 1°. *Пусть функция $F(z)$ аналитична внутри и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Delta(\gamma;0)}$ (кроме, быть может, точки ∞), где*

$$\Delta(\gamma;0)=\left\{z:|\arg z|<\frac{\pi}{2\gamma},\ 0<|z|<+\infty\right\}\left(\frac{1}{2}<\gamma<+\infty\right), \quad (0.39)$$

и удовлетворяет там неравенству

$$|F(re^{i\varphi})|\leqslant Ae^{-p(r)}\left(|\varphi|\leqslant\frac{\pi}{2\gamma},\ 0\leqslant r<+\infty\right), \quad (0.40)$$

где $A>0$ — некоторая постоянная, $p(r)$ — неотрицательная функция, определенная на полуоси $[0,+\infty)$. Если при этом

$$\int_1^{+\infty}\frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\,dr=+\infty, \quad (0.41)$$

то $F(z)\equiv 0$;

2°. *Пусть $p(r)\geqslant 0$ — неотрицательная функция, определенная на полуоси $[0,+\infty)$ и удовлетворяющая условию*

$$\int_1^{+\infty}\frac{p(r)}{r^{1+\gamma}}\,dr<+\infty, \quad (0.42)$$

где $\frac{1}{2}<\gamma<+\infty$.

Тогда существует функция $F(z)\not\equiv 0$, аналитическая внутри и непрерывная в замкнутом угле $\overline{\Delta(\gamma;0)}$ и удовлетворяющая неравенству (0.40).

0.5. (а) Из самого определения функционалов единственности (0.11) и (0.12) очевидно, что для их существования и конечности вовсе не обязательно накладывать на функции $\varphi(x)$ из соответствующих классов ограничения (0.9). Естественно было ожидать, что утверждения теорем Б и В справедливы не только в классах $C_\alpha^{(\infty)}$, но и в классах функций, удовлетворяющих минимальным ограничениям, обеспечивающим существование этих функционалов.

Именно, обозначим через $\widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}$ $(-1<\alpha<1,\ \alpha\neq 0)$ класс ограниченных и бесконечно-дифференцируемых на полуоси $[0,+\infty)$ функций $\varphi(x)$, удовлетворяющих условиям:

$$\int_0^{+\infty}|\varphi^{(n)}(t)|\,t^{\alpha n-1}\,dt<\infty\ (n=1,2,\cdots),\ \text{при}\ 0<\alpha<1; \quad (0.43)$$

$$\int_0^{+\infty}|\varphi^{(2n)}(t)|\,t^{(1+\alpha)n-1}\,dt<+\infty\ (n=1,2,\cdots),\ \text{при}\ -1<\alpha<0. \quad (0.44)$$

Для функций этих классов также можно определить операторы последовательного дифференцирования порядков n/ρ $(n=0,1,2,\cdots)$

С этой целью отметим, что для функций $\varphi(x) \in C_{\alpha}^{(\infty)} (-1 < \alpha < 1)$ справедливы формулы

$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = D_{\infty}^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots; \ 0 \leqslant \alpha < 1), \tag{0.45}$$

$$D_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = D_{\infty}^{-(1+\alpha) n} \varphi^{(2n)}(x) \quad (n = 0, 1, 2, \cdots; \ -1 < \alpha < 0), \tag{0.46}$$

(формула (0.45) установлена в [7] лемме 6, а (0.46) — в [8], лемме 1.3).

Поэтому для функций $\varphi(x) \in \bar{C}_{\alpha}^{(\infty)}$ $(-1 < \alpha < 1)$ естественно определить операторы последовательного дифференцирования следующим образом.

Для значений $0 \leqslant \alpha < 1$ *положим*

$$\bar{D}_{\infty}^{0} \varphi(x) = \varphi(x),$$

$$\tilde{D}_{\infty}^{1/\rho} \varphi(x) = D_{\infty}^{-\alpha} \varphi'(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{x}^{+\infty} (t - x)^{\alpha - 1} \varphi'(t)\, dt, \tag{0.47}$$

$$\tilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = D_{\infty}^{-\alpha n} \varphi^{(n)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_{x}^{+\infty} (t - x)^{\alpha n - 1} \varphi^{(n)}(t)\, dt \ (n = 1, 2, \cdots).$$

При этом заметим, что согласно (0.47) при $\alpha = 0$ $\bar{D}_{-}^{n} \varphi(x) = \varphi^{(n)}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, и поэтому класс $\tilde{C}_{0}^{(\infty)}$ естественно отождествля с классом $C_{0}^{(\infty)}$ ограниченных бесконечно-дифференцируемых на по уоси $[0, +\infty)$ функций.

Для значений же $-1 < \alpha < 0$ *положим*

$$\bar{D}_{\infty}^{0} \varphi(x) = \varphi(x),$$

$$\tilde{D}_{\infty}^{1/\rho} \varphi(x) = D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \varphi''(x) = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_{x}^{+\infty} (t - x)^{(1+\alpha) - 1} \varphi''(t)\, dt, \tag{0.48}$$

$$\tilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) = D_{\infty}^{-(1+\alpha) n} \varphi^{(2n)}(x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha) n)} \int_{x}^{+\infty} (t - x)^{(1+\alpha) n - 1} \varphi^{(2n)}(t)\, dt \ (n = 1, 2, \cdots),$$

$\left(\text{как и раньше, } \dfrac{1}{\rho} = 1 - \alpha\right)$.

Отметим, что из условий (0.43) и (0.44), очевидно, вытекает *существование и конечность функций* $\tilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ *на всей полуоси* $[0, +\infty)$.

0.6 (а). Как отмечалось выше, *в основных теоремах* Б *и* В *проблема* α*-квазианалитичности принципиально была полностью решена.*

Цель данной статьи — показать, что без какого-либо изменения всего метода решения проблемы в целом, предложенного в ис-

следовании [7], *и лишь путем эквивалентных переопределений операторов интегродифференцирования дробного порядка* $D_{\infty}^{n/\rho}$ *можно предельно расширить ранее введенные классы допустимых функций* $C_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$ *и* $C_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ *с тем, чтобы они были непосредственно ассоциированы с определениями простейших функционалов единственности* (0.11) *и* (0.12).

На этом пути приходится лишь несколько видоизменять и передоказывать некоторые из лемм, содержащихся в работах [7, 8], и дополнительно воспользоваться только частным случаем следующей известной теоремы (см. [5], стр. 217).

Теорема Д. *Пусть* $\varphi(x)$ — n *раз дифференцируемая функция на* $[0, +\infty)$ *и*

$$m_k = \sup_{0<x<+\infty} |\varphi^{(k)}(x)| \quad (0 \leqslant k \leqslant n). \tag{0.49}$$

Тогда

$$m_k \leqslant \left(\frac{8en}{k}\right)^k m_0^{1-\frac{k}{n}} m_n^{\frac{k}{n}} \quad (1 \leqslant k < n). \tag{0.50}$$

С целью формулировки соответствующих результатов приведем следующие определения:

1) $\widetilde{C}_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1<\alpha<1)$ — *это класс тех функций* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}^{(\infty)}$, *которые удовлетворяют условиям*

$$\sup_{0<x<+\infty} |\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant A_{\varphi} B_{\varphi}^{n} M_n \ (n = 1, 2, \cdots); \tag{0.51}$$

2) $\widetilde{C}_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1<\alpha<1)$ — *это класс тех функций* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}^{(\infty)}$, *которые удовлетворяют условиям*

$$\sup_{0<x<+\infty} |\varphi^{(n)}(x)| < A_{\varphi} B_{\varphi}^{n} M_n \ (n = 1, 2, \cdots), \tag{0.52}$$

где постоянные $A_{\varphi} > 0$ и $B_{\varphi} > 0$ зависят, вообще говоря, от функции φ.

В следующих теоремах содержится исчерпывающее решение проблемы α-квазианалитичности для этих классов.

Теорема 1. *Для того, чтобы класс* $\widetilde{C}_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1<\alpha<1)$ *был* α-*квазианалитическим, т. е. чтобы для любой функции* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}^{*}\{[0, +\infty); M_n\}$ *из условий*

$$L_n^{*} \varphi = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{0.53}$$

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}} dr = +\infty. \tag{0.54}$$

Теорема 2. *Для того, чтобы класс* $\widetilde{C}_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$ $(-1<\alpha<1)$ *был* α-*квазианалитическим, т. е. чтобы для любой функции* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}\{[0, +\infty); M_n\}$ *из условий*

$$L_n^{\alpha}\varphi = 0 \ (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots) \tag{0.55}$$

следовало тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$, *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\, dr = +\infty. \tag{0.56}$$

(б) В § 1 приводятся формулировки и полные доказательства тех лемм из [7], а также [8], которые нуждались в видоизменениях, в связи с переходом от классов $C_{\alpha}^{(\infty)}$ $(-1<\alpha<1)$ к более широким классам $\widetilde{C}_{\alpha}^{(\infty)}$ $(-1<\alpha<1)$. Однако, несмотря на небольшие по существу видоизменения соответствующих формулировок, в результате такого перехода доказательства этих лемм (1′, 1″, 2′, 2″) значительно удлинились.

Но отметим, что при этом нам не понадобилось привлечения иных средств анализа, чем неоднократное кропотливое применение формулы интегрирования по частям, предельных переходов и установление сходимости тех или иных несобственных интегралов.

В заключительном § 2 мы лишь намечаем схемы доказательств теорем 1 и 2, поскольку их полное изложение явилось бы буквальным повторением всего предложенного в [7] метода и его изложения.

Однако лишь по мере необходимости нами указываются те частные места из первоначального изложения метода, где взамен прежних лемм следует опираться на их видоизмененные варианты из § 1.

§ 1. Доказательство видоизмененных лемм

1.1 (а) Пусть опять параметр $\rho\left(\frac{1}{2}<\rho<+\infty\right)$ определяется по параметру $\alpha\,(-1<\alpha<1)$ равенством

$$\frac{1}{\rho} = 1-\alpha. \tag{1.1}$$

Для значений параметра $0<\alpha<1$ в лемме 6 исследования [7] были установлены важные свойства операторов последовательного дифференцирования $D_{\infty}^{n/\rho}$ $(n \geqslant 0)$ дробного порядка, которые были определены на функциях $\varphi(x)$ из класса $C_{\alpha}^{(\infty)}$ по формулам (0.33). Для функций из класса $C_{\alpha}^{(\infty)}$ в той же лемме, в частности, была установлена справедливость равенств (0.45), из которых, очевидно, следует, что при любом $n \geqslant 0$ оператор $D_{\infty}^{n/\rho}$ на классе $C_{\alpha}^{(\infty)}$ совпадает с оператором $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}$, определенным по формулам (0.47).

Покажем, что если для функций из более широкого класса $\widetilde{C}_{\alpha}^{(\infty)} \supset C_{\alpha}^{(\infty)}$ положить в основу определение (0.47) операторов

$\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}$ $(n \geqslant 0)$, то отмеченная лемма 6 остается в силе в следующей формулировке.

Лемма 1′. *Пусть* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}^{(\infty)}$ $(0 < \alpha < 1)$. *Тогда справедливы утверждения:*

1°. *Если* $\alpha n - 1 \geqslant 0$, *то функция* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)$ *непрерывна и ограничена на полуоси* $[0, +\infty)$, *причем*

$$\lim_{x \to +\infty} \widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x) = 0; \tag{1.2}$$

2°. *Если* $\alpha(1-\alpha)n - 3 > 0$, *то функция* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)$ *принадлежит одновременно классам* $L_1(0, +\infty)$ *и* $L_2(0, +\infty)$;

3°. *Справедливы формулы*

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x) = (-1)^k D_{\infty}^{-(\alpha n - k)}\varphi^{(n-k)}(x); \; x \in (0, +\infty)$$
$$(n = 0, 1, 2, \cdots, \; k = 0, 1, \cdots, [\alpha n]), \tag{1.3}$$

где $[\alpha n]$ *означает целую часть числа* αn.

Доказательство. 1°. Введем вспомогательную функцию, полагая для каждого $x \in [0, +\infty)$

$$G_n(t; x) = \begin{cases} (t-x)^{\alpha n - 1}, & x \leqslant t < +\infty, \\ 0, & 0 \leqslant t < x, \end{cases}$$

и заметим, что согласно (0.47) можем написать

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} G_n(t; x)\varphi^{(n)}(t)\,dt, \; x \in [0, +\infty). \tag{1.4}$$

При $\alpha n - 1 \geqslant 0$ функция $G_n(t; x)$ непрерывна по обеим переменным $t \in [0, +\infty)$ и $x \in [0, +\infty)$, причем

$$G_n(t; x) \leqslant \begin{cases} t^{\alpha n - 1}, & x \leqslant t < +\infty, \\ 0, & 0 \leqslant t < x, \end{cases} \quad x \in [0, +\infty). \tag{1.5}$$

Следовательно, в силу условий (0.43) интеграл (1.4) сходится абсолютно и равномерно на полуоси $0 \leqslant x < +\infty$ и определяет непрерывную на этой полуоси функцию $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)$.

С другой стороны, поскольку из (1.4) и (1.5) следует оценка

$$|\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_x^{+\infty} |\varphi^{(n)}(t)|\, t^{\alpha n - 1}\,dt, \; x \in [0, +\infty),$$

то как ограниченность функции $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)$ на полуоси $[0, +\infty)$, так и предельное равенство (1.2) вытекают из условий (0.43).

Утверждение 2° удобно доказывать с использованием формул (1.3), поэтому сначала докажем утверждение 3°.

При $n = 0$ справедливость формул (1.3) очевидна ввиду (0.26′) и (0.47).

Полагая $n \geqslant 1$, отметим сначала, что поскольку $\alpha n - k \leqslant \alpha(n-k)$ $(k=0, 1, \cdots, [\alpha n])$, то

$$|\varphi^{(n-k)}(t)|\, t^{\alpha n-k-1} \leqslant |\varphi^{(n-k)}(t)|\, t^{\alpha(n-k)-1}, \quad 1 \leqslant t < +\infty,$$

и поэтому, в силу неравенств $n-k \geqslant 1$ $(n \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant [\alpha n])$ и условий (0.43)

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(n-k)}(t)|\, t^{\alpha n-k-1}\, dt < +\infty \ (n \geqslant 1;\ k=0, 1, \cdots, [\alpha n]). \tag{1.6}$$

Отсюда, в частности, будем иметь

$$\liminf_{t \to +\infty} |\varphi^{(n-k)}(t)|\, t^{\alpha n-k} = 0 \ (n \geqslant 1;\ k=0, 1, \cdots, [\alpha n]). \tag{1.7}$$

Проведем теперь рассуждения по индукции.

При $k=0$ формулы (1.3), очевидно, совпадают с самим определением (0.47) оператора $\widetilde{D}_\infty^{n/p}$.

Предположим, что эти формулы верны при $k=p$ $(0 \leqslant p \leqslant [\alpha n]-2)$, т. е.

$$\widetilde{D}_\infty^{n/p}\varphi(x) = \frac{(-1)^p}{\Gamma(\alpha n-p)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-p-1} \varphi^{(n-p)}(t)\, dt, \quad x \in (0, +\infty), \tag{1.8}$$

заметив при этом, что в силу (1.6) этот интеграл абсолютно сходится, и докажем, что формулы (1.3) будут верны и при $k=p+1$.

На основании (1.7) выберем последовательность $a_j \uparrow +\infty$ такую, что

$$\lim_{j \to +\infty} a_j^{\alpha n-p-1} |\varphi^{(n-p-1)}(a_j)| = 0. \tag{1.9}$$

Далее, учитывая (1.8) и производя интегрирование по частям, получим

$$\widetilde{D}_\infty^{n/p}\varphi(x) = \frac{(-1)^p}{\Gamma(\alpha n-p)} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} (t-x)^{\alpha n-p-1}\, d\varphi^{(n-p-1)}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^p}{\Gamma(\alpha n-p)} \lim_{j \to +\infty} \Big\{ (t-x)^{\alpha n-p-1} \varphi^{(n-p-1)}(t) \Big|_x^{a_j} -$$

$$- (\alpha n-p-1) \int_x^{a_j} (t-x)^{\alpha n-p-2} \varphi^{(n-p-1)}(t)\, dt \Big\} =$$

$$= \frac{(-1)^{p+1}}{\Gamma(\alpha n-p-1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-p-2} \varphi^{(n-p-1)}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{p+1} D_\infty^{-(\alpha n-(p+1))} \varphi^{(n-(p+1))}(x), \quad x \in (0, +\infty), \tag{1.10}$$

т. е. формулы (1.3) при $k=p+1$. При этом в силу (1.6) последний интеграл абсолютно сходится, а проинтегрированный член исчезает ввиду (1.9) и неравенства $\alpha n-p-1 \geqslant 1$.

Таким образом, формулы (1.3) справедливы для значений $n \geqslant 1$ и $k = 0, 1, \cdots, [\alpha n]-1$. В частности, при $k = [\alpha n]-1$ будем иметь

$$\bar{D}_{\infty}^{\alpha/\rho}\varphi(x) = \frac{(-1)^{[\alpha n]-1}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-[\alpha n]}\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)\,dt, \tag{1.11}$$

причем, как уже убедились, этот интеграл при любом $x \in (0, +\infty)$ абсолютно сходится.

Чтобы доказать (1.3) при $k = [\alpha n]$, разберем отдельно два случая: 1) $\alpha n \neq [\alpha n]$; 2) $\alpha n = [\alpha n]$.

В обоих случаях, опять на основании (1.7), выберем последовательность $a_j \uparrow +\infty$, для которой

$$\lim_{j\to+\infty} a_j^{\alpha n-[\alpha n]}\,|\varphi^{(n-[\alpha n])}(a_j)| = 0. \tag{1.9'}$$

В случае $\alpha n \neq [\alpha n]$, как и выше, в силу (1.11), получим

$$\bar{D}_{\infty}^{\alpha/\rho}\varphi(x) = \frac{(-1)^{[\alpha n]-1}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)}\lim_{j\to+\infty}\int_{x}^{a_j}(t-x)^{\alpha n-[\alpha n]}\,d\varphi^{(n-[\alpha n])}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^{[\alpha n]-1}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)}\lim_{j\to+\infty}\Big\{(t-x)^{\alpha n-[\alpha n]}\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)\Big|_{x}^{a_j} -$$

$$-(\alpha n-[\alpha n])\int_{x}^{a_j}(t-x)^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)\,dt\Big\} =$$

$$\frac{(-1)^{[\alpha n]}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)\,dt =$$

$$= (-1)^{[\alpha n]}D_{\infty}^{-(\alpha n-[\alpha n])}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x),\ x \in (0, +\infty).$$

Пусть, наконец, $\alpha n = [\alpha n]$. Опять, в силу (1.11) и (1.9′), можем написать

$$\bar{D}_{\infty}^{\alpha/\rho}\varphi(x) = (-1)^{[\alpha n]-1}\lim_{j\to+\infty}\int_{x}^{a_j}\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)\,dt =$$

$$= (-1)^{[\alpha n]-1}\lim_{j\to+\infty}\{\varphi^{(n-[\alpha n])}(a_j) - \varphi^{(n-[\alpha n])}(x)\} =$$

$$= (-1)^{[\alpha n]}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x) = (-1)^{[\alpha n]}D_{\infty}^{-(\alpha n-[\alpha n])}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x),\ x \in (0, +\infty),$$

причем последнее равенство написано на основании (0.26′).

Этим завершается доказательство утверждения 3°.

Докажем, наконец, утверждение 2°.

При нашем условии $\alpha(1-\alpha)n-3 \geqslant 0$ будем иметь

$$\gamma_n \equiv [\alpha n](1-\alpha)-2+\alpha \geqslant 0. \tag{1.12}$$

Далее, воспользовавшись формулой (1.3) при $k = [\alpha n]-1$, можем написать

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{\gamma_n}\, dx = \int_0^{+\infty} |D_\infty^{-(\alpha n-[\alpha n]+1)}\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(x)|\, x^{\gamma_n}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)} \int_0^{+\infty} x^{\gamma_n} \int_x^{+\infty} (t-x)^{\alpha n-[\alpha n]}\, |\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)|\, dt\, dx.$$

Отсюда, на основании теоремы Фубини поменяв порядки интегрирования и пользуясь формулой (0.17), получим

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{\gamma_n} dx <$$

$$< \frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)| \int_0^{t} (t-x)^{\alpha n-[\alpha n]} x^{\gamma_n}\, dx\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\gamma_n)}{\Gamma(2+\gamma_n+\alpha n-[\alpha n])} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)|\, t^{1+\gamma_n+\alpha n-[\alpha n]}\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1+\gamma_n)}{\Gamma(2+\gamma_n+\alpha n-[\alpha n])} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n]+1)}(t)|\, t^{(n-[\alpha n]+1)\alpha-1} dt < +\infty,$$

причем равенство $1+\gamma_n+\alpha n-[\alpha n] = (n-[\alpha n]+1)\alpha-1$ следует из (1.12), а конечность последнего интеграла обеспечена условиями (0.43).

Таким образом

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{\gamma_n}\, dx < +\infty,$$

и поскольку $\gamma_n > 0$, а $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)$ в силу утверждения 1° леммы непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$, то

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, dx < \int_0^{1} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, dx + \int_1^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{\gamma_n}\, dx < +\infty,$$

то есть $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$. Отсюда, воспользовавшись утверждением 1° леммы, легко можно убедиться и в том, что $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \in L_2(0, +\infty)$. Лемма доказана.

Следствие. *Если* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}$ $(0<\alpha<1)$ *и при некотором* $n > \dfrac{1}{\alpha(1-\alpha)}$

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \equiv 0,\ x \in (0, +\infty), \tag{1.13}$$

то

$$\varphi(x) \equiv \text{const},\ x \in (0, +\infty). \tag{1.14}$$

Доказательство. Разберем отдельно два случая: 1) $\alpha n \neq [\alpha n]$; 2) $\alpha n = [\alpha n]$.

Пусть $\alpha n \neq [\alpha n]$.

Так как при условии $n > \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}$ $\alpha(n-[\alpha n])-1>0$, то ввиду (0.43)

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)|\,dt \leqslant \int_1^{+\infty} |\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)|\, t^{\alpha(n-[\alpha n])-1}\,dt < +\infty. \tag{1.15}$$

Следовательно, при условии (1.13), воспользовавшись формулами (1.3) (при $k=[\alpha n]$) и (0.18), будем иметь

$$0=\int_x^{+\infty}(t_2-x)^{-(\alpha n-[\alpha n])}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(t_2)\,dt_2=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\int_x^{+\infty}(t_2-x)^{-(\alpha n-[\alpha n])}\int_{t_2}^{+\infty}(t_1-t_2)^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(t_1)\,dt_1dt_2=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\int_x^{+\infty}\varphi^{(n-[\alpha n])}(t_1)\int_x^{t_1}(t_2-x)^{-(\alpha n-[\alpha n])}(t_1-t_2)^{\alpha n-[\alpha n]-1}\,dt_2dt_1=$$

$$=\Gamma(1-\alpha n+[\alpha n])\int_x^{+\infty}\varphi^{(n-[\alpha n])}(t_1)\,dt_1,\quad x\in(0,+\infty),$$

причем в силу (1.15) перемена порядков интегрирования допустима. Отсюда уже ясно, что при любых a и b $(0<a<b<+\infty)$

$$\int_a^b \varphi^{(n-[\alpha n])}(x)\,dx=0$$

и, следовательно, $\varphi^{(n-[\alpha n])}(x)\equiv 0$, $x\in(0,+\infty)$.

Если же $\alpha n=[\alpha n]$, то на основании (1.13) и формул (1.3) (при $k=[\alpha n]$) опять получим, что $\varphi^{(n-[\alpha n])}(x)\equiv 0$, $x\in(0,+\infty)$.

Очевидно, что тогда

$$\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-[\alpha n]-1}x^{n-[\alpha n]-1},\quad x\in(0,+\infty).$$

Однако $a_1=\cdots=a_{n-[\alpha n]-1}=0$, так как в противном случае функция $\varphi(x)$ не может быть ограниченной, откуда и следует (1.14).

Аналог леммы 6 из исследования [7] в том случае, когда $-1<\alpha<0$ и операторы последовательного дифференцирования дробного порядка $D_\infty^{n/\rho}$ на функциях класса $C_\alpha^{(-)}$ определены по формулам (0.34), содержится в работе [8] (стр. 214, лемма 1.3).

Покажем, что если для функций из более широкого класса $\overline{C}_\alpha^{(-)}\supset C_\alpha^{(-)}$ $(-1<\alpha<0)$ положить в основу определение (0.48) опера-

торов $\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}$ $(n \geqslant 0)$, то в этом случае также отмеченная лемма остается в силе в следующей формулировке.

Лемма 1″. *Пусть* $\varphi(x) \in \overline{C}_2^{(-)}$ $(-1 < \alpha < 0)$. *Тогда справедливы утверждения*:

1°. *Если* $(1+\alpha)\, n - 1 \geqslant 0$, *то функция* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/p} \varphi(x)$ *непрерывна и ограничена на полуоси* $[0, +\infty)$, *причем*

$$\lim_{x \to +\infty} \widetilde{D}_{\infty}^{n/p} \varphi(x) = 0; \tag{1.2'}$$

2°. *Если* $(1+\alpha)\, n - 4 \geqslant 0$, *то функция* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/p} \varphi(x)$ *принадлежит одновременно классам* $L_1(0, +\infty)$ *и* $L_2(0, +\infty)$;

3°. *Справедливы формулы*

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p} \varphi(x) = (-1)^k D_{\infty}^{-((1+\alpha)n-k)} \varphi^{(2n-k)}(x); \; x \in (0, +\infty) \tag{1.3'}$$

$$(n = 0, 1, 2, \cdots; \; k = 0, 1, \cdots, [(1+\alpha)\, n]),$$

где $[(1+\alpha)\, n]$ *означает целую часть числа* $(1+\alpha)\, n$.

Доказательство. 1°. Путем введения вспомогательной функции

$$G_n(t; x) = \begin{cases} (t-x)^{(1+\alpha)n-1}, & x \leqslant t < +\infty, \\ 0, & 0 \leqslant t < x, \end{cases} \quad x \in [0, +\infty),$$

это утверждение доказывается точно так же, как и соответствующее утверждение леммы 1′, только вместо формул (0.47) и условий (0.43), естественно, надо воспользоваться формулами (0.48) и условиями (0.44).

Докажем утверждение 3°.

Отметим сначала, что в силу условий (0.44) при каждом $n \geqslant 1$ существует последовательность $a_j \uparrow +\infty$, для которой

$$\lim_{j \to +\infty} a_j^{(1+\alpha)n} \varphi^{(2n)}(a_j) = 0. \tag{1.16}$$

С учетом (1.16) и (0.44) при любом $n \geqslant 2$ можем написать

$$\int_1^{+\infty} t^{(1+\alpha)(n-1)-1} \varphi^{(2n-2)}(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)(n-1)} \lim_{j \to +\infty} \int_1^{a_j} \varphi^{(2n-2)}(t)\, dt^{(1+\alpha)(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)(n-1)} \lim_{j \to +\infty} \left\{ t^{(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n-2)}(t) \Big|_1^{a_j} - \right.$$

$$\left. - \int_1^{a_j} t^{(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n-1)}(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{(1+\alpha)(n-1)} \lim_{j \to +\infty} \left\{ -\varphi^{(2n-2)}(1) - \int_1^{a_j} t^{(1+\alpha)(n-1)} \varphi^{(2n-1)}(t)\, dt \right\}.$$

Отсюда вытекает существование и конечность предела

$$\lim_{j\to+\infty}\int_1^{a_j} t^{(1+\alpha)(n-1)}\varphi^{(2n-1)}(t)\,dt, \tag{1.17}$$

значение которого легко определяется из предыдущих равенств.

Рассмотрим теперь два возможных случая.

1) Существует $t_0>0$ такое, что при $t\geqslant t_0$ функция $\varphi^{(2n-1)}(t)$ сохраняет знак.

Тогда из существования предела (1.17) вытекает, что

$$\int_1^{+\infty} t^{(1+\alpha)(n-1)}|\varphi^{(2n-1)}(t)|\,dt<+\infty,$$

и, следовательно, существование последовательности $b_j\uparrow+\infty$, такой, что

$$\lim_{j\to+\infty} b_j^{(1+\alpha)(n-1)+1}\varphi^{(2n-1)}(b_j)=0.$$

2) Функция $\varphi^{(2n-1)}(t)$ при $t\to+\infty$ бесконечное число раз меняет знак.

Очевидно, что в этом случае существует последовательность $b_j\uparrow+\infty$, для которой

$$\varphi^{(2n-1)}(b_j)=0\quad(j\geqslant 1).$$

Из сказанного заключаем, что при любом $n\geqslant 2$ существует последовательность $b_j\uparrow+\infty$, для которой

$$\lim_{j\to+\infty} b_j^{(1+\alpha)(n-1)+1}\varphi^{(2n-1)}(b_j)=0. \tag{1.18}$$

С учетом этого равенства, при $(1+\alpha)n-1\geqslant 0$ можем написать

$$|\varphi^{(2n-1)}(t)|=\lim_{j\to+\infty}|\varphi^{(2n-1)}(b_j)-\varphi^{(2n-1)}(t)|\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{j\to+\infty}\int_t^{b_j}|\varphi^{(2n)}(x)|\,dx=\int_t^{+\infty}|\varphi^{(2n)}(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{t^{(1+\alpha)n-1}}\int_t^{+\infty}|\varphi^{(2n)}(x)|x^{(1+\alpha)n-1}\,dx,$$

откуда на основании (0.44) получаем

$$\lim_{t\to+\infty} t^{(1+\alpha)n-1}\varphi^{(2n-1)}(t)=0\quad((1+\alpha)\,n-1\geqslant 0). \tag{1.19}$$

Перейдем теперь к доказательству формул (1.3′).

Отметим сначала, что в силу условия $-1<\alpha<0$ для значений $n=0,1$ будем иметь $[(1+\alpha)\,n]=0$, поэтому для $n=0,1$ в формуле (1.3′) индекс k может принимать только значение 0.

Таким образом, справедливость формул (1.3′) для значений $n=0,1$ непосредственно вытекает из самого определения (0.48) операторов $\overline{D}_\infty^{n/\rho}$.

Поэтому дальше мы можем полагать, что $n \geqslant 2$.

Будем проводить рассуждения по индукции.

При $k=0$ формулы (1.3′) очевидны ввиду (0.48).

Предположим, что эти формулы верны при $k=2p$ $(0 \leqslant 2p \leqslant [(1+\alpha)n]-2)$, т. е.

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}\varphi(x) = \frac{(-1)^{2p}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)n-2p-1} \varphi^{(2n-2p)}(t)\,dt, \quad (1.20)$$

$$x \in (0, +\infty),$$

и докажем, что формулы (1.3′) будут верны и при $k=2p+1$.

Отметим при этом, что поскольку $1 \leqslant (1+\alpha)n-2p-1 \leqslant (1+\alpha)(n-p)-1$, то из условий (0.44) вытекает абсолютная сходимость интеграла (1.20) при любом $x>0$.

С учетом (1.20), производя интегрирование по частям, получим

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}\varphi(x) = \frac{(-1)^{2p}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p)} \lim_{A\to+\infty} \int_x^A (t-x)^{(1+\alpha)n-2p-1} d\varphi^{(2n-2p-1)}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^{2p}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p)} \lim_{A\to+\infty} \Big\{ (t-x)^{(1+\alpha)n-2p-1)} \varphi^{(2n-2p-1)}(t) \Big|_x^A -$$

$$-((1+\alpha)n-2p-1) \int_x^A (t-x)^{(1+\alpha)n-2p-2} \varphi^{(2n-2p-1)}(t)\,dt \Big\} =$$

$$= \frac{(-1)^{2p+1}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p-1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)n-2p-2} \varphi^{(2n-2p-1)}(t)\,dt =$$

$$= (-1)^{2p+1} D_{\infty}^{-((1+\alpha)n-(2p+1))} \varphi^{(2n-(2p+1))}(x), \quad x \in (0, +\infty),$$

т. е. мы пришли к формулам (1.3′) для $k=2p+1$.

При этом, очевидно, последний интеграл сходится (хотя, быть может, и неабсолютно), а проинтегрированный член исчезает, так как $(1+\alpha)n-2p-1 \geqslant 1$ и, кроме того, в силу неравенства $(1+\alpha)n-2p-1 \leqslant (1+\alpha)(n-p)-1$ и (1.19)

$$\lim_{t\to+\infty} t^{(1+\alpha)n-2p-1} \varphi^{(2n-2p-1)}(t) = 0.$$

Из доказанного, в частности, следует справедливость формул (1.3′) при $k=1$.

Предположим теперь, что эти формулы справедливы при $k=2p-1$ $(1 \leqslant 2p-1 \leqslant [(1+\alpha)n]-2)$, т. е.

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}\varphi(x) = \frac{(-1)^{2p-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p+1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)n-2p} \varphi^{(2n-2p+1)}(t)\,dt, \quad (1.21)$$

$$x \in (0, +\infty),$$

и докажем, что тогда они будут верны и при $k=2p$.

Действительно, учитывая (1.21) и производя интегрирование по частям, получим

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}\varphi(x)=\frac{(-1)^{2p-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p+1)}\lim_{j\to+\infty}\int_x^{a_j}(t-x)^{(1+\alpha)n-2p}\,d\varphi^{(2n-2p)}(t)=$$

$$=\frac{(-1)^{2p-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p+1)}\lim_{j\to+\infty}\Big\{(t-x)^{(1+\alpha)n-2p}\varphi^{(2n-2p)}(t)\Big|_x^{a_j}-$$

$$-((1+\alpha)n-2p)\int_x^{a_j}(t-x)^{(1+\alpha)n-2p-1}\varphi^{(2n-2p)}(t)\,dt\Big\}=$$

$$=\frac{(-1)^{2p}}{\Gamma((1+\alpha)n-2p)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-2p-1}\varphi^{(2n-2p)}(t)\,dt=$$

$$=(-1)^{2p}D_{\infty}^{-((1+\alpha)n-2p)}\varphi^{(2n-2p)}(x),\ x\in(0,+\infty),$$

т. е. мы вновь пришли к формулам (1.3′). но уже для $k=2p$.

При этом последний интеграл абсолютно сходится в силу неравенств $2\leqslant(1+\alpha)n-2p-1\leqslant(1+\alpha)(n-p)-1$ и условий (0.44), а проинтегрированный член исчезает ввиду тех же неравенств в силу (1.16).

Поскольку для $k=0$ и $k=1$ справедливость формул (1.3′) уж установлена, то на основании уже доказанных индуктивных переходов можем последовательно утверждать справедливость формул (1.3′) для всех значений $k=0,1,\cdots,[(1+\alpha)n]-1$.

В частности, при $k=[(1+\alpha)n]-1$ будем иметь:

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}\varphi(x)=$$

$$=\frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]+1)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]}\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n]+1)}(t)\,dt.\tag{1.22}$$

$$x\in(0,+\infty).$$

Чтобы доказать (1.3′) при $k=[(1+\alpha)n]$, разберем отдельно два случая.

1) Пусть $[(1+\alpha)n]=(1+\alpha)n$.

Отметим, сначала, что в силу неравенства $2n-[(1+\alpha)n]\geqslant 2$ и ввиду (1.16) и (1.18) можно подобрать последовательность $t_j\uparrow+\infty$, для которой

$$\lim_{j\to+\infty}\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_j)=0.$$

Отсюда на основании (1.22) получим

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/p}\varphi(x)=(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}\lim_{j\to+\infty}\int_x^{t_j}\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n]+1)}(t)\,dt=$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]-1} \lim_{j\to+\infty} \{\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_j) - \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x)\} =$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x) =$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]} D_\infty^{-((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x),\ x \in (0, +\infty).$$

2) Пусть $[(1+\alpha)n] \neq (1+\alpha)n$. Тогда $(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] > 0$.

Отметим еще, что поскольку для формул (1.3′) случай $k=0$ уже разобран, то будем полагать $[(1+\alpha)n] \geqslant 1$.

Предположим сначала, что $2n - [(1+\alpha)n] + 1$ — четное число.

Заметив, что тогда $2n - [(1+\alpha)n]$ — нечетно, причем

$$\frac{2n - [(1+\alpha)n] + 1}{2}(1+\alpha) - 1 \geqslant (1+\alpha)n - [(1+\alpha)n],$$

в силу (1.19) будем иметь

$$\lim_{A\to+\infty} A^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n]} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(A) = 0.$$

С учетом этого равенства из (1.22) интегрированием по частям получим

$$\widetilde{D}_\infty^{n/p} \varphi(x) = \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] + 1)} \times$$

$$\times \lim_{A\to+\infty} \int_x^A (t-x)^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n]} d\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] + 1)} \times$$

$$\times \lim_{A\to+\infty} \Big\{ (t-x)^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n]} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t) \Big|_x^A -$$

$$- ((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n]) \int_x^A (t-x)^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] - 1} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\, dt \Big\} =$$

$$= \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]}}{\Gamma((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n])} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)n - [(1+\alpha)n] - 1} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]} D_\infty^{-((1+\alpha)n - [(1+\alpha)n])} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x),\ x \in (0, +\infty),$$

причем очевидно, что последний интеграл сходится.

Предположим теперь, что $2n - [(1+\alpha)n] + 1$ — нечетное число.

Нетрудно проверить, что тогда для четного числа $2n - [(1+\alpha)n]$ справедливо неравенство

$$\frac{2n - [(1+\alpha)n]}{2}(1+\alpha) \geqslant (1+\alpha)n - [(1+\alpha)n],$$

и поэтому в силу условий (0.44) имеем

$$\int_{l}^{+\infty} |\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)|\, t^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\, dt < +\infty. \tag{1.23}$$

Отсюда, в частности, вытекает существование последовательности $t_j \uparrow +\infty$, для которой

$$\lim_{j\to+\infty} t_j^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_j) = 0.$$

Пользуясь этим равенством, в силу (1.22) получим

$$\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x) = \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]+1)} \times$$

$$\times \lim_{j\to+\infty}\int_{x}^{t_j} (t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]}\, d\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t) =$$

$$= \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]-1}}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]+1)} \times$$

$$\times \lim_{j\to+\infty}\left\{(t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\Big|_{x}^{t_j} - \right.$$

$$\left. -((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])\int_{x}^{t_j}(t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\, dt\right\} =$$

$$= \frac{(-1)^{[(1+\alpha)n]}}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)\, dt =$$

$$= (-1)^{[(1+\alpha)n]}\, D_{\infty}^{-((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x),$$

$$x \in (0, +\infty),$$

причем в силу (1.23) последний интеграл абсолютно сходится.

Этим доказательство формул (1.3′) полностью завершено.

Докажем утверждение 2° леммы.

Сначала заметим, что в силу условия $(1+\alpha)n-4>0$ будем иметь $2<[(1+\alpha)n]$. Следовательно, воспользовавшись формулами (1.3′) и (0.17), можем написать

$$\int_{0}^{+\infty}|\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{-\alpha}\, dx = \int_{0}^{+\infty}|D_{\infty}^{-((1+\alpha)n-2)}\, \varphi^{(2n-2)}(x)|\, x^{-\alpha}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-2)}\int_{0}^{+\infty} x^{-\alpha}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-3}\, |\varphi^{(2n-2)}(t)|\, dt\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-2)}\int_{0}^{+\infty}|\varphi^{(2n-2)}(t)|\int_{0}^{t}(t-x)^{(1+\alpha)n-3}\, x^{-\alpha}\, dx\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(-1-\alpha+(1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(2n-2)}(t)|\, t^{(1+\alpha)n-2-\alpha}\, dt =$$

$$= \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(-1-\alpha+(1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(2n-2)}(t)|\, t^{(1+\alpha)(n-1)-1}\, dt < +\infty,$$

причем сходимость последнего интеграла вытекает из условий (0.44), а перемена порядков интегрирования допустима на основании теоремы Фубини.

Далее, поскольку $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)$ при $(1+\alpha)n-4>0$ непрерывна на полуоси $[0, +\infty)$ и $-\alpha>0$, то

$$\int_0^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, dx + \int_1^{+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)|\, x^{-\alpha}\, dx < +\infty,$$

т. е. $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \in L_1(0, +\infty)$. Наконец, отсюда и из утверждения 1° леммы следует также принадлежность $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \in L_2(0, +\infty)$, и лемма доказана.

Следствие. *Если* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}$ $(-1<\alpha<0)$ *и при некотором* $n > \dfrac{4}{1+\alpha}$

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) \equiv 0,\ x \in (0, +\infty), \tag{1.13'}$$

то

$$\varphi(x) \equiv \text{const},\ x \in (0, +\infty). \tag{1.14'}$$

Доказательство. Отметим сначала, что в силу (1.19) при $(1+\alpha)n-1>0$

$$|\varphi^{(2n-1)}(t)| \leqslant Ct^{1-(1+\alpha)n},\ 1 \leqslant t < +\infty,$$

где $C>0$ — некоторая постоянная. Поэтому

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(2n-1)}(t)|\, dt \leqslant C \int_1^{+\infty} t^{1-(1+\alpha)n}\, dt < +\infty, \text{ при } (1+\alpha)n-2>0. \tag{1.24}$$

С другой стороны, в силу условий (0.44)

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(2n)}(t)|\, dt \leqslant \int_1^{+\infty} |\varphi^{(2n)}(t)|\, t^{(1+\alpha)n-1}\, dt < +\infty, \text{ при } (1+\alpha)n-1 \geqslant 0. \tag{1.25}$$

На основании (1.24) и (1.25) заключаем, что

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(p)}(t)|\, dt < +\infty,\ p \geqslant \frac{4}{1+\alpha}, \tag{1.26}$$

и, в частности,

$$\int_1^{+\infty} |\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t)|\, dt < +\infty,\ n > \frac{4}{1+\alpha}, \tag{1.26'}$$

так как $2n-[(1+\alpha)n] > n$.

Чтобы доказать (1.14′), вновь разберем два случая:

1) $(1+\alpha)n \neq [(1+\alpha)n]$; 2) $(1+\alpha)n = [(1+\alpha)n]$.

Пусть $(1+\alpha)n \neq [(1+\alpha)n]$.

Воспользовавшись формулами (1.3′) (при $k=[(1+\alpha)n]$) и (0.18), в силу (1.13′) будем иметь:

$$0 = \int_x^{+\infty} (t_2-x)^{-((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])}\, \widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\, \varphi(t_2)\, dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])} \int_x^{+\infty} (t_2-x)^{-(1+\alpha)n+[(1+\alpha)n]} \times$$

$$\times \int_{t_2}^{+\infty} (t_1-t_2)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\, \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_1)\, dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-[(1+\alpha)n])} \int_x^{+\infty} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_1) \times$$

$$\times \int_x^{t_1} (t_2-x)^{-(1+\alpha)n+[(1+\alpha)n]} (t_1-t_2)^{(1+\alpha)n-[(1+\alpha)n]-1}\, dt_2 dt_1 =$$

$$= \Gamma([(1+\alpha)n]-(1+\alpha)n+1) \int_x^{+\infty} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(t_1)\, dt_1,\ x \in (0, +\infty),$$

причем в силу (1.26′) перемена порядков интегрирования допустима. Отсюда ясно, что при любых a и b $(0 < a < b < +\infty)$

$$\int_a^b \varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x)\, dx = 0,$$

и, следовательно, $\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x) \equiv 0$, $x \in (0, +\infty)$.

Если же $(1+\alpha)n = [(1+\alpha)n]$, то на основании (1.13′) и формул (1.3′) (при $k=[(1+\alpha)n]$) опять получим, что $\varphi^{(2n-[(1+\alpha)n])}(x) \equiv 0$, $x \in (0, +\infty)$.

Очевидно, что тогда

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n-[(1+\alpha)n]-1} x^{2n-[(1+\alpha)n]-1},\quad x \in (0, +\infty).$$

Однако $a_1 = \cdots = a_{2n-[(1+\alpha)n]-1} = 0$, так как в противном случае $\varphi(x)$ не может быть ограниченной, откуда и следует (1.14′).

1.2 (а) В лемме 7 исследования [7] были установлены другие важные свойства операторов последовательного дифференцирования дробного порядка $D_{\infty}^{n/\rho}$ $(n \geqslant 0)$, определенных на функциях класса $C_{\alpha}^{(-)}$ $(0 < \alpha < 1)$ по формулам (0.33).

Покажем, что если для функций из класса $\widetilde{C}_{\alpha}^{(-)} \supset C_{\alpha}^{(-)}$ $(0 < \alpha < 1)$ положить в основу определения (0.47) операторов $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}$ $(n \geqslant 0)$, то отмеченная лемма 7 остается в силе в следующей формулировке.

Лемма 2′. 1°. *Если* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}^{(-)}$ $(0 < \alpha < 1)$ *и* $n \geqslant \frac{3}{\alpha}$, *то операторы* $\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)$ *могут быть определены также посредством соотношений*

$$\widetilde{D}_{\infty}^{\frac{n+1}{\rho}}\varphi(x) = D_{\infty}^{-\alpha}\left\{\frac{d}{dx}\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)\right\}, \quad x \in (0, +\infty); \tag{1.27}$$

2°. *Если* $\varphi(x) \in \widetilde{C}_{\alpha}^{(-)}(0 < \alpha < 1)$ *и* $n > \frac{3}{\alpha}$, *то*

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)\right| dx < +\infty. \tag{1.28}$$

Доказательство. 1°. Если $[a, b]$ — произвольный отрезок $0 < a < b < +\infty$), то

$$(t-x)^{\alpha n-2}|\varphi^{(n)}(t)| \leqslant t^{\alpha n-1}|\varphi^{(n)}(t)|; \quad t \geqslant b+1, \quad x \in [a, b], \tag{1.29}$$

так как ввиду условия $n > \frac{3}{\alpha}$, очевидно, $\alpha n - 2 > 1$. Следовательно

$$\frac{d}{dx}\int_{b+1}^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt = -(\alpha n-1)\times$$

$$\times\int_{b+1}^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-2}\varphi^{(n)}(t)\,dt, \quad x \in [a, b], \tag{1.30}$$

поскольку полученный после дифференцирования интеграл равномерно сходится по $x \in [a, b]$ в силу (1.29) и основных условий (0.43).

С другой стороны, поскольку из того же неравенства $\alpha n - 2 \geqslant 1$) следует непрерывность функции

$$\frac{d}{dx}\{(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(t)\} = -(\alpha n-1)(t-x)^{\alpha n-2}\varphi^{(n)}(t)$$

по обеим переменным t и x $(a \leqslant t \leqslant b+1,\ a \leqslant x \leqslant b)$, то в силу известной теоремы

$$\frac{d}{dx}\int_x^{b+1}(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt = -(\alpha n-1)\int_x^{b+1}(t-x)^{\alpha n-2}\varphi^{(n)}(t)\,dt,$$

$$x \in [a, b].$$

Отсюда и из (1.30) получим для любого $x \in (0, +\infty)$

$$\frac{d}{dx}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(t)\,dt = -(\alpha n-1)\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-2}\varphi^{(n)}(t)\,dt,$$

так как отрезок $[a, b] \subset (0, +\infty)$ был произвольным. Следовательно, ввиду определения (0.47) операторов $\bar{D}_\infty^{n/\rho}$ будем иметь

$$\frac{d}{dx}\tilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = -\frac{\alpha n-1}{\Gamma(\alpha n)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-2}\varphi^{(n)}(t)\,dt,\ x \in (0, +\infty). \tag{1.31}$$

Отметим теперь, что поскольку в силу основного условия (0.43)

$$\lim_{t\to+\infty}\inf t^{\alpha n}|\varphi^{(n)}(t)| = 0,$$

то, переходя, как и при доказательстве леммы 1′, к последовательностям $a_j \uparrow +\infty$, легко можно убедиться в справедливости неравенств

$$|\varphi^{(n)}(t)| \leqslant \int_t^{+\infty}|\varphi^{(n+1)}(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{t^{\alpha(n+1)-1}}\int_t^{+\infty}|\varphi^{(n+1)}(x)|\,x^{\alpha(n+1)-1}\,dx.$$

Отсюда, в силу того же условия (0.43), следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} t^{(n+1)\alpha-1}\varphi^{(n)}(t) = 0. \tag{1.32}$$

Далее, воспользовавшись формулой (1.31) и производя интегрирование по частям, получим

$$\frac{d}{dx}\bar{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_x^{+\infty}\varphi^{(n)}(t)\,d(t-x)^{\alpha n-1} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\left\{(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n)}(t)\Big|_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_x^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-1}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt,\ x \in (0, +\infty),$$

причем проинтегрированный член исчезает в силу (1.32) и неравенства $\alpha n-1 \geqslant 2$. Отсюда на основании формулы (0.18) и определения (0.47) можем написать

$$D_\infty^{-\alpha}\left\{\frac{d}{dx}\tilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^{+\infty}(t_2-x)^{\alpha-1}\left\{\frac{1}{\Gamma(\alpha n)}\int_{t_2}^{+\infty}(t_1-t_2)^{\alpha n-1}\varphi^{(n+1)}(t_1)\,dt_1\right\}dt_2 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha n)} \int_x^{\infty} \varphi^{(n+1)}(t_1) \int_x^{t_1} (t_2 - x)^{\alpha-1} (t_1 - t_2)^{\alpha n - 1} dt_2 dt_1 =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha(n+1))} \int_x^{+\infty} (t_1 - x)^{\alpha(n+1)-1} \varphi^{(n+1)}(t_1)\, dt_1 =$$

$$= \bar{D}_{\infty}^{\frac{n+1}{\rho}} \varphi(x), \; x \in (0, +\infty),$$

причем перемена порядка интегрирования законна, так как из условий (0.43) следует абсолютная сходимость написанных интегралов.

Утверждение 1° доказано.

2°. В силу (1.31) и (0.43) получим

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} \tilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right| dx \leqslant \frac{\alpha n - 1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} (t - x)^{\alpha n - 2} |\varphi^{(n)}(t)|\, dt dx =$$

$$= \frac{\alpha n - 1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n)}(t)| \int_0^{t} (t - x)^{\alpha n - 2} dx dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n)}(t)|\, t^{\alpha n - 1} dt < +\infty.$$

Этим утверждение 2°, а вместе с ним и лемма, доказаны.

(б) Аналог леммы 7 из [7] для того случая, когда $-1 < \alpha < 0$ и операторы последовательного дифференцирования дробного порядка $D_{\infty}^{n/\rho}$ $(n > 0)$ на функциях класса $C_{\alpha}^{(\infty)}$ определены по формулам (0.34), опять содержится в работе [8] (стр. 220), лемма 1.4).

Покажем, что если для функций из класса $\bar{C}_{\alpha}^{(\infty)}$ $(-1 < \alpha < 0)$ положить в основу определения (0.48) операторов $\bar{D}_{\infty}^{n/\rho}$ $(n > 0)$, то в этом случае эта лемма также остается в силе, но в такой формулировке.

Лемма 2″. 1°. *Если* $\varphi(x) \in \bar{C}_{\alpha}^{(\infty)}$ $(-1 < \alpha < 0)$ *и* $n \geqslant \frac{4}{1+\alpha}$, *то операторы* $\bar{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)$ *могут быть определены также посредством соотношений*

$$\bar{D}_{\infty}^{\frac{n+1}{\rho}} \varphi(x) = \frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d}{dx} \bar{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right\}, \; x \in (0, +\infty); \tag{1.27'}$$

2°. *Если* $\varphi(x) \in \bar{C}_{\alpha}^{(\infty)}$ $(-1 < \alpha < 0)$ *и* $n \geqslant \frac{4}{1+\alpha}$, *то*

$$\int_0^{+\infty} \left| \frac{d}{dx} \tilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right| dx < +\infty. \tag{1.28'}$$

Доказательство. 1°. Заметив, что при $n > \frac{4}{1+\alpha}$ имеем $(1+\alpha)n-2 \geqslant 2$, точно так же, как и при доказательстве соотношения (1.31), можем убедиться в том, что интеграл

$$\bar{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)=\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-1}\varphi^{(2n)}(t)\,dt,\ x\in(0,+\infty),$$

в силу условий (0.44) можно продифференцировать по параметру x.

В результате получим формулу

$$\frac{d}{dx}\bar{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)=-\frac{(1+\alpha)n-1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_{x}^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-2}\varphi^{(2n)}(t)\,dt,\ x\in(0,+\infty), \tag{1.33}$$

причем интеграл справа в силу тех же условий (0.44) абсолютно сходится Воспользовавшись этой формулой и (0.18), можем написать

$$D_{\infty}^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dx}\bar{D}_{\infty}^{n/\rho}\varphi(x)\right\}=-\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_{x}^{+\infty}(t_2-x)^{(1+\alpha)-1}\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n-1)}\int_{t_2}^{+\infty}(t_1-t_2)^{(1+\alpha)n-2}\varphi^{(2n)}(t_1)\,dt_1\right\}dt_2=-\int_{x}^{+\infty}\varphi^{(2n)}(t_1)\times$$

$$\times\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma((1+\alpha)n-1)}\int_{x}^{t_1}(t_2-x)^{(1+\alpha)-1}(t_1-t_2)^{(1+\alpha)n-2}\,dt_2\right\}dt_1=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)}\int_{x}^{+\infty}(t_1-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2}\varphi^{(2n)}(t_1)\,dt_1, \tag{1.34}$$

$$x\in(0,+\infty).$$

Перемена порядка интегрирования допустима, так как в силу условий (0.44) и неравенств $0\leqslant(1+\alpha)(n+1)-2\leqslant(1+\alpha)n-1$

$$\int_{x}^{+\infty}(t_1-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2}|\varphi^{(2n)}(t_1)|\,dt_1<+\infty,\ x\in(0,+\infty).$$

Отсюда следует также, что для любого $x\in(0,+\infty)$ существует последовательность $a_j\uparrow+\infty$, для которой

$$\lim_{j\to+\infty}(a_j-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2}\varphi^{(2n)}(a_j)=0. \tag{1.35}$$

Опять точно так же, как и при доказательстве соотношения (1.31), можем убедиться в том, что интеграл (1.34) в силу условий (0.44) и неравенств $1\leqslant(1+\alpha)(n+1)-3\leqslant(1+\alpha)n-1$ можно продифференцировать по параметру x.

В результате получим формулу

$$\frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d}{dx} \tilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right\} =$$

$$= \frac{(1+\alpha)(n+1)-2}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-3} \varphi^{(2n)}(t)\, dt,\ x \in (0, +\infty), \quad (1.36)$$

причем интеграл справа в силу (0.44) абсолютно сходится.

Отметим еще, что поскольку $(1+\alpha)(n+1)-1 \geqslant 3$, из (1.19) следует

$$\lim_{t \to +\infty} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} \varphi^{(2n+1)}(t) = 0,\ x \in (0, +\infty).$$

Воспользовавшись этим соотношением и соотношением (1.35), на основании (1.36) получим следующий ряд равенств:

$$\frac{d}{dx} D_{\infty}^{-(1+\alpha)} \left\{ \frac{d}{dx} \tilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x) \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} \varphi^{(2n)}(t)\, d(t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)} \lim_{j \to +\infty} \left\{ (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2} \varphi^{(2n)}(t) \Big|_x^{a_j} - \right.$$

$$\left. - \int_x^{a_j} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2} \varphi^{(2n+1)}(t)\, dt \right\} =$$

$$= - \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1)-1)} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-2} \varphi^{(2n+1)}(t)\, dt =$$

$$= - \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1))} \lim_{j \to +\infty} \int_x^{a_j} \varphi^{(2n+1)}(t)\, d(t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} =$$

$$= - \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1))} \lim_{j \to +\infty} \left\{ (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} \varphi^{(2n+1)}(t) \Big|_x^{a_j} - \right.$$

$$\left. - \int_x^{a_j} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} \varphi^{(2n+2)}(t)\, dt \right\} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)(n+1))} \int_x^{+\infty} (t-x)^{(1+\alpha)(n+1)-1} \varphi^{(2n+2)}(t)\, dt =$$

$$= \tilde{D}_{\infty}^{\frac{n+1}{\rho}} \varphi(x),\ x \in (0, +\infty),$$

т. е. формулу (1.27′).

2°. Из (1.33) на основании теоремы Фубини и условий (0.44) следуют оценки

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right|dx\leqslant\frac{(1+\alpha)n-1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty}(t-x)^{(1+\alpha)n-2}|\varphi^{(2n)}(t)|\,dt\,dx=$$

$$=\frac{(1+\alpha)n-1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_0^{+\infty}|\varphi^{(2n)}(t)|\int_0^t(t-x)^{(1+\alpha)n-2}\,dx\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)}\int_0^{+\infty}|\varphi^{(2n)}(t)|\,t^{(1+\alpha)n-1}\,dt<+\infty,$$

и утверждение 2°, а вместе с ним и лемма доказаны.

Следствие. *Если* $\varphi(x)\in\widetilde{C}_\alpha^{(\infty)}$ $(-1<\alpha<0)$ *и* $n>\dfrac{4}{1+\alpha}$, *то справедливы равенства*

$$\lim_{x\to+0}x^{-\alpha}D_\infty^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^{-1}D_\infty^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right\}=0. \tag{1.37}$$

Доказательство. Положив

$$\psi_n(x)=D_\infty^{-(1+\alpha)}\left\{\frac{d}{dx}\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)\right\},\ x\in(0,+\infty), \tag{1.38}$$

на основании формулы (1.27′) заключаем, что

$$\psi_n'(x)=\widetilde{D}_\infty^{\frac{n+1}{\rho}}\varphi(x),\ x\in(0,+\infty).$$

Следовательно, по лемме 1″ (1°)

$$\sup_{0<x<+\infty}|\psi_n'(x)|=C_n<+\infty,$$

и значит

$$|\psi_n(x)-\psi_n(1)|\leqslant\int_1^x|\psi_n'(t)|\,dt\leqslant C_n|x-1|,\ x\in(0,+\infty).$$

Так как $-1<\alpha<0$, то отсюда и еще из (1.34) и (0.44)

$$\lim_{x\to+0}x^{-\alpha}\psi_n(x)=\lim_{x\to+\infty}x^{-1}\psi_n(x)=0,$$

что, ввиду обозначения (1.38), совпадает с требуемыми соотношениями (1.37).

§ 2. Теоремы 1 и 2

Наметим доказательства теорем 1 и 2, сформулированных в конце введения статьи.

Но поскольку все основные моменты необходимых при этом рассуждений полностью совпадают с доказательствами теорем В и Б, соответственно, то нами будут отмечены только те частные места этих доказательств, в которых следует ввести небольшие видоизменения, связанные лишь с применением видоизмененных лемм из [7], [8], приведенных в § 1.

Сначала же отметим, что в случае, когда значение параметра $\alpha=0$ $(\rho=1)$, как теоремы Б, В, так и теоремы 1, 2 и методы их доказательств непосредственно сводятся к классическому.

Теорема 1. Необходимость условия (0.54) вовсе не нуждается в доказательстве, так как она непосредственно следует из соответствующей части теоремы В, ввиду очевидного включения

$$C_\alpha^*\{[0,+\infty);\ M_n\}\subset \widetilde{C}_\alpha^*\{[0,+\infty);\ M_n\}\ (-1<\alpha<1).$$

Дополнительно отметим, что в отличие от соответствующей части доказательства из работы [8], в случае $-1<\alpha<0$ $\left(\frac{1}{\rho}=1-\alpha\right)$ существование аналитической в области

$$D_\rho(\nu)=\left\{\zeta:\operatorname{Re}\zeta^\rho>\nu,\ |\operatorname{Arg}\zeta|<\frac{\pi}{2\rho}\right\},\ \nu>0,$$

функции $F(\zeta)$, предельно быстро убывающей в ее замыкании $\overline{D_\rho(\nu)}$, можно установить непосредственно, опираясь лишь на теорему Г и на одну теорему С. Е. Варшавского [13] о конформных отображениях полосообразных областей. По поводу компактной формулировки надлежащей для данного случая теоремы см., напр., [14], стр. 381.

Перейдем теперь к достаточности.

Надо показать, что при условии (0.54) каждая функция $\varphi(x)\in \widetilde{C}_\alpha^*[[0,+\infty);M_n](-1<\alpha<1,\alpha\neq 0)$, удовлетворяющая условиям (0.53)

$$L_n^\alpha\varphi=\widetilde{D}_-^{n/\rho}\varphi(0)=0\quad(n=0,\ 1,\ 2,\cdots),\tag{2.1}$$

равна тождественно нулю: $\varphi(x)\equiv 0$ на всей полуоси $[0,+\infty)$.

Полагая сначала

$$N(\alpha)=\left[\frac{4}{|\alpha|(1-|\alpha|)}\right]+1\ (-1<\alpha<1,\ \alpha\neq 0),\tag{2.2}$$

отметим, что при значениях индекса $n\geqslant N(\alpha)$ все утверждения лемм и следствий § 1 будут справедливы.

В частности при $n>N(\alpha)$ функции $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho}\varphi(x)$ согласно леммам 1′ и 1″ непрерывны и ограничены на полуоси $[0,+\infty)$ и одновременно принадлежат обоим классам $L_1(0,+\infty)$ и $L_2(0,+\infty)$.

Следуя формуле (3.40) исследования [7], полученной в процессе доказательства одной из основных теорем (теоремы 3), для значения $n = N(\alpha)$ введем в рассмотрение преобразование

$$\widetilde{\Phi}_\rho(z) = \frac{(-1)^n}{z^n} \int_0^{+\infty} E_\rho\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} \widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(t)\, dt, \quad z \in \Delta_\rho^*, \tag{2.3}$$

где

$$\Delta_\rho^* = \left\{z: \frac{\pi}{2\rho} < |\arg z| \leqslant \pi,\ 0 < |z| < +\infty\right\} \left(\frac{1}{\rho} = 1 - \alpha\right).$$

Согласно лемме 4 из [7], доказательство которой остается в силе для всех $\frac{1}{2} < \rho < +\infty$, функция $\widetilde{\Phi}_\rho(z)$ аналитична в угловой области Δ_ρ^* и непрерывна в ее замыкании $\overline{\Delta_\rho^*}$, кроме, быть может, точек 0 и ∞.

Далее, как и в формуле (3.42) исследования [7], положим

$$\mathrm{E}_\rho(t; z) = E_\rho\left(zt^{1/\rho}; \frac{1}{\rho}\right) t^{\frac{1}{\rho}-1} \left(\frac{1}{2} < \rho < +\infty\right).$$

Напомним, что, как уже отмечалось во введений, эта функция удовлетворяет уравнению вида

$$D_0^{1/\rho} \mathrm{E}_\rho(t; z) = z\mathrm{E}_\rho(t; z).$$

Пользуясь этой формулой и дословно повторяя те же рассуждения, что и в [7] в случае $0 < \alpha < 1$ (стр. 225—226), а в случае $-1 < \alpha < 0$—аналогичные рассуждения из [8] (стр. 235—236), получим, что для функции $\widetilde{\Phi}_\rho(z)$ будут справедливы формулы (2.3) при всех $n \geqslant N(\alpha)$. Нужно только в соответствующих местах вместо $D_\infty^{n/\rho} \varphi(x)$ писать $\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x)$, а вместо лемм 6 и 7 из [7] воспользоваться леммами 1′ и 2′ из § 1 и, аналогично, вместо лемм 1.3, 1.4 и соотношений (1.20) из [8]—леммами 1″, 2″ и соотношениями (1.37) из § 1 соответственно.

Далее, продолжая повторять те же рассуждения, что и в [7] (стр. 226), получим при $0 < \alpha < 1$ $(1 < \rho < +\infty)$

$$|\widetilde{\Phi}_\rho(z)| \leqslant CA_\varphi |z|^{\rho-1} \frac{M_n}{\left(\frac{|z|}{B_\varphi}\right)^n}; \quad z \in \overline{\Delta_\rho^*(-1)}, \quad n \geqslant N(\alpha), \tag{2.4}$$

и точно так же, [8] (стр. 236), при $-1 < \alpha < 0$ $\left(\frac{1}{2} < \rho < 1\right)$

$$|\widetilde{\Phi}_\rho(z)| \leqslant CA_\varphi |z|^{\rho-\frac{1}{2}} \frac{M_n}{\left(\frac{|z|}{B_\varphi}\right)^n}; \quad z \in \overline{\Delta_\rho^*(-1)}, \quad n \geqslant N(\alpha), \tag{2.4'}$$

где $\Delta_\rho^*(-1)$ — область, полученная путем сдвига влево на единицу угловой области Δ_ρ^*:

$$\Delta_\rho^*(-1) = \left\{ z: \frac{\pi}{2\rho} < |\arg(z+1)| \leqslant \pi,\ 0 < |z+1| < +\infty \right\}.$$

Следовательно, положив

$$T_{N(\alpha)}(r) = \sup_{n > N(\alpha)} \frac{r^n}{M_n},$$

из (2.4) и (2.4′) получим следующую оценку, аналогичную оценке (3.52) из работы [7]

$$|\bar{\Phi}_\rho(z)| < A_1 \frac{|z|^{\rho - \frac{1}{2}}}{T_{N(\alpha)}\left(\frac{|z|}{B_\varphi}\right)};\ z \in \overline{\Delta_\rho^*(-1)}\ (-1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0).$$

После этого опять дословно повторяются рассуждения из работы [7] (стр. 226—228), с заменой лишь $T(r)$ на $T_{N(\alpha)}(r)$, и устанавливается, что $\bar{\Phi}_\rho(z) \equiv 0$, $z \in \Delta_\rho^*$, откуда, в свою очередь, следует

$$\tilde{D}_\infty^{\rho^{N(\alpha)}} \varphi(x) \equiv 0,\ x \in (0, +\infty). \tag{2.5}$$

При этом нужно только заметить, что в силу общих свойств функции $T(r)$ (см., напр., [6], а также [7], стр. 216—217) легко убедиться в том, что для достаточно больших $r \geqslant r_0(N(\alpha))$ функция $T(r)$ совпадает с $T_{N(\alpha)}(r)$ и, следовательно, условие (0.54) эквивалентно условию

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T_{N(\alpha)}(r)}{r^{1+\frac{1}{1+\alpha}}} dr = +\infty. \tag{2.6}$$

Наконец, из (2.5) на основании следствий из лемм 1′ и 1″ и условия $\varphi(0) = 0$, окончательно получим, что $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$.

Теорема 2. Останавливаться на необходимости условия (0.56) этой теоремы опять не нужно, так как она непосредственно следует из соответствующей части теоремы Б, ввиду очевидного включения

$$C_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\} \subset \tilde{C}_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}\ (-1 < \alpha < 1).$$

Перейдем к достаточности.

Докажем, что при условии (0.56) теоремы класс $\tilde{C}_\alpha\{[0, +\infty);\ M_n\}$ $(-1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0)$ будет α-квазианалитическим, т. е. любая функция $\varphi(x)$ из этого класса, для которой $L_n^\alpha \varphi = \tilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(0) = 0$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, тождественно равна нулю на всей полуоси $[0, +\infty)$.

Положив

$$\sup_{0 < x < +\infty} |\varphi^{(n)}(x)| = m_n\ (n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{2.7}$$

заметим, что ввиду условий (0.52) будут выполняться неравенства

$$m_n \leqslant A_\varphi B_\varphi^n M_n\ (n = 1, 2, \cdots). \tag{2.8}$$

Отметим также, что если

$$\inf_{n>1} \{nm_n^{1/n}\} = 0, \tag{2.9}$$

то тождество $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$ вытекает сразу из условия $\varphi(0) = 0$ на основании теоремы Д.

Действительно, ввиду оценок (0.50) можем написать

$$\sup_{0<x<+\infty} |\varphi'(x)| = m_1 \leqslant (8en)\, m_0^{1-\frac{1}{n}}\, m_n^{1/n} \ (n \geqslant 2),$$

откуда в силу (2.9) следует тождество $\varphi'(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$. И поскольку $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$.

Поэтому нам необходимо рассмотреть только случай, когда

$$\inf_{n>1} \{nm_n^{1/n}\} = C > 0. \tag{2.10}$$

Как и при доказательстве одной из основных теорем исследования [7] (теоремы 4), покажем, что из условий (0.52) следуют оценки

$$\sup_{0<x+\infty} |\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant A_1 B_1^n M_{n-[\alpha n]} \ (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.11}$$

где $A_1 > 0$ и $B_1 > 0$ — подходящим образом выбранные постоянные.

В случае $0 < \alpha < 1$ формулы (1.3) леммы 1′ при $k = [\alpha n]$ принимают вид

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{[\alpha n]} D_\infty^{-(\alpha n - [\alpha n])} \varphi^{(n-[\alpha n])}(x); \tag{2.12}$$
$$x \in (0, +\infty) (n = 1, 2, \cdots), \ 0 < \alpha < 1.$$

В случае же $-1 < \alpha < 0$ аналогичные формулы (1.3′) леммы 1″ при $k = [(1+\alpha)\, n]$ сводятся к следующим соотношениям:

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{[(1+\alpha)\, n]} D_\infty^{-((1+\alpha)\, n - [(1+\alpha)\, n])} \varphi^{(2n-[(1+\alpha)\, n])}(x);$$
$$x \in (0, +\infty) \ (n = 1, 2, \cdots), \ -1 < \alpha < 0.$$

При этом в силу равенства $[(1+\alpha)\, n] = n + [\alpha n]$ эти соотношения можно записать также в виде

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{[(1+\alpha)\, n]} D_\infty^{-(\alpha n - [\alpha n])} \varphi^{(n-[\alpha n])}(x); \tag{2.12′}$$
$$x \in (0, +\infty) \ (n = 1, 2, \cdots), \ -1 < \alpha < 0).$$

Следовательно, вводя обозначение

$$n(\alpha) = \begin{cases} [\alpha n], & \text{при } 0 < \alpha < 1, \\ [(1+\alpha)\, n], & \text{при } -1 < \alpha < 0, \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

формулы (2.12) и (2.12′) можем записать для всех α $(-1 < \alpha < 1,\ \alpha \neq 0)$ в объединенном виде

$$\widetilde{D}_\infty^{n/\rho} \varphi(x) = (-1)^{n(\alpha)} D_\infty^{-(\alpha n - [\alpha n])} \varphi^{(n-[\alpha n])}(x), \tag{2.13}$$
$$x \in (0, +\infty) \ (n = 1, 2, \cdots),$$

причем, если $\alpha n = [\alpha n]$, то

$$\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)=(-1)^{n(\alpha)}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x),\quad x\in(0,+\infty). \tag{2.14}$$

Если же $\alpha n\neq[\alpha n]$, то опять на основании формул (2.13) буд м иметь

$$\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\int\limits_{x}^{+\infty}(t-x)^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(t)\,dt,$$

$$x\in(0,+\infty).$$

Отсюда путем замены переменной $t-x$ на t и интегрированием по частям последовательно получим

$$\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\int\limits_{0}^{+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x+t)\,dt=$$

$$=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{\int\limits_{0}^{1}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x+t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{1}^{+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\,d\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)\right\}=$$

$$=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{\int\limits_{0}^{1}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x+t)\,dt+\right.$$

$$+t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)\Big|_{1}^{+\infty}-$$

$$\left.-(\alpha n-[\alpha n]-1)\int\limits_{1}^{+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-2}\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)\,dt\right\}.$$

Так как функция $\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(t)$ на полуоси $[0,+\infty)$ равномерно ограничена и $\alpha n-[\alpha n]-1<0$, то

$$\lim_{t\to+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)=0,$$

и, следовательно

$$\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)=\frac{(-1)^{n(\alpha)}}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{\int\limits_{0}^{1}t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\varphi^{(n-[\alpha n])}(x+t)\,dt-\right.$$

$$-\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+1)-$$

$$\left.-(\alpha n-[\alpha n]-1)\int\limits_{1}^{+\infty}t^{\alpha n-[\alpha n]-2}\varphi^{(n-[\alpha n]-1)}(x+t)\,dt\right\},$$

$$x\in(0,+\infty).$$

Отсюда, воспользовавшись обозначениями (2.7), получим следующие оценки:

$$\left|\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)\right| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{m_{n-[\alpha n]}\int_0^1 t^{\alpha n-[\alpha n]-1}\,dt+\right.$$

$$\left.+\,m_{n-[\alpha n]-1}+m_{n-[\alpha n]-1}\,|\alpha n-[\alpha n]-1|\int_1^{+\infty} t^{\alpha n-[\alpha n]-2}\,dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n])}\left\{\frac{m_{n-[\alpha n]}}{\alpha n-[\alpha n]}+2m_{n-[\alpha n]-1}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)}\left\{m_{n-[\alpha n]}+m_{n-[\alpha n]-1}\right\}.$$

Значит

$$\left|\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)\right| \leqslant \frac{2}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)}\left\{m_{n-[\alpha n]}+m_{n-[\alpha n]-1}\right\}; \tag{2.15}$$

$$x\in[0,+\infty)(n=1,2,\cdots).$$

Отметим при этом, что если $n\geqslant 1$, то $n-[\alpha n]-1\geqslant 0$, так что из (2.15), в частности, вытекают неравенства

$$\sup_{0<x<+\infty}|\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)|<+\infty\ (n=1,2,\cdots). \tag{2.16}$$

С другой стороны, воспользовавшись теоремой Д в частном случае, когда $k=n-1$ $(n\geqslant 2)$, будем иметь

$$m_{n-1}\leqslant\left(\frac{8en}{n-1}\right)^{n-1}m_0^{1/n}\,m_n^{1-\frac{1}{n}}\leqslant e\,(8e)^{n-1}\,m_0^{1/n}\,m_n^{1-\frac{1}{n}}\leqslant$$

$$\leqslant C_0\,(8e)^n\,m_n^{1-\frac{1}{n}}=C_0\,n\,(8e)^n\,m_n\,(nm_n^{1/n})^{-1}\leqslant$$

$$\leqslant C_1\,(16\,e)^n\,m_n\,(nm_n^{1/n})^{-1}.$$

Воспользовавшись еще условием (2.10), получим неравенство

$$m_{n-1}\leqslant C_2^n\,m_n\ (n=2,3,\cdots), \tag{2.17}$$

где $C_2>1$ — некоторая постоянная, не зависящая от n.

Если $n\geqslant\dfrac{2}{1-\alpha}$, то $n-[\alpha n]\geqslant 2$, и из (2.17) получим

$$m_{n-[\alpha n]-1}\leqslant C_2^{n-[\alpha n]}\,m_{n-[\alpha n]},\ n\geqslant\frac{2}{1-\alpha}. \tag{2.18}$$

Подставив эти оценки в (2.15) и учитывая (2.8), приходим к неравенствам

$$|\widetilde{D}_{-}^{n/\rho}\varphi(x)|\leqslant\frac{2}{\Gamma(\alpha n-[\alpha n]+1)}\{A_\varphi B_\varphi^{n-[\alpha n]}M_{n-[\alpha n]}+$$

$$+A_\varphi(C_2B_\varphi)^{n-[\alpha n]}M_{n-[\alpha n]}\},\ n\geqslant\frac{2}{1-\alpha},$$

и, следовательно, к оценкам вида

$$\sup_{0<x<+\infty} |\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant A_2 B_2^n M_{n-[\alpha n]}, \quad n \geqslant \frac{2}{1-\alpha}. \tag{2.19}$$

При этом нужно учесть, что $1 \leqslant \alpha n - [\alpha n] + 1 \leqslant 2$ и функция $\Gamma(x)$ непрерывна и положительна при $x \in [1, 2]$.

Если же $1 \leqslant n < \frac{2}{1-\alpha}$, то из (2.16), очевидно, следует существование постоянных $A_3 > 0$ и $B_3 > 0$ таких, что

$$\sup_{0<x<+\infty} |\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant A_3 B_3^n M_{n-[\alpha n]}, \quad 1 \leqslant n < \frac{2}{1-\alpha}.$$

Отсюда и из (2.19) окончательно приходим к требуемым оценкам (2.11), когда $\alpha n \neq [\alpha n]$. Когда же $\alpha n = [\alpha n]$, оценки (2.11) вытекают из формул (2.14) на основании неравенств (2.8).

Далее, как и в [7] (стр. 233), положим

$$M_n^* = M_{n-[\alpha n]} \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

После этого, для случая $0 < \alpha < 1$, дословно повторяя все рассуждения и выкладки из [7] (стр. 233—234), получим, что $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0, +\infty)$. Нужно только в конце ссылаться не на теорему 3 из [7], а на теорему 1 из введения данной статьи.

Предположим теперь, что $-1 < \alpha < 0$. В силу (2.15) и (2.18) справедливы оценки

$$\sup_{0<x<+\infty} |\widetilde{D}_{\infty}^{n/\rho} \varphi(x)| \leqslant A_4 B_4^n m_{n-[\alpha n]} \quad (n = 1, 2, \cdots), \tag{2.20}$$

где $A_4 > 0$ и $B_4 > 0$ — некоторые постоянные, не зависящие от n.

Заметим теперь, что в силу условия $-1 < \alpha < 0$ последовательность $\{n - [\alpha n]\}_1^\infty$ пробегает весь натуральный ряд, за исключением определенной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{p_k\}_1^\infty$, $p_1 = 1$. При этом последовательность $\{p_k\}_1^\infty$ такова, что

$$p_k - 1 \in \{n - [\alpha n]\}_1^\infty, \quad k \geqslant 2. \tag{2.21}$$

Следовательно, в силу (2.17), будем иметь

$$\frac{r^{p_k}}{m_{p_k}} \leqslant \frac{(rC_2)^{p_k}}{m_{p_k - 1}} \leqslant (rC_2) \sup_{n>1} \frac{(rC_2)^{n-[\alpha n]}}{m_{n-[\alpha n]}} \quad (r \geqslant 1, \ k \geqslant 2).$$

Очевидно также, что при любом $k \geqslant 1$

$$\frac{r^{k-[\alpha k]}}{m_{k-[\alpha k]}} \leqslant (rC_2) \sup_{n>1} \frac{(rC_2)^{n-[\alpha n]}}{m_{n-[\alpha n]}} \quad (k \geqslant 1).$$

Положив

$$T_1(r) = \sup_{n>2} \frac{r^n}{m_n}, \quad T_2(r) = \sup_{n>1} \frac{r^{n-[\alpha n]}}{m_{n-[\alpha n]}}$$

и заметив, что $\{p_k\}_2^\infty \cup \{n - [\alpha n]\}_1^\infty = \{n\}_2^\infty$, на основании полученных оценок заключаем, что

$$T_1(r) \leqslant (rC_2)\, T_2(rC_2) \quad (r \geqslant 1). \tag{2.20'}$$

С другой стороны, ввиду оценок (2.8) и тождества

$$T(r)=\sup_{n>2}\frac{r^n}{M_n}\quad (r\geqslant r_0>1)$$

имеет место также неравенство

$$T(r)\leqslant A_\varphi\, T_1(rB_\varphi)\quad (r\geqslant r_0).$$

Отсюда и из (2.20′) получим

$$T(r)\leqslant Ar\, T_2(Br)\quad (r\geqslant r_1), \tag{2.21′}$$

где $A>0$ и $B>0$ — некоторые постоянные, не зависящие от r.

Теперь заметим, что в силу (2.21′) из условия (0.56) следует и условие

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln T_2(r)}{r^{1+\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}}\,dr=+\infty. \tag{2.22}$$

Положив, наконец

$$M_n^*=m_{n-[\alpha n]}\quad (n=1,2,\cdots)$$

и опять дословно повторяя все рассуждения и выкладки после формулы (3.71) из [7] (стр. 233—234), получим, что в этом случае также $\varphi(x)\equiv 0$, $x\in[0,+\infty)$. При этом нужно только в соответствующих местах вместо $T(r)$ и $M_{n-[\alpha n]}$ писать $T_2(r)$ и $m_{n-[\alpha n]}$ соответственно, и в конце ссылаться не на теорему 3 из [7], а на теорему 1 из введения данной статьи.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 3.VII.1982

Մ. Մ. ՋՐԲԱՇՅԱՆ, Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. α-քվազիանալիտիկ դասերի տեսության շուրջը (*ամփոփում*)

Անալիտիկության հասկացության հետագա ընդլայնման ու ընդհանրացման գաղափարը կապված է Ժ. Հադամարի և Է. Բորելի անվան հետ։

Դիցուք $C([0,+\infty);\ M_n)$-*ը* $[0,+\infty)$ *կիսաառանցքի վրա այն անվերջ դիֆերենցելի և սահմանափակ* $\varphi(x)$ *ֆունկցիաների բազմությունն է, որոնք բավարարում են հետևյալ տեսքի անհավասարությունների՝*

$$\sup_{0<x<+\infty}|\varphi^{(n)}(x)|\leqslant AB^n M_n\ (n=1,2,\cdots), \tag{1}$$

որտեղ $A=A_\varphi>0$ *և* $B=B_\varphi>0$ *հաստատունները կախված են, ընդհանրապես ասած,* φ *ֆունկցիայից։*

Հադամարի կողմից 1912 թ. առաջադրված պրոբլեմը, օրինակ $[0,+\infty)$ *կիսաառանցքի համար, ձևակերպվում է հետևյալ կերպ՝*

Ինչպիսի՞ պետք է լինեն $\{M_n\}_1^\infty$ *հաջորդականության անդամները, որպեսզի յուրաքանչյուր* $\varphi(x)\in C([0,+\infty);\ M_n)$ *ֆունկցիայի համար*

$$\varphi^{(n)}(0)=0\quad (n=0,1,2,\cdots).$$

հավասարություններից հետևի

$$\varphi(x)\equiv 0,\quad x\in[0,+\infty),$$

նույնությունը։

Նմանատիպ դասերը, որոնք մասնավորաբար պարունակում են անալիտիկ ֆունկցիաները, անվանվեցին քվազիանալիտիկ:

Ինչպես հայտնի է, այդ պրոբլեմի լուծումը առաջինը տվեց Ա. Դանժուան (1921), իսկ հետագայում վերջնական տեսքով Տ. Կարլեմանը (1926):

Դանժուա-Կարլեմանի թեորեմը Ա. Օստրովսկու (1930) ձևակերպմամբ պնդում է հետևյալը:

Որպեսզի $C\{[0,+\infty); M_n\}$ դասը լինի քվազիանալիտիկ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^2}\, dr = +\infty, \text{ որտեղ } T(r) = \sup_{n\geq 1} \frac{r^n}{M_n}: \tag{2}$$

Այս թեորեմի կապակցությամբ տվյալ հոդվածի առաջին հեղինակի մոտ ժամանակին ծագեց մի հարց, որը բերեց ըստ էության հետևյալ ընդհանուր պրոբլեմի դրմանը [7]:

Դիցուք $\{M_n\}_1^\infty$-ը դրական թվերի կամայական հաջորդականություն է և $T(r) = \sup_{n\geq 1} \frac{r^n}{M_n}$: $\gamma\,(0<\gamma<+\infty)$ պարամետրի տրված արժեքի համար ինչպիսին պետք է լինեն $C_\gamma\{M_n\} \subset C\{[0,+\infty); M_n\}$ ենթադասերը և $\{L_n^\gamma \varphi\}_0^\infty$ պարզագույն ֆունկցիոնալները, որպեսզի միայն

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma}}\, dr = +\infty \tag{3}$$

պայմանի դեպքում յուրաքանչյուր $\varphi(x) \in C_\gamma\{M_n\}$ ֆունկցիայի համար $L_n^\gamma \varphi = 0\ (n=0,1,2,\cdots)$ նավասարություններից հետևի $\varphi(x) \equiv 0$, $x \in [0,+\infty)$, նույնությունը:

$\gamma = 1$ արժեքի դեպքում այս պրոբլեմը հանգում է նշված քվազիանալիտիկության պրոբլեմին, որի լիակատար լուծումը տրվել էր Դանժուայի և Կարլեմանի կողմից:

Տվյալ հոդվածի առաջին հեղինակի [7] հետազոտությունում զարգացվեց մի մեթոդ, որը թույլ տվեց տալ դրված պրոբլեմի լիակատար լուծումը սկզբունքորեն կարևորագույն դեպքում, երբ $0<\gamma<1$, ինչպես նաև $1<\gamma<+\infty$ դեպքում, որն ավելի ուշ հանդիսացավ [8] հոդվածի առարկան: Նշենք, որ երբ $0<\gamma<1$, համապատասխան միակության դասերը էապես լայն են քվազիանալիտիկ դասերից, իսկ $1<\gamma<+\infty$ դեպքում պարզվեց, որ դիտարկվող դասերի ֆունկցիաները ամբողջ են:

Կիրառված եղանակը թույլ տվեց հայտնագործել միակության բնական և դրա հետ միասին պարզագույն ֆունկցիոնալների բացահայտ տեսքը:

Ավելի հարմար $\alpha = \frac{1-\gamma}{1+\gamma}\ (-1<\alpha<1)$ պարամետրի ներմուծմամբ այդ ֆունկցիոնալները գրվում են հետևյալ տեսքերով՝

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n)}(t)\, t^{\alpha n-1}\, dt\ (n=0,1,2,\cdots), \text{ երբ } 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{4}$$

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma((1+\alpha)n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(2n)}(t)\, t^{(1+\alpha)n-1}\, dt\ (n=0,1,2,\cdots), \text{ երբ } (-1<\alpha<0) \tag{4'}$$

Դրված պրոբլեմի լուծման մեթոդը բավականաչափ բարդ էր, և որպեսզի այն ավելի չբարդացվի, դիտարկվող դասերի վրա դրվում էին հետևյալ տեսքի ամենևին ոչ սկզբունքային սահմանափակումներ

$$\sup_{0<x<+\infty} \{(1+x^{|\alpha|m})|\varphi^{(n)}(x)|\} < +\infty\ (n, m = 0,1,2,\cdots), \tag{5}$$

որոնք թույլ տվեցին պարզեցնել մի շարք լեմմաների ապացույցները և կրճատել [7], իսկ հետագայում նաև [8] հոդվածների առանց այն էլ ստվար ծավալները:

(5) պայմանների առկայությամբ ստացված արդյունքների ձևակերպումները բերված են Б 4 В *թեորեմներում* (§ 0):

Տվյալ հոդվածում ցույց է տրվում, որ պրոբլեմի ամբողջական լուծման [7] հետազոտությունում զարգացված մեթոդի առանց որևէ փոփոխության, և միայն այնտեղ ներմուծված հաջորդական կոտորակային ածանցման օպերատորների, ինչպես նաև մի շարք լեմմաների վերաձևակերպումների շնորհիվ (§ 1) կարելի է հրաժարվել (5) պայմաններից, փոխարինելով դրանք (4) և (4')-ում գրած ինտեգրալների բացարձակ զուգամիտության ավելի թույլ և միանգամայն բնական պայմաններով։

Համապատասխան արդյունքների ձևակերպումները պարունակվում են 1 և 2 թեորեմներում (§ 0)։

M. M. DJRBASHIAN, V. M. MARTIROSIAN. *On the theory of α-quasianalytic classes* (summary)

The idea of futher generalization and extension of the notion of analyticity is due to J. Hadamard and E. Borel.

Let $C\{[0, +\infty); M_n\}$ be the set of infinitely differentiable bounded functions $\varphi(x)$ on $[0, +\infty)$ satisfying the inequalities

$$\sup_{0<x<+\infty} |\varphi^{(n)}(x)| \leqslant AB^n M_n \ (n \geqslant 1), \tag{1}$$

where the constants $A = A_\varphi > 0$ and $B = B_\varphi > 0$ depend, in general, on the function φ.

The problem poses by Hadamard in 1912, say, for the half-axes $[0, +\infty)$ is formulated as follows:

What conditions must satisfy the number of the sequence $\{M_n\}_1^\infty$ in order that for every function $\varphi(x) \in C\{[0, +\infty); M_n\}$ from the identities $\varphi^{(n)}(0) = 0 \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ should follow that

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad x \in [0, +\infty)?$$

Such classes containing in particular analytic functions have been called *quasianalytic.*

It is well-known that this problem was first solved by A. Danjoy (1921) and then in the final form by T. Carleman (1926).

The Danjoy—Carleman theorem as formulated by A. Ostrowski (1930) reads as follows:

The class $C\{[0, +\infty); M_n\}$ is quasianalytic if and only if

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^2} dr = +\infty, \text{ where } T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}. \tag{2}$$

This theorem has formely induced one author of this paper (M. M. Djrbashian) to pinpoint the essence of the essence of the following general problem [7]:

Let $\{M_n\}_1^\infty$ be an arbitrary sequence of positive numbers and $T(r) = \sup_{n \geqslant 1} \frac{r^n}{M_n}$. For a given parameter $\gamma \ (0 < \gamma < +\infty)$ what will be the subclasses $C_\gamma\{M_n\} \subset C\{[0, +\infty); M_n\}$ and the simplest functional $\{L_n^\gamma \varphi\}_0^\infty$ so that only when

$$\int_1^\infty \frac{\ln T(r)}{r^{1+\gamma}} dr = +\infty \tag{3}$$

for any function $\varphi \in C_\gamma\{M_n\}$ the equalities $L_n^\gamma \varphi = 0, \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$ yield the identity $\varphi(x) \equiv 0, \ x \in [0, +\infty)$?

For $\gamma = 1$ this problem is reduced to the classical problem of quasianalyticity completely solved by Danjoy and Carleman.

In the research [7] the first author of the present paper developed a method permtting to solve the problem in the crucial case $0 < \gamma < 1$ as well as in the case $1 < \gamma < +\infty$ which was the subject of the paper [8]. It's worth to note that when $0 < \gamma < 1$ the corresponding classes of uniqueness are essentially larger than the quasianalytic classes and it turns out that in the case $1 < \gamma < +\infty$ the classes under consideration are the classes of entire functions.

The developed method permitted to find the natural and *simplest* functionals of uniqueness.

After introduction of more convenient parameter $\alpha = \frac{1-\gamma}{1+\gamma} (-1 < \alpha < 1)$ these functionals have the form

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma(\alpha n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(n)}(t)\, t^{\alpha n - 1}\, dt \; (n = 0, 1, 2, \cdots) \text{ for } 0 \leq \alpha < 1, \tag{4}$$

$$L_n^\alpha \varphi = \frac{1}{\Gamma((1+\alpha) n)} \int_0^{+\infty} \varphi^{(2n)}(t)\, t^{(1+\alpha) n - 1}\, dt \; (n = 0, 1, 2, \cdots) \text{ for } -1 < \alpha < 0. \tag{4'}$$

The method of solution of the problem was very complicated and in order to avoid more complications the author poses some restrictions of not principal kind. The test functions were taken from the class of the functions satisfying conditions

$$\sup_{0 < x < +\infty} \{(1 + x^{|\alpha| m}) |\varphi^{(n)}(x)|\} < +\infty \quad (n, m = 0, 1, 2, \cdots) \tag{5}$$

which permitts to simplify the proofs of some lemmas and restrict the volumes of the papers [7], [8].

Formulations of results obtained under condition (5) are now given in theorems Б and В (§ 0).

In the present paper it is shown that without change of the method developed in [7] in whole but only equivalently redefining differential operators and slightly changing the proofs of some lemmas (§ 1) it is possible to remove the condition (5) and replace it by the more natural conditions of absolute convergence of the integrals (4) and (4′). Formulations of corresponding results are given in theorems 1 and 2 (§ 0).

ЛИТЕРАТУРА

1. *A. Denjoy*. Sur les fonctions quasi analytiques d'une variable réelle, C. R. Acad Sc., Paris, 173, 1921, 1329—1331.
2. *T. Carleman*. Les fonctions quasi analytiques, Gauthier—Villars, Paris, 1926. Jbuch Fortschritte Math., 52, 1926, 255.
3. *J. Hadamard*. Sur la généralisation de la notion de fonction analytique, C. R. Séances Soc. Math. France, 40, 1912, 28—29.
4. *A. Ostrowski*. Uber quasi-analytishe Functionen and Bestimmtheit asymptotischer Entwiklungen, Acta Math., 53, 1930, 181—266.
5. *С. Мандельбройт*. Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, Москва, ИИЛ, 1955.
6. *С. Мандельбройт*. Квазианалитические классы функций, ОНТИ, Ленинград, 1937, гл. 1.
7. *М. М. Джрбашян*. Расширение квазианалитических классов Данжуа-Карлемана, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, № 3, 1968, 171—248;

   M. M. Džrbašjan. An extension of the Denjoy-Carleman quasi-analytic classes. Amer. Math. Soc. Transl., (2) Vol. 110, 1977, 1—59.

8. *А. А. Китбалян. Задача α-квазианалитичности в классах Данжуа-Карлемана*, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», X, № 3, 1975, 207—241.

9. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, Москва, «Наука», 1966.

10. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян*. Разложения по специальным биортогональным системам и краевые задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка, Труды Моск. мат. общества, 10, 1961.

11. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян*. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3, № 1, 1968, 3—29.

12. *Е. Титчмарш*. Введение в теорию интегралов Фурье, Москва, Гостехиздат, 1948.

13. *S. E. Warschawski*. On conformal mapping of infite strips, Trans. Amer. Math., Soc., 51, № 2, 1942, 280—335.

С. Е. Варшавский. Конформное отображение бесконечных полос, Математика, Периодический сборник переводов иностранных статей, 2:4, 1958, 67—116.

14. *М. М. Джрбашян*. Некоторые вопросы теории взвешенно-полиномиальных приближений в комплексной области, Матем. сб., 36 (78), № 3, 1955, 353—440.