ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 4, 1982 Математика

УДК 517.984

Л. В. МИКАЕЛЯН

МАТРИЧНЫЕ КОНТИНУАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМ Г. СЕГЁ О ТЕПЛИЦЕВЫХ ДЕТЕРМИНАНТАХ

1°. Пусть

$$D_n(f) = \det \| c_{\nu-\mu} \|_{\nu, \mu=0}^{n}$$

—детерминант теплицевой матрицы образованной коэффициентами Фурье произвольной неотрицательной функции $f(t) \in L_1(0, 2\pi)$. Г. Сегё в работе [1] доказал, что справедливо следующее предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{D_n(f)} = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln f(t)\, dt\right\} := G(f) \ (\geqslant 0).$$

В этой же работе он показал, что при $G(f) > 0$ последовательность

$$\left\{\frac{D_n(f)}{[G(f)]^{n+1}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

— неубывающая. Спустя почти 40 лет Г. Сегё [2] нашел достаточное условие для конечности предела этого отношения и показал, что при выполнении этого условия

$$\lim_{n\to\infty} \frac{D_n(f)}{[G(f)]^{n+1}} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k\,|h_k|^2\right\},$$

где h_k — коэффициенты Фурье функции $\ln f(t)$.

Уточнением и обобщением этих результатов Г. Сегё занимались многие математики: А. Н. Колмогоров, М. Г. Крейн, М. Кац, И. Хиршман, А. Девинатц, Дж. Бакстер, Я. Л. Геронимус и другие (см., например, обзорную статью И. Хиршмана [3]). Окончательный результат для неотрицательной функции получен в [4].

В работах Б. Дьиреша, Н. Бауерса, Г. Уидома (см. [5]) был рассмотрен вопрос об асимптотике детерминантов блочно-теплицевых матриц, порожденных коэффициентами Фурье матрицы-функции $\varphi(t)$.

М. Кац в работе [6] впервые установил существование континуальных аналогов приведенных результатов Г. Сегё, а именно, показал, что если

$$D_r(\lambda, K) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^r \cdots \int_0^r \det \| K(t_\nu - t_\mu) \|_{\nu, \mu=1}^{k}\, dt_1 \cdots dt_k$$

является детерминантом Фредгольма интегрального уравнения

$$f(t)+\lambda\int_0^r K(t-s)f(s)\,ds=g(t), \tag{1}$$

то при определенных условиях на ядро $K(t)$ справедливо предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty}\frac{D_r(\lambda,K)}{\exp\left\{\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln(1+\lambda\hat{K}(t))\,dt\right\}}=$$

$$=\exp\left\{\int_0^{\infty}x\left|\int_{-\infty}^{\infty}e^{ixt}\ln(1+\lambda\hat{K}(t))\,dt\right|^2dx\right\},$$

где $\hat{K}(t)$ — преобразование Фурье ядра $K(t)$.

Дальнейшие результаты в этом направлениии получены Н. И. Ахиезером [7], И. Хиршманом [3], В. Н. Солевым [8] и другими. В недавних работах Г. Уидома были получены далеко идущие обобщения этих результатов (см., например, [9]).

В работах автора [10], [11] рассматривался вопрос об асимптотическом поведении детерминантов Фредгольма усеченного интегрального оператора Винера—Хопфа [1] с матричным ядром. Тем самым, рассматривались матричные аналоги исследований М. Каца, Н. И. Ахиезера, И. Хиршмана и др. с одной стороны, и континуальные аналоги результатов Б. Дьиреша, Н. Бауерса и Г. Уидома—с другой.

В настоящей статье уточняются результаты работ [10], [11] и выявляется роль интеграла энтропии, введенного в работе Г. Дима и И. Ц. Гохберга [12], в континуальных аналогах теорем Г. Сегё, а также рассматривается асимптотическое распределение собственных значений усеченных операторов Венера-Хопфа.

2°. Рассмотрим интегральное уравнение

$$f(t)+\lambda\int_0^r K(t,s)f(s)\,ds=g(t)\quad(0\leqslant t\leqslant r), \tag{2}$$

где

$$K(t,s)=\|k_{ij}(t,s)\|_{i,j=1}^n$$

— непрерывная $n\times n$ — матрица-функция, определенная в квадрате $[0,R]\times[0,R]$; $f(t)=\{f_j(t)\}_{j=1}^n$ и $g(t)=\{g_j(t)\}_{j=1}^n$ — искомая и заданная n-мерная вектор-функции.

При помощи известной процедуры, предложенной Фредгольмом, мы можем векторное уравнение (2) свести к скалярному уравнению

$$F(t)+\lambda\int_0^{nr}K_r(t,s)F(s)\,ds=G(t)\quad(0\leqslant t\leqslant nr). \tag{3}$$

Связь функций $F(t)$, $G(t)$, $K_r(t, s)$ с исходными осуществляется формулами:

$$F(t) = f_i(t-(i-1)r),$$
$$G(t) = g_i(t-(i-1)r),$$
$$K_r(t, s) = k_{ij}(t-(i-1)r, \quad s-(j-1)r),$$

если $(i-1)r \leqslant t < ir$, $(j-1)r \leqslant s < jr$ $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$.

Ясно, что спектры уравнений (2) и (3) совпадают. Поэтому естественно назвать детерминантом Фредгольма векторного уравнения (2) функцию

$$D_r(\lambda, K) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_0^{nr} \cdots \int_0^{nr} K_r\begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_k \\ s_1, \cdots, s_k \end{pmatrix} ds_1 \cdots ds_k, \tag{4}$$

где

$$K_r\begin{pmatrix} s_1, \cdots, s_k \\ s_1, \cdots, s_k \end{pmatrix} = \det \| K_r(s_i, s_j) \|_{i, j=1}^{k}$$

— символ Фредгольма.

Как известно [13], $D_r(\lambda, K)$ — целая функция от λ, и ее логарифмическая производная по λ является мероморфной функцией, которая при достаточно малых по модулю λ представима в виде ряда

$$\frac{D_r'(\lambda, K)}{D_r(\lambda, K)} = \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^{p-1} \int_0^{nr} \cdots \int_0^{nr} K_r(s_1, s_2) K_r(s_2, s_3) \cdots K_r(s_p, s_1)\, ds_1 \cdots ds_p$$

Учитывая связь между функцией $K_r(t, s)$ и элементами матрицы-функции $K(t, s) = \| k_{ij}(t, s) \|_{i, j=1}^{n}$, коэффициент при $(-\lambda)^{p-1}$ может быть переписан следующим образом:

$$\int_0^{nr} \cdots \int_0^{nr} K_r(s_1, s_2) \cdots K_r(s_p, s_1)\, ds_1 \cdots ds_p =$$

$$= \sum_{i_1, i_2, \cdots, i_p=1}^{n} \int_{(i_1-1)r}^{i_1 r} \cdots \int_{(i_p-1)r}^{i_p r} K_r(s_1, s_2) \cdots K_r(s_p, s_1)\, ds_1 \cdots ds_p =$$

$$= \int_0^{r} \cdots \int_0^{r} \sum_{i_1, \cdots, i_p=1}^{n} k_{i_1 i_2}(s_1, s_2) \cdots k_{i_p i_1}(s_p, s_1)\, ds_1 \cdots ds_p =$$

$$= \int_0^{r} \cdots \int_0^{r} \operatorname{sp}[K(s_1, s_2) \cdots K(s_p, s_1)]\, ds_1 \cdots ds_p.$$

Следовательно

$$\frac{D_r'(\lambda, K)}{D_r(\lambda, K)} = \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^{p-1} \int_0^{r} \cdots \int_0^{r} \operatorname{sp}[K(s_1, s_2) \cdots K(s_p, s_1)]\, ds_1 \cdots ds_p. \tag{5}$$

Обозначим через $\Gamma_r(t, s, \lambda)$ ядро резольвенты векторного уравнения (2). Известно, что $\Gamma_r(t, s, \lambda)$ при фиксированных r, t, s является мероморфной матрицей-функцией от λ и для достаточно малых по модулю λ разлагается в степенной ряд

$$\Gamma_r(t, s, \lambda) = K(t, s) + \sum_{p=1}^{\infty} (-\lambda)^p \int_0^r \cdots \int_0^r K(t, s_1) K(s_1, s_2) \cdots$$
$$\cdots K(s_p, s_1) ds_1 \cdots ds_p. \tag{6}$$

Лемма 1. *Функция $D_r(\lambda, K)$ дифференцируема по r, ее производная по r является целой функцией от λ, и если $D_r(\lambda, K) \neq 0$, то имеет место формула*

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(\lambda, K) = \lambda \operatorname{sp} \Gamma_r(r, r, \lambda). \tag{7}$$

Доказательство. Из формулы (5) следует, что

$$\ln D_r(\lambda, K) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(s_1, s_2) \cdots K(s_p, s_1)] \, ds_1 \cdots ds_p.$$

Этот ряд сходится равномерно по r при $r \in [0, R]$, $|\lambda| < 1/MR$, где $|k_{ij}(t, s)| \leqslant M$, $0 \leqslant t, s \leqslant R$, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, а $k_{ij}(t, s)$ — элементы матрицы-функции $K(t, s)$.

Нетрудно видеть, что при таких λ этот ряд можно почленно дифференцировать относительно r. В самом деле, ряд

$$\sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \lambda^p \frac{d}{dr} \int_0^r \cdots \int_0^r \operatorname{sp} [K(s_1, s_2) \cdots K(s_p, s_1)] \, ds_1 \cdots ds_p =$$

$$= \lambda \operatorname{sp} \{K(r, r) + \sum_{p=2}^{\infty} (-\lambda)^{p-1} \int_0^r \cdots$$

$$\cdots \int_0^r K(r, s_1) \; K(s_1, s_2) \cdots K(s_{p-1}, r) \, ds_1 \cdots ds_{p-1}\}$$

сходится равномерно по r при $r \in [0, R]$. Поэтому в силу (6) получим

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(\lambda, K) = \lambda \operatorname{sp} \Gamma_r(r, r, \lambda)$$

при $|\lambda| < 1/MR$.

Покажем, что $D_r(\lambda, K)$ имеет производную по r, являющуюся также целой функцией от λ. Из (4) ясно, что

$$D_r(\lambda, K) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(r) \frac{\lambda^k}{k!}, \tag{8}$$

где

$$a_k(r) = \int_0^{nr} \cdots \int_0^{nr} \det \| K_r(t_\mu, t_\nu) \|_{\mu,\nu=1}^k \, dt_1 \cdots dt_k =$$

$$= \int_0^r \cdots \int_0^r \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^n \det \| k_{i_\mu i_\nu}(t_\mu, t_\nu) \|_{\mu,\nu=1}^k \, dt_1 \cdots dt_k.$$

Следовательно

$$a_k'(r) = \sum_{p=1}^k \int_0^r \cdots \int_0^r \sum_{i_1, \ldots, i_k=1}^n \det \| k_{i_\mu i_\nu}(t_\mu, t_\nu) \|_{\mu,\nu=1}^k \Big|_{t_p = r} dt_1 \cdots$$

$$\cdots dt_{p-1} \, dt_{p+1} \cdots dt_k.$$

Используя неравенство Адамара для $a_k'(r)$, получаем оценку

$$|a_k'(r)| \leqslant M^k k^{k/2+1} r^{k-1} n^k \quad (k = 1, 2, \cdots).$$

После дифференцирования ряда (8) по r для коэффициента при λ^k получаем оценку

$$\left| \frac{a_k'(r)}{k!} \right| \leqslant \frac{(Mnr)^k}{r} \cdot \frac{k^{k/2+1}}{k!}.$$

Отсюда следует, что $d/dr\, D_r(\lambda, K)$ существует и является целой функцией от λ при любом фиксированном r.

Но при $|\lambda| < 1/MR$ мы доказали справедливость формулы (7), поэтому при таких λ

$$\frac{d}{dr} D_r(\lambda, K) = \lambda D_r(\lambda, K) \operatorname{sp} \Gamma_r(r, r, \lambda).$$

Так как в обеих частях последнего равенства стоят целые функции от λ, то оно верно при любых λ. Лемма доказана.

Отметим, что при $n = 1$ мы получаем результат, полученный впервые Н. И. Ахиезером в [7].

3°. В дальнейшем, если через B обозначено некоторое банахово пространство, то через $B^{(n)}$ обозначается множество всех n-мерных векторов с координатами из B, а через $B^{(n \times n)}$ — множество всех матриц порядка $n \times n$ с элементами из B. Норма элемента $B^{(n)}$ ($B^{(n \times n)}$) определяется, например, равной сумме норм компонент (всех элементов). При этом нетрудно видеть, что $B^{(n)}$ и $B^{(n \times n)}$ превращаются в банаховы пространства. Обозначим также через $L_p = L_p(-\infty, \infty)$ $L_{p+} = L_p(0, \infty)$ и через $C[a, b]$ — пространство непрерывных на $[a, b]$ функций.

Пусть $K(t)$ — непрерывная матрица-функция из $L_1^{(n \times n)}$. Рассмотрим интегральное уравнение вида

$$f(t) + \int_0^r K(t-s) f(s)\, ds = g(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant r), \tag{9}$$

где $f(t) \in C^{(n)}[0, r]$ и $g(t) \in C^{(n)}[0, r]$.

Детерминант Фредгольма этого уравнения определим по формуле (4), принимая в ней $\lambda=1$ и $K(t, s)=K(t-s)$. Обозначим этот детерминант через $D_r(K)$.

Из теории Фредгольма следует, что если $D_r(K)\neq 0$, то интегральное уравнение (9) имеет единственное решение при любой $g(t)\in C^{(n)}[0, r]$, а соответствующее ему однородное уравнение—только тривиальное решение.

Наряду с уравнением (9) рассмотрим еще уравнение, порожденное ядром $K(-t)$, т. е. уравнение

$$f(t)+\int_0^r K(s-t)\, f(s)\, ds=g(t) \quad (0\leqslant t\leqslant r). \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что если $D_r(K)\neq 0$, то уравнение (10) также имеет единственное решение при любой $g(t)\in C^{(n)}[0, r]$. В самом деле, однородные уравнения, соответствующие уравнениям (9) и (10), одновременно имеют тривиальные решения. Это следует из того, что если $f(t)$— решение (9) при $g(t)\equiv 0$, $f(r-t)$ будет решением (10) при $g(t)\equiv 0$ и обратно.

Если $D_r(K)\neq 0$, то обозначим через $\Gamma_r^+(t, s)(\Gamma_r^-(t, s))$ ядро резольвенты уравнения (9) (10). Как известно, они удовлетворяют уравнениям

$$\Gamma_r^+(t, s)+\int_0^r K(t-u)\,\Gamma_r^+(u, s)\, du=K(t-s), \tag{11}$$

$$\Gamma_r^-(t, s)+\int_0^r K(u-t)\,\Gamma_r^-(u, s)\, du=K(s-t). \tag{12}$$

Из (11) и (12) нетрудно получить, что

$$\Gamma_r^+(t, s)=\Gamma_r^-(r-t, r-s). \tag{13}$$

Пусть $K(t)\in L_1^{(n\times n)}$. Обозначим через

$$\hat{K}(\lambda)=I_n+\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, K(t)\, dt \quad (-\infty<\lambda<\infty),$$

где I_n — единичная матрица порядка n.

Очевидно, что матрица-функция $\hat{K}(\lambda)$ принадлежит матричному аналогу алгебры Винера $R^{(n\times n)}$. Алгебра Винера R состоит из функций $\hat{f}(\lambda)$, допускающих представление

$$\hat{f}(\lambda)=\hat{f}(\infty)+\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{i\lambda t}\, dt, \tag{14}$$

где $\hat{f}(\infty)$ — некоторая постоянная, а $f(t) \in L_1$. Подалгебра R_+ (R_-) алгебры R определяется следующим образом: $\hat{f}(\lambda) \in R_+$ (R_-), если в представлении (14) $f(t) = 0$ при $t < 0$ ($t > 0$).

Известно, что всякая неособенная матрица-функция $F(\lambda)$ из алгебры $R^{(n\times n)}$ допускает представление

$$F(\lambda) = F_+(\lambda) D(\lambda) F_-(\lambda) \quad (F(\lambda) = \widetilde{F}_-(\lambda) \widetilde{D}(\lambda) \widetilde{F}_+(\lambda)),$$

называемое левой (правой) стандартной факторизацией. Здесь $F_\pm^{\pm 1}(\lambda) \in R_\pm^{(n\times n)}$ ($\widetilde{F}_\pm^{\pm 1}(\lambda) \in R_\pm^{(n\times n)}$)($A^{-1}$—обратная матрица матрицы A), а матрица-функция $D(\lambda)$ ($\widetilde{D}(\lambda)$)— диагональная вида

$$\left\| \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\varkappa_j} \delta_{jk} \right\|_{j,\,k=1}^{n} \left(\left\| \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\widetilde{\varkappa}_j} \delta_{jk} \right\|_{j,\,k=1}^{n} \right),$$

где $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \cdots \geqslant \varkappa_n$ ($\widetilde{\varkappa}_1 \geqslant \widetilde{\varkappa}_2 \geqslant \cdots \geqslant \widetilde{\varkappa}_n$) — некоторые целые числа, называемые левыми (правыми) частными индексами.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующей теоремой из книги [15].

Теорема Г—Ф. Пусть $K(t) \in L_1^{(n\times n)}$ и

а) $\det \hat{K}(\lambda) \neq 0$ $(-\infty < \lambda < \infty)$,

б) левые и правые индексы матрицы-функции $\hat{K}(\lambda)$ равны нулю. Тогда уравнение

$$f(t) + \int_0^r K(t-s) f(s)\, ds = g(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant r),$$

начиная с некоторого r имеет единственное решение $f_r(t) \in L_p^{(n)}(0, r)$, и вектор-функции

$$\widetilde{f}_r(t) = \begin{cases} f_r(t) & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant r \\ 0 & \text{при } \quad t > r \end{cases}$$

сходятся при $r \to \infty$ по норме пространства $L_{p+}^{(n)}$ к решению уравнения

$$f(t) + \int_0^\infty K(t-s) f(s)\, ds = g(t)$$

какова бы ни была вектор-функция $g(t) \in L_{p+}^{(n)}$ $(1 \leqslant p < \infty)$.

Теорема 2. *Пусть непрерывная матрица-функция* $K(t)$ *из* $L_1^{(n\times n)} \cap L_2^{(n\times n)}$ *удовлетворяет условиям:*

а) $\det \hat{K}(\lambda) \neq 0 \; (-\infty < \lambda < \infty)$,

б) *левые и правые индексы матрицы-функции $\hat{K}(\lambda)$ равны нулю. Тогда имеет место формула*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left(1-\frac{|\lambda|}{T}\right) \ln \det \hat{K}(\lambda)\, d\lambda.$$

Доказательство. В условиях теоремы применима теорема Г—Ф. В силу которой, начиная, с некоторого $r \geqslant R_0$ $D_r(K) \neq 0$. Для таких r, согласно лемме 1, имеем

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(K) = \operatorname{sp} \Gamma_r^+(r, r).$$

Учитывая формулу (13), получим

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(K) = \operatorname{sp} \Gamma_r^-(0, 0). \tag{14}$$

Нетрудно доказать (см. [10], стр. 280), что

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{sp} \Gamma_r^-(0, 0) = \operatorname{sp} \Gamma(0), \tag{15}$$

где $\Gamma(t)$ является решением уравнения

$$\Gamma(t) + \int_0^\infty K(u-t)\,\Gamma(u)\,du = K(-t).$$

Из (14) и (15) немедленно следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \operatorname{sp} \Gamma(0).$$

Вычислим $\operatorname{sp} \Gamma(0)$.

В силу условий а) и б) имеем (см. [14])

$$\hat{K}(-\lambda) = \hat{K}_-(\lambda)\,[I_n - \hat{\Gamma}(\lambda)]^{-1},$$

где $\hat{K}_-^{\pm 1}(\lambda) \in R_-^{(n\times n)}$, а

$$I_n - \hat{\Gamma}(\lambda) = I_n - \int_0^\infty \Gamma(t)\, e^{i\lambda t}\, dt.$$

Следовательно

$$\det \hat{K}(-\lambda) = \det \hat{K}_-(\lambda)\,[\det(I_n - \hat{\Gamma}(\lambda))]^{-1}. \tag{16}$$

Очевидно, что

$$\det \hat{K}(-\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{i\lambda t}\, dt, \tag{17}$$

где $k(t) \in L_1$, и так как $K(t)$ — непрерывная матрица-функция, то в представлении (17) можно считать, что $k(t)$ также непрерывна.

Очевидно также, что

$$\det[I_n - \hat{\Gamma}(\lambda)] \in R_+ \text{ и } \det \hat{K}_-(\lambda) \in R_-.$$

Допустим, что

$$\det[I_n - \hat{\Gamma}(\lambda)] = 1 - \int_0^{\infty} \gamma(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

где $\gamma(t) \in L_{1+}$ и непрерывна.

По теореме Винера—Леви (см. [16])

$$\ln\left(1 + \int_{-\infty}^{\infty} k(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\, l(t)\, dt, \tag{18}$$

где $l(t) \in L_1$.

Поскольку $K(t) \in L_2$, то $k(t) \in L_2$, и, следовательно, правая часть (18) также из L_2 то есть $l(t) \in L_2$.

Из (17) имеем

$$k(t) = l(t) + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} l(t - s_1 - \cdots - s_{p-1})\, l(s_1) \cdots l(s_{p-1}) \times$$
$$\times ds_1 \cdots ds_{p-1}.$$

Ряд в правой части этого равенства представляет непрерывную функцию от t, так как он сходится равномерно и все члены являются непрерывными функциями, как свертки двух и более функций из L_2. Учитывая непрерывность функции $k(t)$, получаем, что в представлении (18) $l(t)$ можно выбрать непрерывной.

Из (16) и (18) после несложных вычислений получим, что

$$1 - \int_0^{\infty} \gamma(t)\, e^{it\lambda}\, dt = \exp\left\{ -\int_0^{\infty} e^{i\lambda t}\, l(t)\, dt \right\},$$

откуда следует, что $\gamma(0) = l(0)$.

По известной теореме об обращении преобразования Фурье (см. [16], стр. 134), имеем

$$l(0) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{|\lambda|}{T}\right) \ln\det \hat{K}(\lambda)\, d\lambda.$$

Применяя те же рассуждения, что и в работе [10], получаем, что $\gamma(0) = \mathrm{sp}\, \Gamma(0)$. Теорема доказана.

4°. В этом пункте мы освободимся от условия непрерывности матрицы-функции $K(t)$. Дальнейшие построения настоящего пункта являются матричными аналогами конструкций И. Хиршмана [3].

Предположим, что $K(t) \in L_1^{(n\times n)} \cap L_2^{(n\times n)}$ и существуют следующие пределы:

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h K(t)\,dt := K(+0), \quad \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_{-h}^0 K(t)\,dt := K(-0). \tag{19}$$

Впервые эти условия в скалярном случае ($n=1$) встречаются в работах И. Хиршмана (см., например, [3]).

Из формулы (5), если предположить, что $K(t, s)=K(t-s)$ и $K(t)$ непрерывная, можно получить, что

$$D_r(\lambda, K)=\exp\left\{\lambda r \operatorname{sp} K(0)-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^r\int_0^r \operatorname{sp}\left[K(s_1-s_2)\,K(s_2-s_1)\,ds_1 ds_2+\cdots\right\}. \tag{20}$$

Из условия $K(t)\in L_2^{(n\times n)}$ следует, что существуют все интегралы в правой части равенства (20). Если предположить, что матрица-функция $K(t)$ вместо непрерывности удовлетворяет условиям (19), то под $D_r(K)$ мы понимаем $D_r(1, K)$, определенной по формуле (20) с

$$K(0)=1/2\,[K(+0)+K(-0)].$$

Рассмотрим матрицы-функции

$$E_r^+(t, s)=\Gamma_r^+(t, s)-K(t-s), \tag{21}$$

$$E_r^-(t, s)=\Gamma_r^-(t, s)-K(s-t). \tag{22}$$

Из формул (11) и (12) непосредственно следует, что матрицы-функции $E_r^+(t, s)$ и $E_r^-(t, s)$ удовлетворяют уравнениям

$$E_r^+(t, s)+\int_0^r K(t-u)\,E_r^+(u, s)\,du=-\int_0^r K(t-u)\,K(u-s)\,du, \tag{23}$$

$$E_r^-(t, s)+\int_0^r K(u-t)\,E_r^-(u, s)\,du=-\int_0^r K(u-t)\,K(s-u)\,du, \tag{24}$$

Из уравнений (23) и (24) следует, что матрицы-функции $E_r^+(t,s)$ и $E_r^-(t, s)$ непрерывны относительно r, t, s $(0\leqslant t, s\leqslant r)$, так как непрерывны правые части этих уравнений.

Можно доказать, что если

1) $$K_p(t)\in L_2^{(n\times n)}(-r, r),$$

2) $$\lim_{p\to\infty}\int_{-r}^r |K_p(t)-K(t)|^2 dt=0,$$

3) $$\lim_{p\to\infty} K_p(0)=K(0),$$

то

$$\lim_{p\to\infty} D_r(K_p)=D_r(K), \quad \lim_{p\to\infty} E_r^{\pm}(p, t, s)=E_r^{\pm}(t, s),$$

где $E_r^{\pm}(p, t, s)$ — матрица-функция, определенная уравнением (23) посредством ядра $K_p(t)$.

Из формул (21) и (22), из непрерывности $E_r^+(t, s)$, $E_r^-(t, s)$, а также из условий (19) следует, что можно определить следующие матрицы:

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \Gamma_r^-(0, t)\,dt := \Gamma_r^-(0, +0),\ \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \Gamma_r^-(t, 0)\,dt := \Gamma_r^-(+0, 0).$$

Обозначим через $\delta(r)$ матрицу

$$\delta(r) = \frac{1}{2}\,[\Gamma_r^-(0, +0) + \Gamma_r^-(+0, 0)].$$

Пусть

$$K_p(t) = p/2\int_{-1/p}^{1/p} K(t+\tau)\,d\tau.$$

Ясно, что $K_p(t)$ — непрерывная матрица-функция от t $(-\infty < t < \infty)$ и принадлежит $L_2^{(n\times n)}$. Можно доказать, что

$$\lim_{p\to\infty}\int_{-r}^{r} |K_p(t) - K(t)|^2\,dt = 0$$

при любом $r > 0$. Из условий, наложенных на матрицу-функцию $K(t)$, следует, что

$$\lim_{p\to\infty} K_p(0) = K(0).$$

Для ядра $K_p(t)$ определим, как выше $D_r(K_p)$, $\Gamma_r^\pm(p, t, s)$, $\delta_p(r)$, $E_r^\pm(p, t, s)$.

Докажем, что $\lim\limits_{p\to\infty}\delta_p(r) = \delta(r)$.

В самом деле

$$\delta_p(r) = \Gamma_r^-(p, 0, 0) = K_p(0) + E_r^-(p, 0, 0),$$

так как в этом случае матрица-функция $\Gamma_r^-(p, t, s)$ непрерывна.

При $p\to\infty$ нетрудно доказать, что

$$E_r^-(p, 0, 0)\to E_r^-(0, 0) \text{ и } K_p(0)\to K(0),$$

поэтому

$$\lim_{p\to\infty}\delta_p(r) = K(0) + E_r(0, 0),$$

С другой стороны

$$\delta(r) = \frac{1}{2}\lim_{h\to+0}\left[h^{-1}\int_0^h K(t)\,dt + h^{-1}\int_0^h E_r^-(0, t)\,dt\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\lim_{h\to+0}\left[h^{-1}\int_0^h K(-t)\,dt + h^{-1}\int_0^h E_r^-(t, 0)\,dt\right] = K(0) + E_r^-(0, 0)$$

и значит $\lim\limits_{p\to\infty}\delta_p(r) = \delta(r)$.

Лемма 3. *Если матрица-функция* $K(t) \in L_1^{(n\times n)} \cap L_2^{(n\times n)}$ *удовлетворяет условиям а) и б) теорем 2 и условию (19), то начиная с некоторого* R $(r_1 > r_0 > R)$ *имеет место формула*

$$\ln D_{r_1}(K) - \ln D_{r_0}(K) = \int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sp} \delta(r)\, dr. \tag{25}$$

Доказательство. Из условий леммы следует, что существует такое R, что $D_r(K) \neq 0$ при $r > R$. С другой стороны, так как $D_r(K_p) \to D_r(K)$ при $p \to \infty$ равномерно по r при $r \in [r_0, r_1]$ $(r_1 > r_0 > R)$, то очевидно, что существует такое P, что при $p > P$ $D_r(K_p) \neq 0$. По лемме 1 имеем, что

$$\frac{d}{dr} \ln D_r(K_p) = \operatorname{sp} \Gamma_r^-(p, 0, 0) = \operatorname{sp} \delta_p(r).$$

Отсюда следует, что

$$\ln D_{r_1}(K_p) - \ln D_{r_0}(K_p) = \int_{r_0}^{r_1} \operatorname{sp} \delta_p(r)\, dr.$$

При $p \to \infty$ получаем утверждение леммы 3.

Теорема 4. *Пусть матрица-функция* $K(t) \in L_1^{(n\times n)} \cap L_2^{(n\times n)}$ *удовлетворяет условиям:*

а) $\det \hat{K}(\lambda) \neq 0$ $(-\infty < \lambda < \infty)$;

б) *левые и правые индексы матрицы-функции* $\hat{K}(\lambda)$ *равны нулю;*

б) *существуют конечные пределы*

$$\lim_{h \to +0} h^{-1} \int_0^h K(t)\, dt, \quad \lim_{h \to +0} h^{-1} \int_{-h}^0 K(t)\, dt.$$

Тогда имеет место формула

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} \left(1 - \frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln\det \hat{K}(\lambda)\, d\lambda. \tag{26}$$

Доказательство. Из формулы (25) следует, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \lim_{r \to \infty} \frac{1}{r} \int_{r_0}^{r} \operatorname{sp} \delta(r)\, dr.$$

Дакажем, что функция $\operatorname{sp}\delta(r)$ имеет предел при $r \to \infty$, тогда из последнего равенства получаем, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \lim_{r \to \infty} \operatorname{sp} \delta(r).$$

Из уравнений для ядра резольвенты $\Gamma_r^-(t, s)$ непосредственно получаем

$$\Gamma_r^-(t, 0) + \int_0^r K(s-t)\, \Gamma_r^-(s, 0)\, ds = K(-t) \; (0 \leqslant t \leqslant r), \tag{27}$$

$$\Gamma_r^-(0, t)+\int_0^r \Gamma_r^-(0, s)\,K(t-s)\,ds=K(t)\quad (0\leqslant t\leqslant r). \tag{28}$$

Из условий а) и б) следует, что матрица-функция

$$[\hat{K}_1(\lambda)]^{-1}=\left(I_n+\int_{-\infty}^{\infty}K(-t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right)^{-1}$$

допускает левую каноническую факторизацию

$$[\hat{K}_1(\lambda)]^{-1}=[I_n-\hat{\Gamma}_+(\lambda)]\,[I_n-\hat{\Gamma}_-(\lambda)], \tag{29}$$

при этом, как известно (см. [14]),

$$\hat{\Gamma}_+(\lambda)=\int_0^\infty \Gamma^-(t, 0)\,e^{i\lambda t}\,dt,$$

$$\hat{\Gamma}_-(\lambda)=\int_0^\infty \Gamma^-(0, t)\,e^{-i\lambda t}\,dt,$$

где $\Gamma^-(t, s)$ — ядро резольвенты уравнения

$$f(t)+\int_0^\infty K(s-t)\,f(s)\,ds=g(t)\quad (0\leqslant t<\infty).$$

Следовательно, матрицы-функции $\Gamma^-(t, 0)$ и $\Gamma^-(0, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\Gamma^-(t, 0)+\int_0^\infty K(s-t)\,\Gamma^-(s, 0)\,ds=K(-t)\quad (0\leqslant t<\infty),$$

$$\Gamma^-(0, t)+\int_0^\infty \Gamma^-(0, s)\,K(t-s)\,ds=K(t)\quad (0\leqslant t<\infty).$$

Из этих уравнений и (27), (28) получаем

$$\Gamma^-(t, 0)-\Gamma_r^-(t, 0)+\int_0^\infty K(s-t)[\Gamma^-(s, 0)-\Gamma_r^-(s, 0)]\,ds=0, \tag{30}$$

$$\Gamma^-(0, t)-\Gamma_r^-(0, t)+\int_0^\infty [\Gamma^-(0, s)-\Gamma_r^-(0, s)]\,K(t-s)\,ds=0. \tag{31}$$

Из равенства (30) следует, что

$$h^{-1}\int_0^h \Gamma^-(t, 0)\,dt-h^{-1}\int_0^h \Gamma_r^-(t, 0)\,dt=h^{-1}\int_0^h dt\int_0^\infty K(s-t)[\Gamma_r^-(s-0)\;-$$

$$-\Gamma^-(s,0)]\,ds = h^{-1}\int_0^h dt\int_0^\infty [K(s-t)-K(s)][\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)]\,ds +$$

$$+\int_0^\infty K(s)\,[\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)]\,ds = J_1 + J_2.$$

Первое слагаемое стремится к нулю при $h\to 0$. Это следует из того, что $\Gamma_r^-(t,0)$ и $\Gamma^-(t,0)$ принадлежат $L_{2+}^{(n\times n)}$ и из оценок

$$|J_1| \leqslant \left(\int_0^\infty |\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)|^2\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^\infty \left|h^{-1}\int_0^h [K(s-t)-K(s)]\,dt\right|^2 ds\right)^{1/2},$$

$$\int_0^\infty \left|h^{-1}\int_0^h [K(s-t)-K(s)]\right|^2 ds \leqslant \int_0^h\int_0^\infty |K(s-t)-K(s)|^2\,ds\,dt.$$

Значит существует предел

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \Gamma^-(t,0)\,dt,$$

который мы обозначим через $\Gamma^-(+0,0)$. Из вышесказанного следует, что верно равенство

$$\Gamma^-(+0,0)-\Gamma_r^-(+0,0)=\int_0^\infty K(s)[\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)]\,ds. \tag{32}$$

На основании теоремы Г—Ф получаем, что

$$\lim_{r\to\infty}\int_0^\infty |\Gamma_r^-(s,0)-\Gamma^-(s,0)|^2\,ds = 0$$

и поэтому, если к (32) применить неравенство Коши-Буняковского, то получим

$$\lim_{r\to\infty}\Gamma_r^-(+0,0)=\Gamma^-(+0,0).$$

Аналогично, исходя из равенства (31), можно получить, что существует предел

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \Gamma^-(0,t)\,dt := \Gamma^-(0,+0),$$

и имеет место равенство

$$\lim_{r\to\infty}\Gamma_r^-(0,+0)=\Gamma^-(0,+0).$$

Таким образом, $\mathrm{sp}\,\delta(r)$ имеет предел при $r\to\infty$, и

$$\lim_{r\to\infty}\mathrm{sp}\,\delta(r)=\frac{1}{2}\,[\mathrm{sp}\,\Gamma^-(+0,0)+\mathrm{sp}\,\Gamma^-(0,+0)].$$

Из факторизации (29) имеем

$$[\det \hat{K}(-\lambda)]^{-1} = \det[I_n - \hat{\Gamma}_+(\lambda)]\det[I_n - \hat{\Gamma}_-(\lambda)].$$

Пусть

$$\hat{F}_+(\lambda) = \det[I_n - \hat{\Gamma}_+(\lambda)] = 1 - \int_0^\infty \gamma_+(t)\, e^{i\lambda t}\, dt,$$

тогда если $\Gamma^-(t, 0) = \|\gamma_{ij}(t)\|_{i,j=1}^n$, то раскрыв детерминант, получим

$$\gamma_+(t) = \operatorname{sp}\Gamma^-(t, 0) + \sum f_j(t),$$

где $f_j(t)$ является сверткой двух или более функций $\gamma_{ij}(t)$. Поэтому $f_j(t)$ непрерывна и $f_j(0) = 0$.

Это значит, что

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \gamma_+(t)\, dt := \gamma_+(+0) = \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \operatorname{sp}\Gamma^-(t, 0)\, dt =$$

$$= \operatorname{sp}\Gamma^-(+0, 0). \tag{33}$$

Аналогично, если

$$\hat{F}_-(\lambda) = \det[I_n - \hat{\Gamma}_-(\lambda)] = 1 - \int_0^\infty \gamma_-(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt,$$

то

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \gamma_-(t)\, dt := \gamma_-(+0) = \operatorname{sp}\Gamma^-(0, +0).$$

Значит

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{sp}\delta(r) = \frac{1}{2}[\gamma_+(+0) + \gamma_-(+0)].$$

Вычислим $\gamma_+(+0)$. Для этого покажем, что для $\hat{F}_+(\lambda)$ верна следующая асимптотическая формула:

$$\hat{F}_+(\lambda) = 1 + \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda} + o(1)\min\{1, |\lambda|\nu^{-2}\} \tag{34}$$

при $|\lambda| \to \infty$ и $\nu = \operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. В самом деле, исходя из определения $\hat{F}_+(\lambda)$ имеем

$$\hat{F}_+(\lambda) - 1 - \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda} = -\int_0^\infty \gamma_+(t)\, e^{i\lambda t}\, dt - \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda}.$$

В силу теоремы Римана-Лебега о интеграле Фурье правая часть этого равенства будет $o(1)$ при $|\lambda| \to \infty$ и $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$. Значит, для доказательства формулы (34) достаточно показать, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left(\int_0^\infty \gamma_+(t)\, e^{i\lambda t} dt + \frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda}\right)\frac{\nu^2}{|\lambda|} = 0. \tag{35}$$

при $\operatorname{Im}\lambda > 1$ и $\nu \to \infty$.

Рассмотрим функцию $\gamma_1(t)=\gamma_+(t)-\gamma_+(+0)\,e^{-t}$. В силу (33)

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \gamma_1(t)\,dt=0.$$

Легко проверить, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left(\int_0^\infty \gamma_+(+0)\,e^{-t}e^{i\lambda t}\,dt+\frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda}\right)\frac{\nu^2}{|\lambda|}=0$$

при $\operatorname{Im}\lambda>-1$. Поэтому для доказательства (35) достаточно показать, что

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\frac{\nu^2}{|\lambda|}\int_0^\infty \gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=0. \tag{36}$$

Положим

$$g(t)=\int_0^t \gamma_1(\tau)\,d\tau.$$

Тогда $g(t)$ — непрерывная функция и существует конечный предел

$$g(\infty)=\int_0^\infty \gamma_1(\tau)\,d\tau \quad (\gamma_1(\tau)\in L_{1+}),$$

кроме этого

$$\lim_{t\to+0}\frac{g(t)}{t}=\lim_{t\to\infty} tg\left(\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to+0} t^{-1}\int_0^t \gamma_1(\tau)\,d\tau=0.$$

Поэтому

$$\int_0^\infty \gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt=\int_0^\infty e^{i\lambda t}\,dg(t)=-i\lambda\int_0^\infty g(t)\,e^{i\lambda t}\,dt.$$

Подставляя это значение в левую часть (36) и полагая $\operatorname{Im}\lambda=\nu$, получаем

$$\left|\frac{\nu^2}{|\lambda|}\int_0^\infty \gamma_1(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\right|\leqslant \nu^2\int_0^\infty |g(t)|e^{-\nu t}\,dt=\int_0^\infty \left|\frac{\nu}{t}\,g\left(\frac{t}{\nu}\right)\right| te^{-t}\,dt.$$

В силу вышесказанного семейство функций $g_\nu(t)=\left|\frac{\nu}{t}\,g\left(\frac{t}{\nu}\right)\right|(\nu>0)$ ограниченно, и поэтому, по теореме Лебега, последний интеграл стремится к нулю при $\nu\to\infty$. Формула (34) доказана.

Из формулы (34) следует, что

$$\ln\hat{F}_+(\lambda)=\frac{\gamma_+(+0)}{i\lambda}+o(1)\min\{1,\ |\lambda|\,\nu^{-2}\} \tag{37}$$

при $\lambda\to\infty$ и $\operatorname{Im}\lambda\geqslant 0$

Мы знаем, что $\ln \hat{F}_+(\lambda)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости, поэтому если взять контур интегрирования, состоящий из отрезка $[-T, T]$ вещественной оси и полуокружности C_T в верхней полуплоскости с центром в начале координат и радиуса T, то по теореме Коши, применяя (37), получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{F}_+(\lambda)\, d\lambda = -\frac{1}{2\pi}\int_{C_T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{F}_+(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-e^{2i\varphi})^2 \frac{\gamma_+(+0)}{iT e^{i\varphi}}\, Ti\, e^{i\varphi}\, d\varphi +$$

$$+\frac{o(1)}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-e^{2i\varphi})^2 \min\{1,\ T^{-1}\sin^{-2}\varphi\}\, iTe^{i\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{2} J_1 + \frac{o(1)}{2\pi} J_2.$$

Очевидно, что $J_1 = \gamma_+(+0)$. Докажем, что J_2 ограничено

$$|J_2| \leqslant \int_0^{\pi} |1-e^{2i\varphi}|^2 \min\{1,\ T^{-1}\sin^{-2}\varphi\}\, Td\varphi =$$

$$\int\limits_{\sin\varphi<\frac{1}{\sqrt{T}}} T\sin^2\varphi\, d\varphi + \int\limits_{\sin\varphi>\frac{1}{\sqrt{T}}} \sin^2\varphi\, T^{-1}\sin^{-2}\varphi\, Td\varphi < \pi.$$

Значит, мы доказали, что

$$\frac{1}{2}\gamma_+(+0) = -\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{F}_+(\lambda)\, d\lambda.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{1}{2}\gamma_-(+0) = -\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{F}_-(\lambda)\, d\lambda.$$

Следовательно

$$\lim_{r\to\infty} \operatorname{sp}\delta(r) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln\det \hat{K}(\lambda)\, d\lambda.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 4 в скалярном случае следует

Теорема 4'. *Пусть функция $K(t)\in L_1 \cap L_2$ удовлетворяет условиям*

a) $$\hat{K}(\lambda) = 1 + \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \neq 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

б) $$\operatorname{ind} \hat{K}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}[\arg \hat{K}(\lambda)]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

в) *существуют конечные пределы*

$$\lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h K(t)\,dt, \quad \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_{-h}^0 K(t)\,dt.$$

Тогда имеет место формула

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left(1-\frac{\lambda^2}{T^2}\right)^2 \ln \hat{K}(\lambda)\,d\lambda.$$

Отметим, что теорема 4, даже в скалярном случае (теорема 4′), насколько нам известно, новая.

Замечание 1. Условие б) в теоремах 2 и 4 заведомо выполняется, если вещественная или мнимая часть матрицы-функции $\hat{K}(\lambda)$ положительно (отрицательно) определенная на всей оси (см. [14], теорема 8.1). В частности, если ядро $K(t)$ удовлетворяет условию $K(t) = K^*(-t)$ и матрица-функция

$$\hat{K}(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,e^{i\lambda t}\,dt$$

—неособенная при всех $\lambda\,(-\infty<\lambda<\infty)$, то она ($\hat{K}(\lambda)$ положительно определена на всей оси и, следовательно, (см. [14], теорема 8.2), допускает факторизацию

$$\hat{K}(\lambda) = \hat{K}_+(\lambda)\,\hat{K}_+^*(\lambda).$$

Замечание 2. Если в теоремах 2 и 4 дополнительно предположить, что $\ln\det K(\lambda)\in L_1$, то утверждения этих теорем примут вид

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\det\hat{K}(\lambda)\,d\lambda.$$

Нетрудно показать, что это условие выполняется, если

$$\hat{K}_0(\lambda) = \hat{K}(\lambda) - I_n \in L_1^{(n\times n)}.$$

Замечание 3. В работе [12] для матрицы-функции

$$\hat{K}(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\,e^{i\lambda t}\,dt$$

введен интеграл энтропии

$$E(\hat{K}) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\det\hat{K}(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\,d\lambda,$$

если он существует.

Покажем, что правая часть формулы (26), при условиях теоремы 4, не что иное, как интеграл энтропии. В самом деле, если выполнены условия теоремы 4, то

$$[\det \hat{K}(-\lambda)]^{-1} = \left(1 - \int_0^\infty \gamma_+(t)\, e^{i\lambda t}\, dt\right)\left(1 - \int_0^\infty \gamma_-(t)\, e^{-i\lambda t}\, dt\right),$$

где $\gamma_+(t)$ и $\gamma_-(t)$ имеют тот же смысл, что и в доказательстве теоремы 4.

При доказательстве теоремы 4 было показано, что существуют пределы

$$\gamma_+(+0) = \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \gamma_+(t)\, dt, \quad \gamma_-(+0) = \lim_{h\to+0} h^{-1}\int_0^h \gamma_-(t)\, dt,$$

и верна формула

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2}[\gamma_+(+0) + \gamma_-(+0)].$$

С другой стороны, из формулы (37) при $R > 1/\varepsilon$ имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\ln \hat{F}_+(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda + \frac{1}{2\pi}\int_{C_R} \frac{\ln \hat{F}_+(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda = i \operatorname*{Res}_{\lambda=1/\varepsilon i} \frac{\ln \hat{F}_+(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}.$$

Из формулы (37) следует, что при $R\to\infty$ второй интеграл стремится к нулю, поэтому

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \hat{F}_+(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{\ln \hat{F}_+(1/\varepsilon i)}{2\varepsilon} = -\frac{1}{2}\gamma_+(+0).$$

Аналогично

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln \hat{F}_-(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda = -\frac{1}{2}\gamma_-(+0).$$

Следовательно, мы показали, что в условиях теоремы 4 справедлива формула

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln D_r(K)}{r} = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln\det \hat{K}(\lambda)}{\varepsilon^2\lambda^2+1}\, d\lambda = E(\hat{K}).$$

Надо отметить, что интеграл энтропии и ранее полученное значение этого предела получаются при различных методах суммирования одного и того же интеграла.

5°. В работе автора [11], существенно используя методы работы Г. Уидома [5], доказана теорема 2, которая является матричным континуальным аналогом уточненной теоремы Г. Сегё. Доказанная выше теорема 4 позволяет уточнить теорему 2 из работы [1], а именно, справедлива следующая

Теорема 5. *Пусть*

$$\hat{K}(\lambda) = I_n + \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \in \mathbf{K}^{(n\times n)}$$

удовлетворяет условиям:

а) $$\det \hat{K}(\lambda) \neq 0 \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

б) $$\operatorname{ind} \det \hat{K}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi}[\arg \det \hat{K}(\lambda)]_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

в) $K(t) \in L_2^{(n\times n)}$ *и существуют конечные пределы*

$$\lim_{h\to+0} h^{-1} \int_0^h K(t)\, dt, \quad \lim_{h\to+0} h^{-1} \int_{-h}^0 K(t)\, dt.$$

Тогда имеет место предельное соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \frac{D_r(K)}{\exp\{r E(\hat{K})\}} \det[T(\hat{K})\, T(\hat{K}^{-1})]. \tag{38}$$

Здесь через $\mathbf{K}^{(n\times n)}$ обозначена алгебра матриц-функций

$$\hat{F}(\lambda) = \hat{F}(\infty) + \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{i\lambda t}\, dt$$

с нормой

$$\|\hat{F}\| = |\hat{F}(\infty)| + \int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|\, dt + \left(\int_{-\infty}^{\infty} |t|\, |F(t)|^2\, dt\right)^{1/2},$$

которая является матричным аналогом алгебры, введенной в работе [18] М. Г. Крейном, а

$$[T(\hat{K}) f](t) = f(t) + \int_0^{\infty} K(t-s) f(s)\, ds.$$

Как известно (см. [11]), при условии $\hat{K}(\lambda) \in \mathbf{K}^{(n\times n)}$ оператор $T(\hat{K}) \times \times T(\hat{K}^{-1}) - I$ (I — единичный оператор) является ядерным оператором в $L_{2+}^{(n)}$, и поэтому ясен смысл правой части (38).

В том частном случае, когда $K_0(\lambda) = \hat{K}(\lambda) - I_n \in L_1^{(n\times n)}$, теорема 5 была доказана в работе Г. Дима [19], стр. 90).
Пусть матрица-функция

$$\hat{K}_0(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t)\, e^{i\lambda t}\, dt \in \mathbf{K}^{(n\times n)}.$$

Определим операторы

$$[T(\hat{K}_0) f](t) = \int_0^{\infty} K(t-s) f(s)\, ds,$$

$$(P_r f)(t)=\begin{cases} f(t) & \text{при } t\in[0,\ r] \\ 0 & \text{при } t\in(r,\ \infty). \end{cases}$$

Предположим, что $\hat{K}_0(\lambda)\in L_1^{(n\times n)}$, тогда, как показал Г. Дим (см. [18]), операторы $T_r(\hat{K}_0)=P_r T(\hat{K}_0) P_r$ ядерные при всех r $(0<r<\infty)$ в пространстве $L_{2+}^{(n)}$. Поэтому (см. [19], стр. 201) детерминант Фредгольма интегрального оператора $I+T_r(\hat{K}_0)$ совпадает с величиной $\prod_{j=1}^{\infty}(1+\lambda_j(r))$, где $\lambda_j(r)$ — собственные значения оператора $T_r(\hat{K}_0)$.

Заметим, что из условия $\hat{K}_0(\lambda)\in L_1^{(n\times n)}$ следует, что матрица-функция $K(t)$ $(-\infty<t<\infty)$ равномерно непрерывна и, следовательно, $K(t)\in L_2^{(n\times n)}$. Если предположить еще, что $\det(I_n+\hat{K}_0(\lambda))\neq 0$ и левые и правые индексы матрицы-функции $I_n+\hat{K}_0(\lambda)$ равны нулю, то все условия теоремы 5 выполняются, а ее утверждение в этом случае можно записать в следующем виде:

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ln(1+\lambda_j(r))-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\det[I_n+\hat{K}_0(\lambda)]\,d\lambda\right\}=$$

$$=\ln\det[T(I_n+\hat{K}_0)\,T((I_n+\hat{K}_0)^{-1})].$$

Эта формула дает асимптотику для сумм значений функции $\ln(1+z)$ в точках $\lambda_j(r)$. В этом пункте мы покажем, что из этой формулы следует справедливость подобных формул для других, подходящим образом выбранных функций.

Обозначим через $\sigma[T(\hat{K}_0)]$ и $\sigma[T(\hat{K}_0^{*})]$ спектры операторов $T(\hat{K}_0)$ и $T(\hat{K}_0^{*})$ соответственно, где $\hat{K}_0^{*}(\lambda)=\hat{K}_0(-\lambda)$. Пусть

$$M(\hat{K}_0)=\{0\}\cup\sigma[T(\hat{K}_0)]\cup\sigma[T(\hat{K}_0^{*})].$$

Если $z\notin M(\hat{K}_0)$, то можно показать (см. доказательство теоремы 6), что имеет смысл следующая величина:

$$L(z)=\ln\det[T(I_n-1/z\hat{K}_0)\,T((I_n-1/z\,\hat{K}_0)^{-1})].$$

Теорема 6. *Пусть матрица-функция*

$$\hat{K}_0(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}K(t)\,e^{i\lambda t}\,dt\in \mathrm{K}^{(n\times n)}\cap L_1^{(n\times n)},$$

и $F(z)$ — любая локально аналитическая функция на множестве $M(\hat{K}_0)$, причем $F(0)=0$. Тогда операторы $T_r(\hat{K}_0)$ $(0<r<\infty)$ ядерные и справедлива формула

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}F(\lambda_j(r))-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}F(\hat{K}_0(\lambda))\,d\lambda\right\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)\frac{d}{dz}L(z)\,dz,$$

где $\{\lambda_j(r)\}_{j=1}^{\infty}$ — *собственные значения оператора* $T_r(\hat{K}_0)$, *а* Γ — *контур, содержащий* $M(\hat{K}_0)$ *и проходящий через область аналитичности функции* $F(z)$.

Доказательство. Если $z\,\overline{\in}\,M(\hat{K}_0)$, то операторы

$$I-1/z\,T(\hat{K}_0),\quad I-1/z\,T(\hat{K}_0')$$

обратимы, что, в свою очередь, эквивалентно тому, что матрица-функция $I_n-1/z\,\hat{K}_0(\lambda)$ допускает левую и правую факторизацию без индексов (см. [15], стр. 284), откуда следует обратимость этой матрицы-функции в алгебре $\mathbf{K}^{(n\times n)}$. Значит $\sigma(\hat{K}_0)\subset M(\hat{K}_0)$, где $\sigma(\hat{K}_0)$ — спектр $\hat{K}_0(\lambda)$ как элемент алгебры $\mathbf{K}^{(n\times n)}$.

Применяя теорему Г—Ф, нетрудно видеть, что спектры операторов $T_r(\hat{K}_0)$ и $T_r(\hat{K}_0')$ содержатся в любой окрестности $M(\hat{K}_0)$, начиная с $r\geqslant R_0$ (R_0 зависит от этой окрестности).

Так как $M(\hat{K}_0)$ — компакт, то существует открытое множество G, содержащее $M(\hat{K}_0)$, где $F(z)$ аналитична. Выберем в G контур Γ (вообще говоря, несвязный), так, чтобы внутри Γ содержался компакт $M(\hat{K}_0)$. В силу вышесказанного, Γ будет содержать $\sigma(\hat{K}_0)$ и спектры операторов $T_r(\hat{K}_0)$, начиная с некоторого $r>R_0$. Поэтому мы можем определить функцию $F(\hat{K}_0)$ от элемента $\hat{K}_0(\lambda)$ алгебры $\mathbf{K}^{(n\times n)}$ и функцию $F(T_r)$ от оператора $T_r(\hat{K}_0)$ по формулам:

$$F(\hat{K}_0)(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)(zI_n-\hat{K}_0(\lambda))^{-1}\,dz,$$

$$F(T_r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)(zI-T_r)^{-1}\,dz.$$

Отметим, что из ядерности $T_r(\hat{K}_0)$ и условия $F(0)=0$ следует (см. [19], стр. 209) ядерность оператора $F(T_r)$. Его собственными значениями будут числа $F(\lambda_j(r))$. Значит ряд $\sum F(\lambda_j(r))$ сходится абсолютно.

Предположим, что $z\,\overline{\in}\,M(\hat{K}_0)$, тогда, как следует из вышесказанного, матрица-функция $I_n-1/z\,\hat{K}_0(\lambda)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 5 и поэтому справедлива формула:

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\lambda_j(r)}{z}\right)-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\ln(I_n-1/z\,\hat{K}_0(\lambda))\,d\lambda\right\}=L(z).\quad(39)$$

Во втором члене левой части применена формула (см. [19], стр. 208)

$$\ln\det(I-A) = \operatorname{sp}\ln(I-A).$$

Пусть Γ — выбранный нами контур. Тогда, если $z\in\Gamma$, то $z\bar{\in} M(\hat{K}_0)$ и кроме этого, очевидно, что множество матриц-функций

$$I_n - 1/z\,\hat{K}_0(\lambda)\ (z\in\Gamma)$$

является компактным в $K^{(n\times n)}$. В этом случае можно доказать, что сходимость в (39) равномерна относительно z при $z\in\Gamma$.

Если учесть еще, что выражение, стоящее под знаком предела и превая часть в (39) аналитичны по z, то ясно, что равенство (39) можно дифференцировать, т. е. имеет место формула

$$\lim_{r\to\infty}\frac{d}{dz}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{\lambda_j(r)}{z}\right)-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\ln\left(I_n-1/z\,\hat{K}_0(\lambda)\right)d\lambda\right\}=\frac{d}{dz}L(z). \tag{40}$$

Учитывая, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(1-\frac{\lambda_j(r)}{z}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j(r)}{z\,(z-\lambda_j(r))}$$

и интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dz}\operatorname{sp}\ln\left(I_n-\frac{1}{z}\hat{K}_0(\lambda)\right)d\lambda=\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\left[\frac{K_0(\lambda)}{z}(zI_n-K_0(\lambda))^{-1}\right]d\lambda$$

(как известно (см. [19], стр. 208) справедлива формула

$$\frac{d}{dz}\operatorname{sp}\ln(I-A(z))=-\operatorname{sp}\left[(I-A(z))^{-1}\frac{dA(z)}{dz}\right])$$

сходятся абсолютно, то (40) после умножения на $1/2\pi i\,F(z)$ примет следующий вид:

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{F(z)}{z-\lambda_j(r)}-\frac{F(z)}{z}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{r}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\left[\frac{1}{2\pi i}(F(z)(zI_n-\hat{K}_0(\lambda))^{-1}-\frac{F(z)}{z}I_n\right]d\lambda\right\}=\frac{1}{2\pi i}F(z)\frac{d}{dz}L(z).$$

В силу равномерности по z $(z\in\Gamma)$ это соотношение можно интегрировать по контуру Γ относительно z.

$$\lim_{r\to\infty}\left\{\int_{\Gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{F(z)}{z-\lambda_j(r)}-\frac{F(z)}{z}\right)dz-\right.$$

$$\left.-\frac{r}{2\pi}\int_{\Gamma}\int_{-\infty}^{\infty}\operatorname{sp}\left[\frac{1}{2\pi i}(F(z)(zI_n-\hat{K}_0(\lambda))^{-1}-\frac{F(z)}{z}I_n\right]d\lambda dz\right\}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)\frac{d}{dz}L(z)\,dz.$$

В силу условия $F(0)=0$ получим, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(\frac{F(z)}{z-\lambda_j(r)}-\frac{F(z)}{z}\right)dz=\sum_{j=1}^{\infty}F(\lambda_j(r))$$

и поэтому абсолютно сходится. По той же причине $(F(0)=0)$ имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{sp}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left(F(z)(zI_n-\hat{K}_0(\lambda))^{-1}-\frac{F(z)}{z}I_n\right)dz\,d\lambda=$$

$$=\mathrm{sp}\int_{-\infty}^{\infty}F(\hat{K}_0(\lambda))\,d\lambda.$$

Докажем, что последний интеграл абсолютно сходится. Так как $0\in M(\hat{K}_0)$ и $F(0)=0$, то $F(z)$ разлагается в степенной ряд

$$F(z)=\sum a_k z^k$$

радиуса сходимости $q>0$. Выберем A так, чтобы $|\hat{K}_0(\lambda)|<q_1$ $(q_1<q)$ при $|\lambda|>A$, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty}|F(\hat{K}_0(\lambda))|\,d\lambda\leqslant\int_{|\lambda|<A}|F(\hat{K}_0(\lambda))|d\lambda+\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|\,q_1^{k-1}\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{K}_0(\lambda)|\,d\lambda<\infty.$$

Теорема доказана.

В заключение приношу благодарность профессору М. Г. Крейну за постановку задачи и за обсуждения результатов. Благодарю также профессора В. М. Адамяна за обсуждения результатов.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.X.1981 и
26.V.1982

Լ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Տյոպլիցյան դետերմինանտների մասին Գ. Սեգյոյի թեորեմների մատրիցային կոնտինուալ անալոգներ (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրվում է $K(t)$ *մատրիցային կորիզով*

$$(T_r f)(t)=f(t)+\int_0^r K(t-s)f(s)\,ds$$

օպերատորի $D_r(K)$ *Ֆրեդհոլմի դետերմինանտի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ* $r\to\infty$: *Ստացված արդյունքները հանդիսանում են տյոպլիցյան ֆորմերի դետերմինանտների ասիմպտոտիկայի վերաբերյալ Գ. Սեգյոյի արդյունքների մատրիցային կոնտինուալ անալոգները։*

Ուսումնասիրված է նաև

$$(\tilde{T}_r f)(t)=\int_0^r K(t-s)f(s)\,ds$$

օպերատորների սեփական արժեքների ասիմպտոտիկ բաշխումը, երբ $r\to\infty$։

L. V. MIKAIELIAN. *The matrix continual analogues of Szego's theorems on Teoplitz determinants* (summary)

In the paper the asymptotic behaviour for $r \to \infty$ of Fredholm determinant $D_r(K)$ of integral operator

$$(T_r f)(t) = f(t) + \int_0^r K(t-s) f(s)\, ds$$

with matrix kernel $K(t)$ is obtained. The results are the matrix continual analogues of well-khnown theorems of G. Szego on asymptotic behaviour of determinants of Teoplitz forms. The asymptotic distribution of eigenvalues of the operators

$$(\bar{T}_r f)(t) = \int_0^r K(t-s) f(s)\, ds$$

for $r \to \infty$ are also discussed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *G. Szego*. Ein Grenzwertsatz über Toeplitzschen Determinanten einer reelen positiven Funktion, Math. Ann., 76, 1915, 490—503.
2. *G. Szego*. On certain Hermitian forms associated with the Forier seris of a positive function, In: Festsschrift Marcel Riasz. Lund., 1952, 228—238.
3. *J. J. Yr. Hirschman*. Recenr developments in the theory of finite Toeplits operators, In: Advances in Probability & Related Topics, Dekker, New York, 1971, v. 1.
4. *Б. Л. Голинский, И. А. Ибрагимов*. О предельной теореме Г. Сегё, Изв. АН СССР, серия матем., 35, вып. 2, 1971, 408—427.
5. *H. Widom*. Asymptotic Behavior of Block—Toeplitz Matrices and Determinants II, Advances in Math., 21, 1976, 1—29.
6. *M. Kac*. Toeplitz Matrices, Translation kernels and a ralated problem in probability theory. Duke Math. Jour., 21, 1954, 501—509.
7. *Н. И. Ахиезер*. Континуальный аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах, Укр. мат. жур., 16, № 4, 19664, 445—462.
8. *В. Н. Солев*. О континуальном аналоге одной теоремы Г. Сегё, Записки научн. семинаров ЛОМИ, 39, 1974, 104—109.
9. *H. Widom*. Spectral Asymptotics of hypersuraces, Intergal Equations and Operator Theory. v. 1/3, 1978, 415—443.
10. *Л. В. Микаелян*. О многомерном континуальном аналоге одной теоремы Г. Сегё, Изв. АН АрмССР, «Математика», XI, № 3, 1976, 275—286.
11. *Л. В. Микаелян*. Асимптотическое поведение детерминантов Фредгольма усеченных интегральных операторов с матричными ядрами, зависящими от разности аргументов, ДАН Арм.ССР, 68, № 3, 1979, 137—145.
12. *H. Dym, J. Gohberg*. On an extension problem, generalized Fourier analysis, and an entropy formula, Integral Equations and Operator Theory, v. 3-2, 1980, 143—215.
13. *Э. Гурса*. Курс математического анализа, т. 3, часть 2, М.—Л.: ГТТН, 1934.
14. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13, № 2, 1958, 66—172.
15. *И. Ц. Гохберг, И. А. Фельдман*. Уравнения в свертках и проекционные методы их решения, М., «Наука», 1973.
16. *Н. И. Ахиезер*. Лекции по теории аппроксимации, М., Гостехиздат, 1947.
17. *М. Г. Крейн*. О некоторых новых банаховых алгебрах и теоремы типа Винера—Леви для интегралов и рядов Фурье, Мат. исследования, 1, № 1, 1966.
18. *H. Dym*. Trace Formulas for Blocks of Teoplits—Like Operators, Jour. of Functional Analysis, 31, 1976, 69—100.
19. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука». 1967.