ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 3, 1982 Математика

УДК 517.55

И. А. ДЖВАРШЕЙШВИЛИ

О ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО КЛАССА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В БИЦИЛИНДРЕ

§ 1. Предварительные сведения

Через **C** будем обозначать пространство комплексных чисел, **R** — пространство действительных чисел. Пусть

$\mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \times \mathbf{C} = \{Z = (z_1, z_2);\ z_i \in \mathbf{C},\ i = 1, 2\}$, $\mathbf{R}^2 = \{r = (r_1, r_2);\ r_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2\}$.

Далее

$$U_r^2 = \{Z = (z_1, z_2): z_j \in \mathbf{C},\ |z_j| < r_j,\ r_j \in \mathbf{R},\ j = 1, 2,\ r = (r_1, r_2)\},$$

$$T_r^2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2): \omega_j \in \mathbf{C},\ |\omega_j| = r_j,\ r_j \in \mathbf{R},\ j = 1, 2,\ r = (r_1, r_2)\},$$

$$U^2 = U_1^2,\ T^2 = T_1^2,\quad 1 = (1, 1),$$

$$dm_2(\omega) = [2\pi]^{-2}\, d\theta_1,\ d\theta_2,$$

где $\omega \in T^2$, $\omega_j = e^{i\theta_j}$, $j = 1, 2$.

Если $r = (r_1, r_2) \in \mathbf{R}$ и $Z = (z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2$, то $rZ = (r_1 z_1, r_2 z_2)$.

Ядром Пуассона $P_R(Z, \omega)$, $Z \in U^2$, $\omega \in T^2$, $z_j = r_j e^{i\theta_j}$ и $\omega_j = e^{i\varphi_j}$, $j = 1, 2$, называется произведение

$$P_R(Z, \omega) = P_{R_1}(r_1, \theta_1 - \varphi_1) \cdot P_{R_2}(r_2, \theta_2 - \varphi_2),$$

здесь $R = (R_1, R_2)$, $0 < r_j < R_j$, $j = 1, 2$, а

$$P_{R_j}(r_j, \theta_j - \varphi_j) = \frac{R_j^2 - r_j^2}{R_j^2 - 2 R_j r_j \cos(\theta_j - \varphi_j) + r_j^2}$$

— обычное ядро Пуассона.

Заметим, что

$$P(Z, \omega) > 0,\ \int_{T^2} P(Z, \omega)\, dm_2(\omega) = 1.$$

Треугольной окрестностью точки $Z = (r_1 e^{ix_1}, r_2 e^{ix_2})$ относительно T_R^2 назовем множество

$$\Omega(Z, \rho, \theta) = \Delta(r_1 e^{ix_1}, \rho_1, \theta_1) \times \Delta(r_2 e^{ix_2}, \rho_2, \theta_2),$$

где $\rho = (\rho_1, \rho_2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, а множество

$$\Delta(re^{it}, \rho_1, \theta_1) = \Big\{ z = re^{it} + i\varepsilon e^{i(t + \Psi + \pi)},$$

$$0 < \varepsilon < \rho_1 < \cos\frac{\pi}{2}\theta_1, |\Psi| < \frac{\pi}{2}\theta_1,\ \theta_1 \in (0, 1) \Big\}.$$

Символом $Z=(r_1e^{i\lambda_1}, r_2e^{i\lambda_2})^{\lambda}\to t\in T^2$ мы обозначим стремление Z к t таким образом, что

$$\frac{1}{\lambda}<\frac{1-r_1}{1-r_2}<\lambda,\quad \lambda>1$$

и будем называть λ-пределом.

Обозначим через L двумерный сегмент. L будем называть λ-регулярным ($\lambda>1$ — данное число), если отношение длины его непараллельных сторон находится между $1/\lambda$ и λ.

Пусть функция F определена в области U^2. Функция F имеет в точке $\omega\in T^2$ λ-некасательный предел, если найдутся числа $\theta=(\theta_1, \theta_2)$ и $\rho=(\rho_1, \rho_2)$ такие, что существует предел

$$\lim_{\substack{Z\to\Omega(\omega,\rho,\theta)\\ Z\xrightarrow{\lambda}\omega}} F(Z).$$

Скажем, что аналитическая функция f в U^2 принадлежит классу H^p, $p>0$, если интеграл

$$\int_{T^2}|f(r_1e^{i\theta_1}, r_2e^{i\theta_2})|^p\, dm_2(\omega)$$

ограничен для $r_1<1$, $r_2<1$. Функция f, аналитическая в U^2, принадлежит классу N, если

$$\int_{T^2}\ln^+|f(r_1e^{i\theta_1}, r_2e^{i\theta_2})|\, dm_2(\omega)$$

ограничен для $r_1<1$, $r_2<1$.

В 1934 г. Зигмунд ([9], [3], стр. 476) установил, что для ограниченной аналитической функции f, определенной в U^2, справедлива теорема типа Фату, то есть в этом случае у f существуют почти всюду на T^2 некасательные пределы.

Им же ([10], [3], стр. 476) в 1949 году было дано обобщение предыдущего результата в следующем направлении: если f—аналитическая функция в U^2 принадлежит классу H^p, то f имеет почти всюду на T^2 некасательные пределы. Далее в 1950 году Кальдероном ([11], [3], стр. 478) был установлен следующий результат: если функция u бигармонична и если для каждой точки из множества $E\subset T^2$ существует треугольная окрестность, в которой u ограничена, то u имеет предел по некасательным путям почти всюду на E. А для функции класса N существование уже λ-некасательных пределов установили Кальдерон и Зигмунд ([12], [3], стр 483) также в 1950 году. С другой стороны, существуют примеры аналитических в U^2 функций, у которых почти всюду на T^2 существуют λ-некасательные пределы, а сама функция не принадлежит классу N.

Поэтому представляет интерес расширение классов H^p и N с сохранением основного свойства функций данных классов, существование почти всюду некасательных и λ-некасательных пределов. Введем следующие определения.

Определение 1. Скажем, что аналитическая в U^2 функция f принадлежит классу $GH^{\delta}(U^2)$, если почти для каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2}) \in T^2$ существуют: последовательность

$$r_k = (r_{1k}, r_{2k}),\quad \frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1,\quad k=\overline{1,\infty},\ j=1,2,\quad 0<r_{j1}<\cdots$$
$$\cdots r_{jk} < \cdots < 1,\ \lim_{k\to\infty} r_{jk} = 1,\ j=1,2$$

и числа $N = N(f, x)$, $C = C(f)$ такие, что

$$\text{(а)}\qquad \overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\ \frac{1}{|L|}\iint\limits_{L} |f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|^{\delta}\, d\alpha d\beta = N(\omega),$$

где $(x_1, x_2) \in L$, L — λ-регулярный двумерный сегмент;

$$\text{(в)}\qquad \iint\limits_{T^2} |f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|^{\delta}\, d\alpha\, d\beta \leqslant \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})},\ k=\overline{1,\infty},\ \delta>0.$$

Определение 2. Скажем, что аналитическая в U^2 функция f принадлежит классу $GN(U^2)$, если почти для каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2}) \in T^2$ существуют: последовательность

$$r_k = (r_{1k}, r_{2k}),\quad \frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1,\ j=1,2,\ k=\overline{1,\infty},\ 0<r_{j1}<\cdots$$
$$\cdots < r_{jk} < \cdots < 1,\ \lim_{k\to\infty} r_{jk} = 1,\ j=1,2$$

и числа $A = A(\omega, f)$, $C = C(f)$ такие, что

$$\text{(а}')\qquad \lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}} \frac{1}{|L|}\iint\limits_{L} \ln^+ |f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta = A(\omega) < \infty,$$

где $(x_1, x_2) \in L$, L — λ-регулярный двумерный сегмент;

$$\text{(в}')\qquad \iint\limits_{T^2} \ln^+ |f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta \leqslant \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})},\ k=\overline{1,\infty}.$$

§ 2. Существование угловых граничных значений

Прежде чем перейти к изложению основного результата этого параграфа сформулируем следующую лемму.

Лемма 2.2. *Пусть дана двойная последовательность*

$$R_k = (r_{1k}, r_{2k}),\ k=1,\infty,\ 0<r_{j1}<\cdots<r_{jk}<\cdots<1,\ j=1,2,$$

$$\frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1,\ j=1,2,\ k=\overline{1,\infty}\ \textit{и}\ r_{jk}\uparrow 1\ \textit{при}\ k\to\infty.$$

Далее $\Omega(R_k, \rho_k, \theta)$ — *треугольная окрестность относительно* $T^2_{R_k}$, *где* $\rho_k = (\rho_{1k}, \rho_{2k})$ *и* $\rho_{jk} = (1-r_{jk})$, $j=1,2$, $k=\overline{1,\infty}$ *и* θ_j — *фиксиро-*

ванное число из $(0,1)$. *Тогда существует треугольная окрестность* $\Omega(1, \rho_0, \theta_0)$ *точки* $1=(1,1)$ *относительно* T^2 *такая, что*

$$\Omega_0(1, \rho_0, \theta_0) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Omega(R_k, \rho_k, \theta).$$

Основной целью этого параграфа является доказательство следующей теоремы.

Теорема 2.2. *Пусть* f — *аналитическая функция в* U^2. *Если в каждой точке* $\omega \in E$, $E \subset T^2$ *и* $\operatorname{mes}_2 E > 0$ (*где* $\operatorname{mes}_2 E$ — *плоская мера Лебега*) *выполнены условия* (а′) *и* (в′) *определения* 2, *то почти всюду на множестве* E *функция* f *имеет некасательный* λ-*предел.*

Доказательство. В силу того, что функция $\ln^+|f|$ субгармоническая (см. [1], стр. 44) и в силу одного неравенства из [1], стр. 44 имеем

$$\ln^+|f(Z)| \leqslant \int_{T^2} P_R(Z, \omega) \ln^+|f(R\omega)|\, dm_2(\omega), \tag{2.3}$$

где $Z=(r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy})$, $R=(R_1, R_2)$ и $r_j<R_j$, $j=1, 2$. Пусть в точке $\omega_0=(e^{i\varphi}, e^{i\psi})$ выполнено условие (а′) определения 2. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует число $N=N(\varepsilon)$ такое, что при $k>N$ и для $|\Pi|<1/N=\eta$ (Π — двумерный λ-регулярный сегмент и $|\Pi|$ — площадь этого сегмента, причем $(\varphi, \psi)\in\Pi$) имеем

$$\frac{1}{|\Pi|}\iint_{\Pi} \ln^+|f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta \leqslant A(\omega_0)+\varepsilon. \tag{2.4}$$

Введем функцию $\Phi(\rho_1 e^{ix_1}, \rho_2 e^{ix_2}) = \ln^+|f(r_{1k} e^{ix_1}, r_{2k} e^{ix_2})|$, при $\rho_j=r_{jk}$ $j=1, 2$, $k=\overline{1, \infty}$ и $(x_1, x_2)\in\Pi_\eta$, где $\Pi_\eta=[\varphi-\eta, \varphi+\eta; \psi-\eta, \psi+\eta]$ — двумерный сегмент, а в остальных точках $\Phi(z_1, z_2)=0$. Пусть теперь число N выбрано так, что для точки $Z=(r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy})$ из (2.3) при $k>N$ имеем $r_1<r_{1k}$ и $r_2<r_{2k}$, $R_k=(r_{1k}, r_{2k})$. Используя выше введенную функцию Φ, разобьем в выражении (2.3) интеграл на два интеграла. Получим

$$\ln^+|f(Z)| < \int_{\Pi_\eta} P_{R_k}(Z, \omega)\, \Phi(R_k, \omega)\, dm_2(\omega) +$$

$$+\int_{T^2/\Pi_\eta} P_{R_k}(Z, \omega) \ln^+|f(R_k(\omega)|\, dm_2(\omega) = J_1(Z)+J_2(Z). \tag{2.5}$$

Как следует из неравенства (26) леммы 5 (см. [2], стр. 94) и неравенства (2.4), имеем

$$\sup {}_1(Z) \leqslant C(A(\omega_0)+\varepsilon), \tag{2.6}$$

при этом sup берется по $Z=(r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy})\in\Omega(R_k\omega_0, \rho, \theta)$ и $\frac{1}{\lambda}<$ $<\frac{1-r_1}{1-r_2}<\lambda$, причем $k>N$, $\theta=(\theta_1, \theta_2)$, $\theta_j\in(0,1)$ фиксировано, а константа C не зависит от ε, k и точки ω_0. Пусть $\rho_k=(\rho_{1k}, \rho_{2k})=(1-r_{1k}, 1-r_{2k})$. Заметим, что для $Z=(r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy})\in \Omega(R_k\,\omega_0, \rho_k, \theta)$ имеем

$$\operatorname{tg}|x-\varphi|\leqslant \frac{\rho_{1k}\sin\theta_1}{r_{1k}-\rho_{1k}\cos\theta_1}=\varkappa_{1k},\ \operatorname{tg}|y-\psi|\leqslant\frac{\rho_{2k}\sin\theta_2}{r_{2k}-\rho_{2k}\cos\theta_2}=\varkappa_{2k},$$

где $\omega_0=(e^{i\varphi}, e^{i\psi})$, $\theta=(\theta_1, \theta_2)$ и $\rho_k=(\rho_{1k}, \rho_{2k})$, $R_k=(r_{1k}, r_{2k})$. Так как $\lim\limits_{k\to\infty}\varkappa_{jk}=0$, $j=1, 2$, то для $\eta=1/N$ существует такой номер $N_0>N$, что при $k>N_0$ будем иметь

$$(x, y)\in\left(\varphi-\frac{\eta}{2},\ \varphi+\frac{\eta}{2};\ \psi-\frac{\eta}{2},\ \psi+\frac{\eta}{2}\right). \tag{2.7}$$

Пусть $\omega\in T^2\setminus\Pi_\eta$. Тогда в силу (2.7) для $Z\in\Omega(R_k\,\omega_0, \rho_k, \theta)$ и $k>N_0$ имеем

$$P_{R_k}(Z, \omega)\leqslant C\,\frac{(r_{1k}-r_1)(r_{2k}-r_2)}{\eta^4}, \tag{2.8}$$

где $C>0$ и не зависит от k и Z.

Так как функция f удовлетворяет условию (в′), то из (2.8) для $Z\in\Omega(R_k\,\omega_0, \rho_k, \theta)$ имеем

$$|J_2(Z)|\leqslant C\,\frac{(r_{1k}-r_1)(r_{2k}-r_2)}{\eta^4(1-r_{1k})(1-r_{2k})}\leqslant C\,\frac{\rho_{1k}\,\rho_{2k}\,\eta^{-4}}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}=C\eta^{-4}, \tag{2.9}$$

где C не зависит от k и Z. Следовательно, из соотношений (2.5) (2.6) и (2.9) для $Z=(r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy})\in\Omega(R_k\,\omega_0, \rho_k, \theta)=\Omega_k$ справедливо неравенство

$$\sup_{Z\in\Omega_k}\ln^+|f(Z)|<C_1, \tag{2.10}$$

где C_1 не зависит от k и $\dfrac{1}{\lambda}<\dfrac{1-r_1}{1-r_2}<\lambda$. Теперь в силу леммы 2.1, существует треугольная окрестность точки $\omega_0=(e^{i\varphi}, e^{i\psi})$, $\Omega_0=\Omega(\omega_0, \rho_0, \theta_0)$ такая, что $\Omega_0\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\Omega_k$.

Отсюда и из (2.10) непосредственно получаем $\sup\ln^+|f(Z)|<C$ или $\sup|f(Z)|<e^C$, где sup берется по $Z=(r_1 e^{ix}, r_2 e^{iy})\in\Omega_0$ и $\dfrac{1}{\lambda}<\dfrac{1-r_1}{1-r_2}<\lambda$, а константа C может зависеть только от точки ω_0. Следовательно, на основании теоремы (4.13) из [3], стр. 478 заключаем, что функция f имеет почти всюду на E некасательные λ-пределы, и теорема доказана.

Следствие 2.11. *Пусть f принадлежит классу $GH(U^2)$, тогда почти всюду на T^2 у функции f существуют некасательные λ-пределы.*

Замечание 2.12. Утверждения типа (2.2) и (2.11) справедливы и для функций класса $GH^0(U^2)$.

В связи с полученными результатами возникают следующие вопросы:

I) Если отбросить условие (а′), (а) определения 2 (1), останется ли верным следствие 2.11?

II) Если условие (в′), (в) заменить на условие

$$\iint_{T^2} \ln^+ |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})| \, d\alpha d\beta \geqslant \frac{C}{(1-r_{1k})^{1+\varepsilon}(1-r_{2k})^{1+\eta}}$$

для любой $\{r_k\}$, $\varepsilon, \eta > 0$, остается ли верным следствие 2.11?

В [4] были построены функции, которые дают отрицательный ответ на поставленные вопросы (I) и (II) для одномерного случая. Пусть этими функциями являются $f_{\rm I}(z)$ и $f_{\rm II}(z)$. Тогда на поставленные вопросы (I) и (II) дадут отрицательный ответ функции

$$F_{\rm I}(Z) = f_{\rm I}(z_1) f_{\rm I}(z_2), \quad F_{\rm II}(Z) = f_{\rm II}(z_1) f_{\rm II}(z_2),$$

где $Z = (z_1, z_2) \in U^2$.

Следующая теорема представляет обобщение теоремы 1.5.1. из [5] на случай двух переменных.

Теорема 2.13. *Пусть функция $f(Z)$ аналитична в U^2 и для каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2}) \in E$, $E \subset T^2$, $\operatorname{mes}_2 E > 0$ существуют: последовательность $r_k = r_k(\omega) = (r_{1k}, r_{2k})$, $0 < r_{j1} < \cdots < r_{jk} < \cdots < 1$,*

$$\frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1, \quad j = 1, 2, \; k = \overline{1, \infty}, \quad \lim_{k \to \infty} r_{jk} = 1$$

и число C такие, что

$$\text{(i)} \qquad \lim_{\substack{|L| \to 0 \\ k \to \infty}} \frac{1}{|L|} \iint_L |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|^\delta \, d\alpha d\beta = 0,$$

L — двумерный λ-регулярный сегмент,

$$\text{(ii)} \qquad \iint_{T^2} |f(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|^\delta \, d\alpha d\beta < \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}, \quad k = \overline{1; \infty},$$

тогда $f(Z) \equiv 0$ для $z \in U^2$.

§ 3. Обобщение теоремы Хинчина и Островского на случай бицилиндра

В этом параграфе мы докажем теорему, аналогичную теореме Хинчина и Островского, для класса $GN(U^2)$.

Теорема 3.1. *Пусть дана последовательность $\{f_n\}$ функций, аналитических в бицилиндре U^2 и удовлетворяющих условиям:*

I. *Для почти каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2}) \in T^2$ существуют: последовательность $r_k = r_k(\omega, f) = (r_{1k}, r_{2k})$, не зависящая от n, причем*

$$0 < r_{j1} < \cdots < r_{jk} < \cdots < 1, \quad \frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1, \; j = 1, 2, \; k = \overline{1, \infty},$$

$\lim\limits_{k \to \infty} r_{jk} = 1$, *и константа C (также не зависящая от n) такие, что* (а) $$\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}} \frac{1}{|L|}\iint\limits_{L} \ln^+ |f_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta \leqslant A(\omega) < \infty,$$

$n=\overline{1, \infty}$, *L — λ-регулярный двумерный сегмент и* $(x_1, x_2) \in L$.

(в) $$\iint\limits_{T^2} \ln^+ |f_n(r_{1k} e^{i\alpha}, r_{2k} e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta \leqslant \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})},$$

$$k = \overline{1, \infty}, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

2. *Последовательность* $\{f_n\}$ *равномерно сходится в точках множества* $E \subset T^2$, $\mathrm{mes}_2 E > 0$.

Тогда последовательность $\{f_n\}$ *равномерно сходится внутри* U^2 *к функции класса* $GN(U^2)$.

Доказательство. Пусть $F_R(Z) = f(RZ)$, $R = (R_1, R_2)$, $|R_j| < 1$, $= 1, 2$ и $Z = (r_1 e^{i\alpha}, r_2 e^{i\beta}) \in U^2$. Тогда в силу одного неравенства из 1], стр. 39 имеем

$$\ln^+ |F_R(Z)| \leqslant \int\limits_{T^2} P(Z, \omega) \ln^+ |F_R(\omega)|\, dm_2(\omega) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(1-r_1)(1-r_2)} \int\limits_{T^2} \ln^+ |F_R(\omega)|\, dm_2(\omega). \tag{3.2}$$

Пусть в точке $\omega_1 \in T^2$ выполняется условие (а) теоремы. Заменим R в неравенстве (3.2) на r_k, где r_k взято из условия теоремы, причем пусть $r_{jk-1} < r_j < r_{jk}$, $j = 1, 2$. Тогда из (3.2) и условия (в) теоремы имеем

$$\ln^+ |f(r_k Z)| \leqslant \frac{C}{(1-r_1)(1-r_2)(1-r_{1k})(1-r_{2k})}. \tag{3.3}$$

Обозначим $W = r_k Z$ и $W = (\rho_1 e^{i\alpha}, \rho_2 e^{i\beta})$. Тогда

$$r_{jk-1}^2 < \rho_j < r_{jk}^2, \; j = 1, 2 \text{ и } 1 - r_{jk-1}^2 > 1 - \rho_j > 1 - r_{jk}^2, \; j = 1, 2.$$

В силу ограничений, наложенных теоремой на последовательность r_k, имеем

$$1 - \rho_j < C(1 - r_{jk-1}). \tag{3.4}$$

Из (3.3) и (3.4) имеем

$$\ln^+ |f(W)| < \frac{C}{(1-\rho_1)^2 (1-\rho_2)^2}, \tag{3.5}$$

где $W = (\rho_1 e^{i\alpha}, \rho_2 e^{i\beta})$. Применим неравенство (3.5) к функциям $f_n(Z)$, $Z \in U^2$, получим

$$|f_n(Z)| < \exp \frac{C}{(1-r_1)^2 (1-r_2)^2}, \tag{3.6}$$

где $Z = (r_1 e^{i\alpha}, r_2 e^{i\beta})$. Из оценки (3.6) следует, что последовательность функций $\{f_n\}$ равномерно ограничена внутри U^2. Допустим, что последовательность $\{f_n\}$ не сходится в U^2. Тогда из нее можно выделить две подпоследовательности $\{f_{n_k'}\}$ и $\{f_{n_k''}\}$, $k = \overline{1, \infty}$, сходящиеся в

U^2 к различным аналитическим функциям. Следовательно, разность $f_{n'_k}(Z)-f_{n''_k}(Z)\to\varphi(Z)$. С другой стороны, в силу условия теоремы $f_{n'_k}(\omega)-f_{n''_k}(\omega)\to 0$ на множестве $E\subset T^2$, $\mathrm{mes}_2 E>0$. Кроме того так как

$$\ln^+|\varphi_k(Z)|=\ln^+|f_{n'_k}(Z)-f_{n''_k}(Z)|<$$

$$\leqslant \ln^+|f_{n'_k}(Z)|+\ln^+|f_{n''_k}(Z)|+\ln 2,$$

то

$$\overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint_L \ln^+|\varphi_l(r_{1k}e^{i\alpha},\ r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta\leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint_L \ln^+|f_{n'_e}(r_{1k}e^{i\alpha},\ r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta+$$

$$+\overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint_L \ln^+|f_{n''_e}(r_{1k}e^{i\alpha},\ r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta+\ln 2,$$

где L — λ-регулярный двумерный сегмент и $\omega_1\in L$. В силу условия теоремы каждый из пределов ограничен числом $A(\omega_1)$, то есть

$$\overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint_L \ln^+|\varphi_e(r_{1k}e^{i\alpha},\ r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta\leqslant 2A(\omega_1)+\ln 2. \tag{3.7}$$

Аналогично показывается, что

$$\iint_{T^2}\ln^+|\varphi_e(r_{1k}e^{i\alpha},\ r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta\leqslant\frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}. \tag{3.8}$$

Из (3.7), (3.8) и теоремы Фату ([6], стр. 133) заключаем, что $\varphi\in GN(U^2)$. В силу теоремы 2.12 заключаем, что у функции φ почти всюду на T^2 существуют некасательные λ-пределы, и $\varphi(\omega)=0$, когда $\omega\in E$, $E\subset T^2$, $\mathrm{mes}_2 E>0$. Пользуясь теперь замечанием из [3], стр. 483 заключаем, что $\varphi(Z)\equiv 0$. Значит, последовательность $\{f_n\}$ сходится всюду в U^2 и равномерно внутри U^2. Теорема доказана.

§ 4. Характеристические свойства граничных значений функций классов $GN(U^2)$ и $GH^\delta(U^2)$

В этом параграфе охарактеризуем измеримые функции двух переменных, которые могут быть предельными значениями функций класса $GN(U^2)$ или $GH^\delta(U^2)$, $\delta>0$.

Теорема 4.1. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы измеримая функция $\varphi(\omega)$, определенная на T^2, почти всюду на T^2 совпадала с некасательным λ-пределом $f(\omega)$ некоторой функции $f(Z)$ класса $GN(U^2)$, является существование последовательности многочленов $\{P_n\}$ таких, что*

1. *$\{P_n(\omega)\}$ почти всюду на T^2 сходится к $\varphi(\omega)$,*

2. *почти для каждой точки* $\omega \in T^2$ *существуют* $r_k = r_k(\omega) = (r_{1k}, r_{2k})$, $0 < r_{j1} < r_{j2} < \cdots < r_{jk} < \cdots < 1$, $\frac{2}{3} < \frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}} < 1$, $j = 1, 2$, $k = \overline{1, \infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} r_{jk} = 1$ *и константа* C *такие, что*

(а) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}} \left|\frac{1}{|L|}\iint\limits_L \ln^+ |P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta\right| = M(\omega) < \infty,$$

где L — λ-*регулярный двумерный сегмент и*

(б) $$\overline{\lim_{k\to\infty}} \iint\limits_{T^2} \ln^+ |P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta < \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}.$$

Доказательство. Докажем сначала необходимость. Пусть $f(\omega)$, $\omega \in T^2$—некасательные λ-пределы функции f класса $GN(U^2)$, тогда для почти каждой точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2})$ существуют: последовательность $r_k = r_k(\omega) = (r_{1k}, r_{2k})$, $0 < r_{j1} < \cdots < r_{jk} < \cdots < 1$, удовлетворяющая условиям теоремы и константы $C = C(f)$ и $M(\omega)$, такие что

$$\overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}} \frac{1}{|L|} \iint\limits_L \ln^+ |f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta = M(\omega) < \infty, \tag{4.2}$$

где L — λ-регулярный сегмент и $(x_1, x_2) \in L$

$$\iint\limits_{T^2} \ln^+ |f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})| d\alpha d\beta < \frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}. \tag{4.3}$$

Пусть $\{\rho_k\}$, $\rho_k = (\rho_{1k}, \rho_{2k})$ — последовательность такая, что $0 < \rho_{j1} < \cdots < \rho_{jk} < \cdots < 1$, $\lambda^{-1} < \frac{1-\rho_{1k}}{1-\rho_{2k}} < \lambda$, $\lambda > 1$, λ — фиксированное число, $j = 1, 2$, $k = \overline{1, \infty}$ и $\rho_{jk} \to 1$ при $k \to \infty$. Рассмотрим последовательность функций

$$F_n(Z) = f(\rho_n Z). \tag{4.4}$$

Функция $F_n(Z)$ аналитична для $Z \in \tilde{U}^2$. Причем U^2 является областью Рунге (см. [7], стр. 28). Поэтому для $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, найдется многочлен $P_n(Z)$ такой, что

$$|F_n(Z) - P_n(Z)| < \varepsilon_n,\ Z \in U^2,\ n = \overline{1, \infty}. \tag{4.5}$$

Так как $f(\rho_n \omega) \xrightarrow{\lambda} f(\omega)$ почти для всех ω, то последовательность $P_n(\omega)$ почти для всех $\omega \in T^2$ сходится к $f(\omega)$. Пусть теперь для точки $\omega = (e^{ix_1}, e^{ix_2})$ имеет место условие (4.2). Рассмотрим выражение

$$\overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}} \frac{1}{|L|} \iint\limits_L \ln^+ |P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\, d\alpha d\beta =$$

$$= \overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}} \frac{1}{|L|} \iint\limits_L \ln^+ |[P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta}) - f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})] +$$

$$+f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta \leqslant \overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint\limits_L \ln^+|P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})- \quad (4.6)$$

$$-f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta + \overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint\limits_L \ln^+|f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})\,d\alpha d\beta + \ln 2.$$

Ит (4.4) и (4.5) следует, что

$$\overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint\limits_L \ln^+|P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})-f(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta<\varepsilon_n C, \quad (4.7)$$

где L — λ-регулярный сегмент и $(x_1, x_2)\in L$. Далее в силу (4.2), (4.6) и (4.7) имеем

$$\overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint\limits_L \ln^+|P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta< A(\omega)+\varepsilon_n C+\ln 2,$$

а поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint\limits_L \ln^+|P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta< A(\omega)+\ln 2.$$

Аналогично показывается, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\iint\limits_{T^2} \ln^+|P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|\,d\alpha d\beta<\frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}.$$

Достаточность немедленно следует из теоремы 3.1.

Для функций класса $GH^3(U^2)$ имеет место следующая

Теорема 4.8. *Необходимым и достаточным условием для того, чтобы измеримая функция $\varphi(\omega)$, определенная на множестве E, $E\subset T^2$, $\mathrm{mes}_2 E>0$, почти всюду на E совпадала с некасательными λ-пределами $f(\omega)$ некоторой функции класса $f\in GH^3(U^2)$, является существование последовательности многочленов $\{P_n\}$ таких, что*

1. *$\{P_n(\omega)\}$ почти всюду на T^2 сходится к $\varphi(\omega)$,*

2. *почти для каждой точки $\omega\in T^2$ существуют $r_k=r_k(\omega)=(r_{1k}, r_{2k})$, $0<r_{j1}<\cdots<r_{jk}<\cdots<1$, $\frac{2}{3}<\frac{1-r_{jk+1}}{1-r_{jk}}<1$, $j=1, 2$, $k=\overline{1,\infty}$, $\lim\limits_{k\to\infty} r_{jk}=1$ и константа C такие, что*

(а) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \overline{\lim_{\substack{|L|\to 0\\ k\to\infty}}}\frac{1}{|L|}\iint\limits_L |P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|^3\,d\alpha d\beta=A(\omega)<\infty,$$

где L — λ-регулярный двумерный сегмент и

(б) $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\iint\limits_{T^2} P_n(r_{1k}e^{i\alpha}, r_{2k}e^{i\beta})|^3\,d\alpha\, d\beta<\frac{C}{(1-r_{1k})(1-r_{2k})}.$$

Основные результаты этой работы были анонсированы в статье [8].

Вычислительный центр
АН Грузинской ССР

Поступила 10.XI.1980

Ի. Ա. ՋՎԱՐՇԵԻՇՎԻԼԻ. Բիգլանում անալիտիկ ֆունկցիաների մի դասի եզրային հատկությունների մասին *(ամփոփում)*

Աշխատանքում մտցված են երկգլանում որոշված անալիտիկ $GN(U^2)$ *և* $GH^{\delta}(U^2)$ *ֆունկցիաները, որոնք էապես ընդհանրացնում են* N *և* H^{δ}, $\delta>0$ *դասերը։ Ցույց է տրված, որ նշված ֆունկցիաները գրեթե ամենուրեք ունեն անկյունային սահմանային արժեքներ։*

I. A. JVARSHEISHVILI. *On boundary properties of a class of analytic functions in bicylinder* (summary)

The classes $GN(U^2)$ and $GH^{\delta}(U^2)$ are introduced, which generalize classes N and H^{δ}, $\delta > 0$ for functions from these classes the existence of angular boundary condition is established.

ЛИТЕРАТУРА

1. *У. Рудин*. Теория функций в поликруге, М., 1974.
2. *В. Г. Челидзе*. Метод Абеля-Пуассона суммирования рядов Фурье, Труды Тбил. матем. ин-та, 13, Тбилиси, 1944.
3. *А. Зигмунд*. Тригонометрические ряды, т. 2, «Мир», М., 1965.
4. *И. А. Джваршейшвили*. О граничных свойствах аналитических функций, Сообщ. АН ГССР, 87, № 1, 1977.
5. *И. А. Джваршейшвили*. О поведении аналитических функций вблизи границы области, Автореферат канд. диссертации, Тбилиси, 1980.
6. *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, «Наука», М., 1974.
7. *Б. В. Шабат*. Введение в комплекный анализ, т. 2, «Наука», М., 1976.
8. *И. А. Джваршейшвили*. Об одном классе аналитических функций в единичном поликруге, Сообщ. АН ГССР, 95, № 2, 1979.
9. *A. Zygmung*. On the differentiability of multiple integrals, Fundam. Math., 23, 1934.
10. *A. Zygmund*. On the boundary values of functions of several complex variables Fundam. Math., 36, 1949.
11. *A. P. Calderon*. On the behaviour of harmonic functions on the boundary, T.A.M.S 68, 1950.
12. *A. P. Calderon, A. Zygmund*. Note on the boundary values of functions of several complex variables, Math. Studies, 25, 1950.