ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 3, 1982 Математика

УДК 517.548
517.956

А. А. ВАГАРШАКЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В настоящей статье рассматривается линейная система из двух уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} u_x &= a_{11}v_x + a_{12}v_y + b_{11}u + b_{12}v + c_1, \\ -u_y &= a_{21}v_x + a_{22}v_y + b_{21}u + b_{22}v + c_2 \end{aligned} \tag{1}$$

относительно неизвестных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$, $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \infty$. Предположим, что все коэффициенты системы (1) равномерно ограничены, измеримы и, кроме этого

$$a_{12} \geqslant \delta > 0, \quad 4a_{12}a_{21} - (a_{11} + a_{22})^2 > \delta > 0, \tag{2}$$

где δ — некоторая константа. Простыми вычислениями можно показать (см. [2]), что каждая система вида (1), коэффициенты которой удовлетворяют условиям (2), может быть записана в следующей комплексной форме:

$$w_{\bar z} = \mu w_z + \vartheta \overline{w_z} + \alpha w + \beta \overline{w} + \gamma, \quad z = x + iy, \tag{3}$$

где $\mu(z), \cdots, \gamma(z)$ — комплексные измеримые функции, удовлетворяющие неравенству вида

$$|\mu(z)| + |\vartheta(z)| \leqslant k < 1,$$

а функции α, β, γ равномерно ограничены.

Мы будем исследовать следующую задачу. Пусть E — некоторое множество, лежащее на действительной оси. Требуется найти условия на множество E, при которых два непрерывных вплоть до границы решения уравнения (3), совпадающие на множестве E, тождественно равны.

Заметим, что в случае, когда все коэффициенты уравнения (3) равны нулю, мы приходим к теореме единственности для аналитических функций. Хорошо известно, что в этом случае для единственности необходима и достаточна положительность лебеговой меры множества E. Как мы увидим ниже таков же ответ в том случае, когда $\mu = \vartheta = 0$ (см. [6], стр. 158).

В настоящей статье исследуется общий случай приведенной задачи единственности решений уравнений (3). Получено условие на множество E, зависящее от числа k, обеспечивающее единственность.

1°. В настоящей статье мы существенно будем опираться на следующую теорему Л. Берса и Л. Ниренберга [1] (см. [2]). Пусть $w(z)$

является решением равномерно эллиптического ($|\mu|+|\vartheta|\leqslant k<1$) уравнения (3) в верхней полуплоскости. Тогда $w(z)$ допускает представление

$$w(z)=e^{s(z)}f(\chi(z))+s_0(z),$$

где $s(z)$ и $s_0(z)$ непрерывны при $\operatorname{Im} z\geqslant 0$ и вещественны при $\operatorname{Im} z=0$; $\xi=\chi(z)$ определяет гомеоморфизм замкнутой верхней полуплоскости на себя и является решением уравнения Бельтрами

$$\chi_{\bar z}=\tilde{\mu}\chi_z, \tag{4}$$

где $|\tilde{\mu}|\leqslant k<1$, а функция $f(\xi)$ аналитична при $\operatorname{Im}\xi>0$.

Если $\gamma\equiv 0$, то теорема справедлива при $s_0\equiv 0$. Если $\mu\equiv\vartheta\equiv 0$, то теорема справедлива при $\chi(z)\equiv z$.

Из последнего замечания сразу следует, что в случае $\mu\equiv\vartheta\equiv 0$ для единственности необходимо и достататочно, чтобы лебегова мера E была больше нуля.

Для исследования единственности в общем случае нам понадобятся некоторые результаты о квазиконформных отображениях. Пусть $\xi=\chi(z)$ — гомеоморфизм замкнутой верхней полуплоскости на себя, удовлетворяющий уравнению (4). Обозначим через $h(t)$ функцию

$$h(t)=\chi(t),\quad -\infty<t<\infty.$$

Известно (см. [3], стр. 62), что функция $h(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{1}{M}\leqslant\frac{h(x+t)-h(x)}{h(x)-h(x-t)}\leqslant M, \tag{5}$$

где

$$M=M(k)=\frac{e^{\frac{1+k}{1-k}\pi}}{16}\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-e^{-\frac{(2n-1)(1+k)}{1-k}\pi}}{1+e^{-\frac{2n(1+k)}{1-k}\pi}}\right)^{8}. \tag{6}$$

Пусть $h(t)$ — монотонная функция, удовлетворяющая неравенствам (5). Тогда (см. [3], стр. 69) существует гомеоморфное отображение верхней полуплоскости на себя такое, что для него удовлетворяется уравнение (4), где $|\tilde{\mu}(z)|\leqslant\dfrac{M^2-1}{M^2+1}$.

Приведем некоторые обозначения, которые будут применяться в дальнейшем. Через Δ мы обозначим интервал на действительной оси, а длину Δ — через $|\Delta|$. Пусть $E\subset(-\infty,\ \infty)$ — некоторое множество. Рассмотрим все покрытия E счетным набором интервалов $\{\Delta_j\}_{j=1}^{\infty}$ и положим

$$M_\sigma(E)\inf\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\Delta_j|^\sigma\right),$$

где infimum берется по всем покрытиям E, а $0<\sigma<1$ (см. [4]).

Следующая лемма в несколько иной форме содержится в работе автора [5].

Лемма. *Пусть $h(x)$ — возрастающая функция, удовлетворяющая неравенствам (5), а μ_h — мера Стильтьеса, порожденная этой функцией. Если для замкнутого множества E существует интервал Δ такой, что*

$$M_\sigma(\Delta \setminus E) < 4^{-\sigma} M_\sigma(\Delta),$$

где $2^\sigma = \dfrac{M+1}{M}$, *то* $\mu_h(E) > 0$.

Доказательство. Докажем некоторые неравенства для функции $h(x)$, которые непосредственно следуют из (5). Пусть x и δ — положительные числа, причем $\delta < x$. Тогда

$$h(x+\delta) - h(x) \leqslant M(h(x) - h(x-\delta)).$$

Так как $h(0) \leqslant h(x-\delta)$, то

$$h(x+\delta) - h(x) \leqslant M(h(x) - h(0)).$$

Если $3\delta < x$, то

$$h(x+\delta) - h(x-\delta) \leqslant M(h(x-\delta) - h(x-3\delta))$$

или

$$h(0) < h(x-3\delta) \leqslant \frac{(M+1)\,h(x-\delta) - h(x+\delta)}{M} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(M+1)^2 h(x) - (2M+1)\,h(x+\delta)}{M^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M^2 h(x) - (2M+1)(h(x+\delta) - h(x))}{M^2}.$$

Таким образом, при $3\delta < x$ имеет место неравенство

$$h(x+\delta) - h(x) \leqslant \frac{M^2}{2M+1}(h(x) - h(0)).$$

В общем случае, если для некоторого натурального n имеет место неравенство $(2^n-1)\,\delta < x$, то

$$h(x+\delta) - h(x) \leqslant \frac{M^n}{(M+1)^n - M^n}(h(x) - h(0)). \tag{7}$$

Действительно, пусть $(2^n-1)\,\delta < x$ и $1 \leqslant k < n$. Из неравенства (5)' где вместо x написано $x+\delta-2^k\delta$, а вместо t, $2^k\delta$, следует

$$h(x+\delta) - h(x+\delta-2^k\delta) \leqslant M(h(x+\delta-2^k\delta) - h(x+\delta-2^{k+1}\delta)).$$

Поэтому

$$h(x+\delta-2^{k+1}\delta) \leqslant \frac{1}{M}((M+1)\,h(x+\delta-2^k\delta) - h(x+\delta)). \tag{8}$$

Последовательно применяя неравенство (8) для $k = n-1, \cdots, 1$ получим

$$h(0) \leqslant h(x+\delta-2^n\delta) \leqslant \frac{1}{M}((M+1)\,h(x+\delta-2^{n-1}\delta) - h(x+\delta)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{M}\left(\frac{M+1}{M}(M+1)\,h(x+\delta-2^{n-2}\delta) - h(x+\delta)) - h(x+\delta)\right) =$$

$$=\frac{1}{M^2}\Big((M+1)^2h(x+\delta-2^{n-2}\delta)-(2M+1)h(x+\delta)\Big)\leqslant\cdots\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{M^n}\Big((M+1)^n h(x)-((M+1)^n-M^n)h(x+\delta)\Big)=$$

$$=\frac{1}{M^n}\Big((M^nh(x)-((M+1)^n-M^n)(h(x+\delta)-h(x))\Big).$$

Полученное неравенство легко переписать в форме (7). Аналогичными рассуждениями можно доказать, что если $(2^n-1)\delta<x$, то

$$h(\delta)-h(0)\leqslant\frac{M^n}{(M+1)^n-M^n}(h(x+\delta)-h(x)). \tag{9}$$

Пусть Δ_1 и Δ_2 — два интервала, которые не пересекаются и имеют общую граничную точку. Из полученных нами неравенств (7) и (9) следует, что

$$\mu_h(\Delta_1)\leqslant\frac{M^n}{(M+1)^n-M^n}\mu_h(\Delta_2), \tag{10}$$

если $(2^n-1)\,|\Delta_1|\leqslant|\Delta_2|$. В частности, неравенство (10) имеет место при $n=\left[\log_2\frac{|\Delta_1|+|\Delta_2|}{|\Delta_1|}\right]$, где $[a]$ — целая часть числа a. Поэтому

$$\mu_h(\Delta_1)\leqslant\frac{\mu_h(\Delta_2)}{\left(\frac{M+1}{M}\right)^{\left[\log_2\frac{|\Delta_1|+|\Delta_2|}{|\Delta_1|}\right]}-1}.$$

Далее имеем

$$\frac{1}{2^\sigma}\left(\frac{|\Delta_1 U\Delta_2|}{|\Delta_1|}\right)^\sigma\mu_h(\Delta_1)\leqslant 2^{\sigma\left(\log_2\frac{|\Delta_1 U\Delta_2|}{|\Delta_1|}-1\right)}\mu_h(\Delta_1)\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{M+1}{M}\right)^{\left[\log_2\frac{|\Delta_1 U\Delta_2|}{|\Delta_1|}\right]}\mu_h(\Delta_1)\leqslant\mu_h(\Delta_1 U\Delta_2).$$

Следовательно

$$\mu_h(\Delta_1)\leqslant 2^\sigma\left(\frac{|\Delta_1|}{|\Delta_1 U\Delta_2|}\right)^\sigma\mu_h(\Delta_1 U\Delta_2). \tag{11}$$

Рассмотрим множество $\Delta\setminus E$. Из условия леммы следует, что существует семейство интервалов $\{\Delta_j\}_{j=1}^\infty$, которые покрывают $\Delta\setminus E$ и имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^\infty|\Delta_j|^\sigma<4^{-\sigma}|\Delta|^\sigma.$$

Не теряя общности можно считать, что $\Delta_j\subseteq\Delta$, $j=1, 2,\cdots$. Через Δ_j' обозначим интервал наибольшей длины, содержащийся в $\Delta\setminus\Delta_j$. Заметим, что $|\Delta|\leqslant 2(|\Delta_j|+|\Delta_j'|)$. Из неравенства (11) следует

$$\mu_h(\Delta\setminus E)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu_h(\Delta_j)\leqslant 2^{\sigma}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{|\Delta_j|}{|\Delta_j\cup\Delta_j'|}\right)^{\sigma}\mu_h(\Delta_j\cup\Delta_j')\leqslant$$

$$<4^{\sigma}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\Delta_j|^{\sigma}\right)|\Delta|^{-\sigma}\mu_h(\Delta).$$

Отсюда получим

$$\left(1-4^{\sigma}|\Delta|^{-\sigma}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\Delta_j|^{\sigma}\right)\right)\mu_h(\Delta\setminus E)\leqslant 4^{\sigma}|\Delta|^{-\sigma}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\Delta_j|^{\sigma}\right)\mu_h(E).$$

Следовательно, $\mu_h(E)>0$, так как в противном случае $\mu_h(\Delta\setminus E)=0$ и поэтому $\mu_h(\Delta)=0$. Лемма доказана.

2°. В этом параграфе мы докажем теорему о единственности решения уравнения эллиптического типа.

Теорема. *Пусть $w_1(z)$ и $w_2(z)$—непрерывные функции в замкнутой верхней полуплоскости, удовлетворяющие уравнению*

$$w_{\bar z}=\mu w_z+\theta\overline{w_z}+\alpha w+\beta\overline{w}+\gamma,\quad \operatorname{Im} z>0,$$

где $\mu(z),\cdots,\gamma(z)$ — комплексные измеримые функции, удовлетворяющие неравенству вида

$$|\mu(z)|+|\theta(z)|\leqslant k<1,$$

где $k=\text{const}$, а α, β, γ — равномерно ограниченные функции. Пусть $E\subset(-\infty,\infty)$ — замкнутое множество, для которого существует такой интервал Δ, что

$$M_{\sigma}(\Delta\setminus E)<\frac{1}{4^{\sigma}}M_{\sigma}(\Delta),$$

где $2^{\sigma}=\dfrac{M+1}{M}$, а $M=M(k)$ определяется формулой (6). *Тогда если $w_1(z)=w_2(z)$ при $z\in E$, то $w_1(z)\equiv w_2(z)$.*

Доказательство. Заметим, что $w(z)=w_1-w_2$ удовлетворяет уравнению

$$w_{\bar z}=\mu w_z+\theta\overline{w_{\bar z}}+\alpha w+\beta\overline{w}$$

и обращается в нуль на множестве E. В силу теоремы Л. Берса и Л. Ниренберга, приведенной в начале настоящей статьи, $w(z)$ допускает представление

$$w(z)=f(\chi(z))\,e^{s(z)}.$$

Следовательно, аналитическая в верхней полуплоскости функция обращается в нуль на множестве $F=\{\xi;$ существует $z\in E$ такое, что $\chi(z)=\xi\}$. В силу леммы F имеет положительную лабегову меру. Поэтому $f(\xi)\equiv0$ или $w(z)\equiv0$. Теорема доказана.

Пользуясь случаем приношу благодарность В. П. Хавину за обсуждение результатов статьи.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.III.1981
и 17.VII.1981

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Էլիպտական տիպի հավասարումների լուծումների միակության մասին (*ամփոփում*)

Այս հոդվածում հետազոտվում են հետևյալ հավասարումների

$$w_{\bar z} = \mu w_z + \vartheta \overline{w_{\bar z}} + \alpha w + \beta \overline{w} + \gamma, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

լուծումների միակության եզրային բազմությունները, որտեղ $|\mu(z)| + |\vartheta(z)| \leqslant k < 1$, իսկ α, β, γ-*ն սահմանափակ ֆունկցիաներ են։ Ստացված է* k *թվից կախված պայման* $E \subset (-\infty, \infty)$ *բազմության վրա, որը ապահովում է լուծման միակությունը։*

A. A. VAGARSHAKIAN. *On uniqueness of the solution of the equations of elliptic type* (summary)

In this paper the boundary sets of solution uniqueness for the equation

$$w_{\bar z} = \mu w_z + \vartheta \overline{w_{\bar z}} + \alpha w + \beta \overline{w} + \gamma, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

are considered, where $|\mu(z)| + |\vartheta(z)| \leqslant k < 1$ and α, β, γ are bounded functions.

A condition depending on k on the set $E \subset (-\infty, \infty)$, which provides the uniqueness of solution is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. Bers, L. Nirenberg*. On a representation theorem for linear elliptic systems with discontinuous coefficients and its applications, Atti del Convegno internazionale sulle Equazioni alle derivate parzialli, Trieste, 1954, 111—140.
2. *Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер*. Уравнения с частными производствеными, Изд. «Мир», М., 1966.
3. *Л. Альфорс*. Лекции по квазиконформным отображениям, Изд. «Мир», М., 1969.
4. *Л. Карлесон*. Избранные проблемы теории исключительных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.
5. *А. Вагаршакян*. Теорема единственности для квазиконформных отображений. ДАН Арм. ССР, 72, № 3, 1981, 144—150.
6. *И. Н. Векуа*. Обобщенные аналитические функции, М., 1959.