ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 3, 1982 Математика

УДК 517.984

Т. Н. АРУТЮНЯН

О СПЕКТРЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

0°. В работе выделен класс дифференциальных операторов, действующих в пространстве вектор-функций, для которого указаны условия существенной самосопряженности, дискретности спектра, изучено асимптотическое распределение дискретного спектра. Весьма важным, по мнению автора, является то обстоятельство, что асимптотика функции $N(-\lambda, \lambda)$ — числа собственных значений изучаемого оператора, лежащих в интервале $(-\lambda, \lambda)$ — есть реализация следующей асимптотической формулы: при $\lambda \to \infty$

$$N(-\lambda, \lambda) \sim (2\pi)^{-n} \sum_k \operatorname{mes} \{(x, s): \lambda_k^2(x, s) < \lambda^2\}, \tag{1}$$

где $\lambda_k(x, s)$ — собственные значения символа дифференциального выражения, порождающего наш оператор

При построении этих операторов и изучении их спектральных свойств существенную роль играют некоторые матрицы, являющиеся обобщением известных матриц Паули и Дирака. А именно, рассмотрим множество γ_p квадратных числовых матриц порядка p, элементы A_k которого удовлетворяют условиям

$$A_k \cdot A_j = -A_j \cdot A_k, \quad k \neq j, \tag{0.1}$$

$$A_k^2 = E^{(p)} \quad (E = E^{(p)} \text{ — единичная матрица порядка } p), \tag{0.2}$$

$$A_k^* = A_k, \quad \text{(самосопряженность)}. \tag{0.3}$$

В работе [1] доказано, что это множество содержит ровно $S = S(p) = 2q + 1$ элементов (матриц), где натуральное число p записано в виде $p = 2^q \cdot r$, $r = 1 \pmod 2$, т. е. r — нечетное число. В частности, доказано, что $S(p) = S\left(\frac{p}{2}\right) + 2$ и что при нечетном p множество γ_p состоит из одного элемента (единичной матрицы). В дальнейшем, если не оговорено противное, у нас p — четное число. Относительно структуры этих матриц доказано следующее утверждение: если через A_1 и A_2 обозначить матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} E^{\left(\frac{p}{2}\right)} & 0 \\ 0 & -E^{\left(\frac{p}{2}\right)} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & E^{\left(\frac{p}{2}\right)} \\ E^{\left(\frac{p}{2}\right)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{0.4}$$

то остальные матрицы множества γ_p определяются из рекуррентного соотношения

$$A_{l+2}=\begin{pmatrix} 0 & -iA_l^{\left(\frac{p}{2}\right)} \\ iA_l^{\left(\frac{p}{2}\right)} & 0 \end{pmatrix}, \quad l=1,2,\cdots,S\left(\frac{p}{2}\right), \tag{0.5}$$

где $A_l^{\left(\frac{p}{2}\right)}\in\gamma_{\frac{p}{2}}$.

Заметим, что при $p=2$ множество γ_p состоит из трех матриц

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}, \tag{0.6}$$

известных под названием матриц Паули.

При $p=4$ их пять, это известные матрицы Дирака, которые легко построить по формулам (0.4) и (0.5), исходя из матриц Паули (которые, в свою очередь, строятся также, но исходя из „одномерной" матрицы 1).

Из (0.1) — (0.5) легко получить еще несколько простых, но важных для нашего изложения, свойств матриц A_k:

$$\operatorname{sp} A_k=0 \quad \forall A_k\in\gamma_p, \tag{0.7}$$

$$\det\left(\sum_{k=1}^{S}\xi_k A_k\right)=(-1)^{\frac{p}{2}}\left(\sum_{k=1}^{S}\xi_k^2\right)^{\frac{p}{2}}, \quad \xi_k\in R^1, \tag{0.8}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{S}\xi_k A_k\right|^2=p\left(\sum_{k=1}^{S}\xi_k^2\right), \qquad \xi_k\in R^1, \tag{0.9}$$

где sp — след матрицы, а под нормой $|A|$ матрицы $A=(a_{ij})$ понимаем абсолютную норму, т. е.

$$|A|^2=\sum_{i,j}|a_{ij}|^2.$$

Собственные значения матрицы $\sum\limits_{k=1}^{S}\xi_k A_k$ равны

$$-\lambda_1=-\lambda_2-\cdots=-\lambda_{\frac{p}{2}}=\lambda_{\frac{p}{2}+1}=\cdots=\lambda_p=\sqrt{\sum_{k=1}^{S}\xi_k^2}. \tag{0.10}$$

1°. Рассмотрим дифференциальный оператор, порожденный в гильбертовом пространстве p-компонентных вектор-функций $L_2(R^n:C^p)$ системой дифференциальных выражений

$$t(x,D)=\sum_{|\alpha|<m}a_\alpha(x)D^\alpha, \tag{1.1}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ — мультииндекс,

$$D^\alpha=D_x^\alpha=\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n},$$

а матрицы $a_\alpha(x)$ имеют вид

$$a_\alpha(x)=\sum_{k=1}^{S}a_{\alpha k}(x)A_k, \tag{1.2}$$

где, в свою очередь, $a_{\alpha k}(x)$ — скалярные функции, а $A_k \in \gamma_p$.

Заметив, что выражение (1.1) можно записать в виде

$$t(x, D)=\sum_{k=1}^{S}\left(\sum_{|\alpha|<m}a_{\alpha k}(x)D^\alpha\right)A_k \tag{1.3}$$

и обозначив через

$$l_k(x, D)=\sum_{|\alpha|<m}a_{\alpha k}(x)D^\alpha \tag{1.4}$$

скалярные дифференциальные выражения, участвуюшие в представлении (1.3), запишем (1.1) в виде

$$t(x, D)=\sum_{k=1}^{S}l_k(x, D)A_k. \tag{1.5}$$

Операторы с постоянными коэффициентами вида

$$d[u]=\sum_{|\alpha|<m}\left(\sum_{k=1}^{S-1}\mu_{\alpha k}A_k\right)D^\alpha u$$

были впервые рассмотрены в работе [1], где они были названы операторами D-типа, видимо потому, что при $m=1$, $p=4$ и определенном выборе коэффициентов $\mu_{\alpha k}$ получается известный оператор Дирака. В [1] были изучены некоторые качественные вопросы спектра операторов D-типа четного порядка с постоянными коэффициентами в определенного вида областях.

Через T_0 обозначим оператор, порожденный выражением (1.1) на $C_0^\infty(R^n; C^p)$, а через T — его замыкание в $L_2(R^n; C^p)$, т. е. минимальный оператор. Обозначим через $t(x, s)=\sum_{|\alpha|<m}a_\alpha(x)s^\alpha$ символ выражения (1.1), через $t_m(x, s)=\sum_{|\alpha|=m}a_\alpha(x)s^\alpha$ — главный символ, а через $t_0(x, s)=t_0(x)=\sum_{k=0}^{S}a_{0k}(x)A_k$ — символ члена без производной или так называемый „потенциал".

Основными результатами нашей работы являются утверждения:

а) при определенных условиях на коэффициенты оператор T самосопряжен, имеет чисто дискретный спектр и для числа $N[(-\lambda, \lambda), T]$ собственных значений оператора T, лежащих в интервале $(-\lambda, \lambda)$, имеет место асимптотическая формула

$$N[(-\lambda, \lambda), T]=\rho(\lambda)(1+o(1)), \ \lambda\to\infty, \tag{1.6}$$

где

$$\rho(\lambda)=\frac{p}{(2\pi)^n}\operatorname{mes}\left\{(x, s):\frac{1}{p}(|t_m(x, s)|^2+|t_0(x)|^2<\lambda^2\right\}, \tag{1.7}$$

$\operatorname{mes}\{A\}$ — мера Лебега множества A.

в) Если оператор T порождается выражением

$$t(x, D) = \sum_{k=1}^{S-1} l_k(x, D) A_k,$$

то при тех же условиях

$$N[(0, \lambda), T] = N[(-\lambda, 0), T] = \frac{1}{2} \rho(\lambda)(1 + o(1)), \ \lambda \to \infty; \quad (1.8)$$

с) в лемме 5.1 указано условие на функцию Грина (ядро резольвенты) оператора T, при котором имет место асимптотическая формула

$$N[(0, \lambda), T] \sim N[(-\lambda, 0), T] \sim \frac{1}{2} \sigma(\lambda), \quad \lambda \to \infty, \quad (1.9)$$

где

$$\sigma(\lambda) = \frac{p}{(2\pi)^n} \operatorname{mes}\left\{(x, s): \frac{1}{p} |t(x, s)|^2 < \lambda^2\right\}, \quad (1.10)$$

учитывающая, как видно из вида $\sigma(\lambda)$, влияние всех членов выражения (1.1), в отличие от предыдущего случая, где учитывается влияние только главного члена и потенциала $t_0(x)$*, а остальная часть (как будет видно из условия (4.7)) считается „подчиненной“. Из (0.9), (0.10) и (1.5) следует, что

$$\frac{1}{p} |t(x, s)|^2 = \lambda_k^2(x, s), \quad k = \overline{1, p},$$

где $\lambda_k(x, s)$ — собственные значения полного символа $t(x, s)$, а $p^{-1}(|t_m(x, s)|^2 + |t_0(x)|^2)$ есть квадрат собственных значений „главной“ части $t_m(x, s) + t_0(x, s)$, т. е., после этого замечания, асимптотические формулы (1.6) и (1.9) имеют вид (1), приведенный во введении.

2°. В этом пункте докажем леммы, вытекающие непосредственно из вида дифференциального выражения (1.5), порождающего наши операторы.

Наряду с оператором T рассмотрим минимальный оператор $\tilde{T}$, порожденный выражением

$$\tilde{t}(x, D) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^{S} l_k(x, D) A_k - l_{k_0}(x, D) A_{k_0},$$

т. е. таким же как $t(x, D)$, но в котором знак одного (произвольного) из скалярных выражений $l_k(x, D)$ заменен на противоположный.

Лемма 2. 1. *Оператор $\tilde{T}$ унитарно эквивалентен оператору $-T$.*

---

* Среди работ, в которых получены асимптотические формулы для функции $N(\lambda)$, учитывающие влияние не только главного члена и потенциала, отметим, как наиболее важные на наш взгляд, работы А. Г. Костюченко [7] и М. Г. Гасымова [8]. Более подробно эти вопросы освещены в обзоре М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [9].

Унитарная эквивалентность устанавливается равенством (очевидно, что A_k — унитарные матрицы)

$$\tilde{T} = A_{k_0}(-T)A_{k_0}.$$

В самом деле, легко видеть, что если $u \in D(T)$, то $A_{k_0}u \in D(\tilde{T})$ и, наоборот, если $u \in D(\tilde{T})$, то $A_{k_0}u \in D(T)$, т. е.

$$A_{k_0}D(T) \subset D(\tilde{T}) \subset A_{k_0}D(T),$$

т. е. $D(\tilde{T}) = A_{k_0}D(T)$. Пусть теперь $u \in D(T)$, тогда, используя свойства матриц A_k, получаем

$$\tilde{T}A_{k_0}u = \Big(\sum_{k \neq k_0} l_k A_k - l_{k_0}A_{k_0}\Big)A_{k_0}u =$$

$$= -A_{k_0}\Big(\sum_{k = k_0} l_k A_k + l_{k_0}A_{k_0}\Big)u = -A_{k_0}Tu.$$

Лемма доказана.

Следствие 1. *Если λ есть точка спектра оператора T то $-\lambda$ есть точка спектра оператора $\tilde{T}$.*

Следствие 2. *Если в (1.5) хотя бы одно из выражений $l_k(x, D) = 0$, т. е. T порожден выражением $t(x, D) = \sum_{k=1}^{S-1} l_k A_k$, то спектр оператора T симметричен относительно начала координат.*

Следствие 1 очевидно, следствие 2 — также, поскольку в этом случае $\tilde{T} = T$.

3°. В этом пункте приводятся некоторые достаточные условия самосопряженности и дискретности спектра минимального оператора T. В дальнейшем будем предполагать, что коэффициенты $a_{\alpha k}(x)$ — действительнозначные функции, $\overline{a_{\alpha k}(x)} = a_{\alpha k}(x)$, и что T — симметрический эллиптический оператор. Условие эллиптичности оператора T записывается следующим образом (см. (0.8)):

$$\det(t_m(x, s)) = \det\Big(\sum_{k=1}^{S}\Big(\sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha k}(x)s^\alpha\Big)A_k\Big) =$$

$$= \det\Big(\sum_{k=1}^{S}\xi_k A_k\Big) = (-1)^{p/2}\Big(\sum_{k=1}^{S}\xi_k^2\Big)^{p/2} \neq 0,$$

при $s \neq 0$,

где мы обозначили $\xi_k = \xi_k(x, s) = \sum_{|\alpha|=m} a_{\alpha k}(x)s^\alpha$. Очевидно, что это условие эквивалентно условию

$$\sum_{k=1}^{S}\xi_k^2 = \sum_{k=1}^{S}\Big(\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha k}(x)a_{\beta k}(x)s^{\alpha+\beta}\Big) \neq 0, \quad s \neq 0. \tag{3.1}$$

Следующая лемма, которая не используется в дальнейшем, имеет самостоятельный интерес.

Лемма 3.1. *Если симметрический оператор T порожден выражением вида $t(x, D)=\sum_{k=1}^{S-1} l_k(x, D) A_k$, то индексы дефекта оператора T равны между собой*

Для доказательства леммы достаточно заметить, что матрица A_{k_0}, не участвующая в выражении $t(x, D)$, устанавливает взаимно однозначное унитарное соответствие между дефектными подпространствами оператора T, сохраняющее размерность. В самом деле, обозначим через $\mathfrak{M}_{\pm i}$ дефектные подпространства оператора T, и пусть $v \in \mathfrak{M}_i$, т. е. $(v, (T-iE)g)=0 \ \forall g \in D(T)$. Тогда для $u=A_{k_0}v$ имеем $(u, (T+iE)f)=(A_{k_0}v, (T+iE)f)=(v, A_{k_0}(T+iE)f)=-(v, (T-iE)A_{k_0}f)=0$, поскольку здесь из $f \in D(T)$ следует $A_{k_0}f \in D(T)$. Таким образом, $A_{k_0}\mathfrak{M}_i \subset \mathfrak{M}_{-i}$. Совершенно аналогично получаем, что $\mathfrak{M}_{-i} \subset A_{k_0}\mathfrak{M}_i$, т. е. $\mathfrak{M}_{-i}=A_{k_0}\mathfrak{M}_i$. Если теперь $v_1, v_2, \cdots, v_m$ $(m \leqslant \infty)$ образуют ортонормированный базис $\mathfrak{M}_i$, то $A_{k_0}v_1, A_{k_0}v_2, \cdots, A_{k_0}v_m$ образуют ортонормированый базис $\mathfrak{M}_{-i}$, поскольку $(A_{k_0}v_i, A_{k_0}v_j)=(v_i, v_j)$ в силу свойств (0.2) и (0.3). Лемма доказана.

Теорема 3.1. *Пусть коэффициенты $a_{\alpha k}(x) \in C^{m+|\alpha|}(\mathbf{R}^n)$, и пусть существует положительная функция $g(x) \in C^1(\mathbf{R}^n)$, $g(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$, такая, что*

$$|\operatorname{grad} g^m(x)| \leqslant C g^m(x), \quad x \in \mathbf{R}^n;$$

для любого $M>1$ существует постоянная $C(M)$ такая, что при $|x|<\tau_2$, $|y|<\tau_1$, $1<\tau_1^{-1}\cdot\tau_2<M$

$$\frac{g(x)}{g(y)}<C(M);$$

$$\sum_{k=1}^{S} a_{\alpha k}^2(x) \leqslant C_1 g^{2m}(x), \quad |\alpha|=\overline{0, m};$$

$$\sum_{k=1}^{S} [D^\beta a_{\alpha k}(x)]^2 = o(g^{2m}(x)), \quad |x| \to \infty,$$

где $|\alpha|=\overline{0, m}$, $|\beta|=\overline{1, |\alpha|}$, $|\beta|=1$ при $|\alpha|=0$;

$$\sum_{k=1}^{S} l_k^2(x, s) > \varepsilon [g^m(x)(1+|s|^m)]^2,$$

где x, $s \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon=\text{const}>0$. Тогда эллиптический оператор T самосопряжен и имеет чисто дискретный спектр, точнее, его резольвента вполне непрерывна.

Теорема 3.1 есть следствие теорем 2.2 и 3.2 работы [2], если взять в условиях этих теорем $h(x)=g(x)$, $P_1(x)=|x|$ при $|x|>1$ и достаточно гладкой при $|x| \leqslant 1$ и если учесть, что коэффициенты нашего оператора имеют вид (1.2) (с соответствующим применением свойств (0.8) и (0.9) матриц A_k).

4°. В этом пункте мы предполагаем самосоопряженность оператора T (не обязательно при условиях теоремы 3.1), не предполагая при этом дискретности его спектра, ибо условия теоремы 4.1, при которых будет получена асимптотическая формула (1.6), уже достаточны для дискретности его спектра.

Рассмотрим квадрат T^2 самосопряженного оператора T. Используя свойства матриц A_k, получаем

$$T^2 u = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha(x) D^\alpha \left(\sum_{|\beta| \le m} a_\beta(x) D^\beta u \right) =$$

$$= \sum_{|\alpha|, |\beta| \le m} \left(\sum_{k=1}^{s} a_{\alpha k}(x) A_k \right) \left(D^\alpha \sum_{j=1}^{s} a_{\beta j}(x) A_j D^\beta \right) u =$$

$$= \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} \left(\sum_{k=1}^{s} a_{\alpha k}(x) A_k \right) \left(\sum_{j=1}^{s} a_{\beta j}(x) A_j \right) D^{\alpha+\beta} u + P_1(x, D) u +$$

$$+ \sum_{|\alpha| = |\beta| = 0} \left(\sum_{k=1}^{s} a_{0k}(x) A_k \right) \left(\sum_{j=1}^{s} a_{0j}(x) A_j \right) u =$$

$$= \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} \left(\sum_{k=1}^{s} a_{\alpha k}(x) a_{\beta k}(x) \right) E D^{\alpha+\beta} u + P_1(x, D) u +$$

$$+ \left(\sum_{k=1}^{s} a_{0k}^2(x) \right) E u = P_0(x, D) u + P_1(x, D) u + Q(x) u, \tag{4.1}$$

где

$$P_0(x, D) = p_0(x, D) \cdot E = \left[\sum_{|\alpha| = |\beta| = m} \left(\sum_{k=1}^{s} a_{\alpha k}(x) a_{\beta k}(x) D^{\alpha+\beta} \right) \right] E, \tag{4.2}$$

$$Q(x) = \left(\sum_{k=0}^{s} a_{0k}^2(x) \right) E = q(x) E \quad (q(x) > 0), \tag{4.3}$$

а $P_1(x, D)$ — оператор порядка $\le 2m-1$, матрицы-коэффициенты которого обозначим через $b_\alpha(x)$, т. е. пусть

$$P_1(x, D) = \sum_{|\alpha| \le 2m-1} b_\alpha(x) D^\alpha.$$

Таким образом

$$T^2 = (p_0(x, D) + q(x)) E + P_1(x, D). \tag{4.4}$$

Вводя соответствующие символы, потребуем выполнение условий

$$p_0(x, s) \text{ ограничен по } x, \tag{4.5}$$

$$p_0(x, s) > \delta |s|^{2m}, \tag{4.6}$$

$$|b_\alpha(x)| \le c_\alpha [q(x)]^{\frac{2m-|\alpha|}{2m} - \varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 > 0, \quad c_\alpha = \text{const}, \tag{4.7}$$

$$|p_0(x, s) - p_0(y, s)| \le C |x-y|^\gamma |s|^{2m}, \quad 0 < \gamma < 1, \quad \text{при} \quad |x-y| \le 1. \tag{4.8}$$

Остальные условия на функцию $q(x) = \sum_{k=1}^{s} a_{0k}^2(x)$:

$$|q(x) - q(y)| \le B q^\alpha(y) |x-y|, \quad \alpha < 1 + \frac{1}{2m}, \quad \text{при} \quad |x-y| \le 1, \tag{4.9}$$

$$q(x) \leqslant Cq(y) \quad \text{при} \quad |x-y| \leqslant 1, \tag{4.10}$$

$$q(x) \leqslant B_1 \exp\{c^* |x-y| q^{1/2m}(y)\} \quad \text{при} \quad |x-y| > 1,$$

$$c^* \text{ — постоянная, зависящая от } p_0(x, s), \tag{4.11}$$

$$\int\limits_{R^n} \frac{dx}{q^l(x)} < \infty \quad \text{при} \quad \text{некотором } l > 0 \tag{4.12}$$

$$\int\limits_{R^n} e^{-cq(x)\cdot t} dx = O(1) \int\limits_{R^n} e^{-q(x)\,t} dx \text{ при всяком } c > 0 \ (t > 0). \tag{4.13}$$

Обозначим еще через

$$\Phi(\lambda) = \frac{p}{(2\pi)^n} \int\limits_{q(x)<\lambda} \operatorname{mes}\{s\colon p_0(x, s) + q(x) < \lambda\}\, qx.$$

Поскольку у нас

$$p_0(x, s) = \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \left(\sum_{k=1}^{S} a_{\alpha k}(x) a_{\beta k}(x) \right) s^{\alpha+\beta} = \sum_{k=1}^{S} \xi_k^2(x, s) \geqslant 0,$$

где $\xi_k = \sum\limits_{|\alpha|=m} a_{\alpha k}(x) s^{\alpha}$, то из

$$q(x) \leqslant p_0(x, s) + q(x) < \lambda$$

следует, что

$$\int\limits_{q(x)<\lambda} \operatorname{mes}\{s\colon p_0(x, s) + q(x) < \lambda\}\, dx = \operatorname{mes}\{(x, s)\colon p_0(x, s) + q(x) < \lambda\},$$

т. е.

$$\Phi(\lambda) = \frac{p}{(2\pi)^n} \operatorname{mes}\{(x, s)\colon p_0(x, s) + q(x) < \lambda\}.$$

Заметив еще, что из свойства (0.9) матриц A_k следуют равенства

$$p_0(x, s) = \frac{1}{p} |t(x, s)|^2, \quad q(x) = \frac{1}{p} |t_0(x)|^2,$$

получаем

$$\rho(\lambda) = \Phi(\lambda^2). \tag{4.14}$$

Из результатов работ [3], [4] (где рассмотрены более общие, чем T^2, положительные операторы) следует, что при условиях (4.5)—(4.13) оператор T^2 имеет чисто дискретный спектр, а при дополнительном тауберовом условии

$$\lambda\Phi'(\lambda) < a_0 \Phi(\lambda), \quad a_0 > 0 \tag{4.15}$$

имеет место асимптотическая формула

$$N[(0, \lambda), T^2] \sim \Phi(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Воспользовавшись теперь очевидным соотношением

$$N[(-\lambda, \lambda), T] = N[(0, \lambda^2), T^2]$$

и равенством (4.14) мы можем сформулировать утверждение.

Теорема 4.1. *При условиях* (4.5) — (4.13), (4.15), *спектр самосопряженного оператора T чисто дискретен и для функции $N[(-\lambda, \lambda), T]$ имеет место асимптотическая формула*

$$N[(-\lambda, \lambda), T] \sim \rho(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

В частности, если оператор T порожден выражением вида

$$t(x, D) = \sum_{k=1}^{S-1} l_k(x, D) A_k,$$

то

$$N[(-\lambda, 0), T] = N[(0, \lambda), T] \sim \frac{1}{2}\rho(\lambda), \quad \lambda \to \infty.$$

Вторая часть теоремы вытекает из следствия 2.2.

5°. В этом пункте мы получим асимптотическую формулу (1.9). Пусть оператор T самосопряжен и имеет чисто дискретный спектр. Тогда известно, что между матрицей-функцией Грина (т. е. ядром резольвенты) $G(x, \xi, \lambda)$ и функцией $N(\lambda, T)$ оператора T имеет место соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{sp} \frac{\partial^m}{\partial z^m} G(x, x, z)\, dx = m! \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(\lambda, T)}{(\lambda - z)^{m+1}} \tag{5.1}$$

при тех m, для которых интеграл слева сходится. Допустим, что такое m существует. Здесь через $\operatorname{sp} A$ мы обозначаем след матрицы A, а

$$N(\lambda, T) = \begin{cases} N[(0, \lambda), T], & \lambda > 0 \\ -N[(\lambda, 0), T], & \lambda < 0. \end{cases}$$

Через $g(x, \xi, \lambda)$ обозначим матрицу-функцию Грина оператора с „замороженными" коэффициентами $t(\xi, D_x)$, точнее, матричное решение уравнения

$$(t(\xi, D_x) - \lambda E)\, g(x, \xi, \lambda) = \delta(x - \xi) \cdot E, \tag{5.2}$$

принадлежащее L_2 по переменной x, т. е.

$$g_{ij}(x, \xi, \lambda) \in L_2(\mathbb{R}^n) \text{ по } x, \ i, j = 1, 2, \cdots, p.$$

Определим функцию $\varphi(\lambda)$ на всей оси следующим образом: $\varphi(\lambda) = \frac{1}{2}\sigma(\lambda)$ при $\lambda \geqslant 0$ и нечетная, т. е. $\varphi(-\lambda) = -\varphi(\lambda) = -\frac{1}{2}\sigma(\lambda)$. Пусть, кроме того, $\varphi(\lambda)$ удовлетворяет следующему (тауберовому) условию: $\forall C > 1$ существуют константы γ и N, $m < \gamma < m+1$, $N \geqslant 0$ такие, что для всех λ, μ, $|\lambda| > |\mu| > N$ (λ и μ одного знака)

$$\frac{\varphi(\lambda)}{\varphi(\mu)} \leqslant C\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\gamma}. \tag{5.3}$$

Лемма 5.1. *Пусть при некотором нечетном* m

$$\int\limits_{R^n} \mathrm{sp}\, \frac{\partial^m}{\partial z^m}\, G(x, x, z)\, dx \sim \int\limits_{R^n} \mathrm{sp}\, \frac{\partial^m}{\partial z^m} g(x, x, z)\, dx, \tag{5.4}$$

при $|z| \to \infty$ *по некоторому недействительному лучу, и пусть функция* $\varphi(\lambda)$ *удовлетворяет условию* (5.3). *Тогда*

$$N[(\lambda, 0), T],\ N[(0, \lambda), T] \sim \varphi(\lambda) \tag{5.5}$$

соответственно при $\lambda \to -\infty$ *и* $\lambda \to \infty$.

Для доказательства леммы нам достаточно установить равенство

$$\int\limits_{R^n} \mathrm{sp}\, \frac{\partial^m}{\partial z^m} g(x, x, z)\, dx = m! \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}}, \tag{5.6}$$

поскольку тогда из (5.1) и (5.4) следует асимптотическое равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dN(\lambda, T)}{(\lambda - z)^{m+1}} \sim \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}}, \quad |z| \to \infty,$$

откуда, воспользовавшись двусторонней тауберовой теоремой типа М. В. Келдыша, установленной Я. Т. Султанаевым в [5], получим

$$N(\lambda, T) \sim \varphi(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \to \pm\infty,$$

т. е. утверждение нашей леммы.

Итак, перейдем к доказательству равенства (5.6). Применяя прямое, а затем обратное преобразования Фурье к обеим сторонам уравнения (5.2), находим явный вид матрицы $g(x, \xi, z)$

$$g(x, \xi, z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} (t(x, s) - zE)^{-1} e^{i\langle s,\, x-\xi\rangle}\, ds. \tag{5.7}$$

Используя свойства матриц A_k, находим матрицу

$$(t(x, s) - zE)^{-1} = \left(\sum_{k=1}^{S} l_k(x, s) A_k - zE\right)^{-1} =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{S} l_k(x, s) A_k + zE}{\sum\limits_{k=1}^{S} l_k^2(x, s) - z^2} = \frac{t(x, s) + zE}{\frac{1}{p}|t(x, s|^2 - z^2}.$$

Для m-ой производной матрицы получаем выражение

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}(t(x, s) - zE)^{-1} = \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{\sum\limits_{k=1}^{S} l_k(x, s) A_k}{\frac{1}{p}|t(x, s)|^2 - z^2} + \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z \cdot E}{\frac{1}{p}|t(x, s)|^2 - z^2}.$$

Поскольку $\mathrm{sp}\, A_k = 0$ для любого A_k, то

$$\mathrm{sp}\, \frac{\partial^m}{\partial z^m}(t(x, s) - zE)^{-1} = p \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z}{\frac{1}{p}|t(x, s)|^2 - z^2}. \tag{5.8}$$

Вспоминая определение (1.10) функции (меры) $\sigma(\lambda)$ из (5.7) и (5.8) получаем

$$\int\limits_{R^n} \mathrm{sp} \frac{\partial^m}{\partial z^m} g(x, x, z)\, dx = \frac{p}{(2\pi)^n} \int\limits_{R^n}\int\limits_{R^n} \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z}{\frac{1}{p}|t(x, s)|^2 - z^2} ds dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z}{\lambda^2 - z^2} d\sigma(\lambda). \tag{5.9}$$

С другой стороны, поскольку $m+1$ — четное число,

$$m! \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}} = -\frac{m!}{2}\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}} + \frac{m!}{2}\int\limits_0^\infty \frac{d\sigma(\lambda)}{(\lambda - z)^{m+1}} =$$

$$= \frac{m!}{2}\int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{(\lambda + z)^{m+1}} + \frac{1}{(\lambda - z)^{m+1}}\right] d\sigma(\lambda) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\partial^m}{\partial z^m}\left(\frac{1}{\lambda - z} -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\lambda + z}\right) d\sigma(\lambda) = \int\limits_0^\infty \frac{\partial^m}{\partial z^m} \frac{z}{\lambda^2 - z^2} d\sigma(\lambda). \tag{5.10}$$

Из (5.9) и (5.10) следует (5.6) и лемма доказана.

Условия на коэффициенты оператора T, при которых имеет место асимптотическое равенство (5.4), будут предметом отдельного исследования. Заметим только, что в некоторых частных случаях такие условия получены. Например, для операторов типа Дирака

$$L = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k} A_k + \sum_{k=n+1}^{s} p_k(x) A_k,$$

при $n = 1, 2, 3$ такие условия получены в работе автора [6]. Там же получены асимптотические формулы для функций $N_\pm(\lambda, L)$, которые являются частным случаем формулы (1.9). В самом деле, согласно (1.10) для оператора L получаем

$$N[(0, \lambda), L] \sim N[(-\lambda, 0), L] \sim \frac{p}{2(2\pi)^n} \operatorname{mes}\left\{(x, s)\colon \frac{1}{p}|t(x, s)|^2 < \lambda^2\right\},$$

где

$$t(x, s) = \sum_{k=1}^{n} s_k A_k + \sum_{k=n+1}^{s} p_k(x) A_k$$

и соответственно

$$|t(x, s)|^2 = p\left(\sum_{k=1}^{n} s_k^2 + \sum_{k=n+1}^{s} p_k^2(x)\right) = p(|s|^2 + a^2(x)),$$

т. е.

$$N_\pm(\lambda, L) \sim \frac{p}{2(2\pi)^n} \operatorname{mes}\{(x, s)\colon |s|^2 + a^2(x) < \lambda^2\} =$$

$$= \frac{p}{2(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \int\limits_{R^n} (\lambda^2 - |s|^2 - a^2(x))_+ \, ds dx =$$

$$= \frac{p}{2(2\pi)^n} \int\limits_{R^n} \left(\int\limits_{|s|^2 < [\lambda^2 - a^2(x)]_+} ds \right) dx.$$

Заметив, что внутренний интеграл есть объем n-мерного шара радиуса $[\lambda^2 - a^2(x)]_+^{1/2}$, окончательно получаем

$$N_{\pm}(\lambda, L) \sim \frac{p \cdot \pi^{n/2}}{2(2\pi)^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int\limits_{R^n} [\lambda^2 - a^2(x)]^{n/2} dx, \quad \lambda \to \infty, \tag{5.11}$$

откуда при $n = 1, 2, 3$ следует ранее полученные в [6] формулы для главного члена асимптотики функций $N_{\pm}(\lambda, L)$.

Заметим также, что формула (1.6) пригодна для исследования асимптотики спектра скалярных дифференциальных операторов и, в частности, для полуограниченных операторов, т. е. для них верна теорема 4,1. Здесь надо только заметить, что единственной „матрицей" A_k является число 1 (см. пункт 0°), а функция $N(\lambda) = N[(-\infty), \lambda)]$ при больших λ совпадает с функцией $N[(-\lambda, \lambda] = N_-(\lambda) + N_+(\lambda)$. Например, для самосопряженного полуограниченного оператора Шредингера с дискретным спектром

$$P = -\Delta + q(x)$$

получается хорошо известная формула

$$N(\lambda, P) \sim \frac{\pi^{n/2}}{(2\pi)^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} \int\limits_{R^n} (\lambda - q(x))_+^{n/2} dx, \quad \lambda \to \infty.$$

Здесь мы использовали то обстоятельство, что неравенства $q^2(x) < \lambda$ и $q(x) < \lambda$ равносильны при $q(x) \geqslant 0$.

Замечание. Легко видеть, что все результаты настоящей работы, относящиеся к операторам в пространстве четномерных вектор-функций (т. е. p — четно и множество матриц A_k не ограничивается единичной матрицей) не зависит от того, в каком порядке записаны матрицы A_k в представлении (1.5), т. е. изученные спектральные свойства операторов указанного класса инварианты относительно перестановок матриц A_k в (1.5).

Ереванский государственный университет

Поступила 21.VII.1981

Տ. Ն. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ. Որոշ դասի դիֆերենցիալ օպերատորների սպեկտրի մասին (ամփոփում)

Աշխատանքում առանձնացված է դիֆերենցիալ օպերատորների մի դաս, որոնց համար տրված են ինքնահամալուծության և սպեկտրի դիսկրետության պայմաններ։ Հետազոտված է $(-\lambda, \lambda)$ հատվածում ընկած, $N(-\lambda, \lambda)$ սեփական արժեքների թվի ֆունկցիայի ասիմպտոտիկ վարքը, երբ $\lambda \to \infty$։ Բերված են պայմաններ, երբ դրական և բացասական սեփական արժեքների բաշխման ֆունկցիաները ունեն համարժեք ասիմպտոտիկաներ։

T. N. HARUTIUNIAN. *On the spectrum of a class of differential operators* (summary)

The paper describes a class of differential operators, for which conditions of self-adjointness and discreteness of spectrum are found. The asymptotic ($\lambda \to \infty$) behaviour of function $N(-\lambda, \lambda)$ (the number of eigenvalues in $(-\lambda, \lambda)$) is considered. Conditions are stated which ensure that the asymptotic behaviour of distribution functions of positive and negative eigenvalues are asymptotically equivalent.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bernd Stöckert. Über das Spektrum einer Klasse von Vektordifferentialoperatoren, Publs math., 17, № 1—4, 1970, 41—55.
2. *А. Г. Брусенцев*. О спектре несамосопряженных эллиптических систем произвольного порядка, Дифф. уравнения, XII, № 6, 1976, 1040—1051.
3. *А. Г. Косюченко*. Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов, ДАН СССР, 168, № 1, 1966, 21—24.
4. *Ю. Н. Сударев*. О распределении собственных значений сингулярного оператора, Дифф. уравнения, XIV, № 9, 1968, 1676—1682.
5. *Я. Т. Султанаев*. Двусторонняя тауберова теорема для отношений, Изв. ВУЗ-ов, № 1, 1974.
6. *Т. Н. Арутюнян*. О спектре операторов типа Дирака, ДАН Арм. ССР, XIV, № 3, 1977.
7. *А. Г. Костюченко*. Асимптотическое поведение спектральной функции самосопряженных эллиптических операторов, в книге «Четвертая летняя математическая школа», Киев, 1968, 42—117.
8. *М. Г. Гасымов*. О распределении собственных значений самосопряженного дифференциального оператора, ДАН СССР, 186, № 4, 1969, 753—756.
9. *М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк*. Асимптотика спектра дифференциальных уравнений, в сб. «Математический анализ», том 14, Итоги науки и техники, ВИНИТИ, 1977