ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 3, 1982 Математика

УДК 517.92

И. Г. ХАЧАТРЯН

ИЗУЧЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Введение

Пусть l — дифференциальное выражение $2n$-го порядка, заданное на интервале (a, b) $(-\infty < a < b \leqslant \infty)$ по формуле

$$l[y] \equiv p_0 y - \frac{d}{dx}\left[p_1 \frac{dy}{dx} - \cdots - \frac{d}{dx}\left[p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx}\left[p_n \frac{d^n y}{dx^n}\right]\right]\cdots\right] \tag{1}$$

где коэффициенты $p_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, n)$ — комплекснозначные измеримые функции на интервале (a, b), удовлетворяющие при всех $\alpha \in (a, b)$ какому-нибудь одному из следующих трех условий:

Условие 1.

$$\int_a^\alpha \frac{dx}{|p_n(x)|} < \infty,$$

$$\int_a^\alpha |p_{n-1-k}(x)|(x-a)^{2k}\int_a^x \frac{dt\,dx}{|p_n(t)|} < \infty, \quad k=0, 1, \cdots, n-1. \tag{2}$$

Условие 2. При $n>2$ для некоторого целого числа $\varkappa$ $(1 \leqslant \varkappa \leqslant n-1)$

$$\int_a^\alpha \frac{(x-a)^\varkappa}{|p_n(x)|}\,dx < \infty,$$

$$\int_a^\alpha (x-a)^{2k-\varkappa} h_\varkappa(x)|p_{n-1-k}(x)|\,dx < \infty, \quad k=0, 1, \cdots, n-1, \tag{3}$$

где

$$h_\varkappa(x) = \int_a^x \frac{(t-a)^\varkappa}{|p_n(t)|}\,dt + (x-a)\int_x^\alpha \frac{(t-a)^{\varkappa-1}}{|p_n(t)|}\,dt.$$

Условие 3.

$$\int_a^\alpha \left[\int_x^\alpha \frac{(t-x)^{n-1}}{|p_n(t)|}\,dt\right]^2 dx < \infty, \tag{4}$$

$$\int_a^\alpha (x-a)^{2k-n} h_n(x)\,|p_{n-1-k}(x)|\,dx < \infty, \quad k=0, 1, \cdots, n-1. \tag{5}$$

В статье рассматривается дифференциальное уравнение

$$l[y]-\lambda y=f,\ f\in L^2(a,\ b), \tag{6}$$

где λ — комплексный параметр, и изучается поведение решений этого уравнения при $x\to a$. В результате этого исследования выясняются некоторые свойства решений и доказывается существование и единственность решения, удовлетворяющего в точке $x=a$ некоторым естественным условиям. Полученные здесь результаты автор намерен применить для изучения спектральных свойств действующих в пространстве $L^2(a,\ b)$ самосопряженных операторов, порожденных дифференциальным выражением (1) с вещественными коэффициентами. С этой целью важно обеспечить также свойства решений уравнения (6), как их суммируемость с квадратом на конечном интервале $(a,\ \alpha]\subset(a,b)$, а также существование и единственность решения, удовлетворяющего в точке $x=a$ нулевым начальным условиям. На примерах покажем, что условия 1, 2, 3 нельзя существенно ослабить и одновременно обеспечить отмеченные свойства решений. Действительно, функция

$$y(x)=\int\limits_x^\alpha \frac{(t-x)^{n-1}}{p_n(t)}\,dt, \tag{7}$$

где $\alpha\in(a,\ b)$ и $p_n(x)\geqslant 0$, является решением уравнения

$$(-1)^n[p_n(x)\,y^{(n)}(x)]^{(n)}=0. \tag{8}$$

Очевидно, что если неравенство (4) не выполняется, то решение (7) уравнения (8) не является суммируемым с квадратом на интервале $(a,\ \alpha]$. Далее рассмотрим уравнение

$$(-1)^n[(x-a)^m\,y^{(n)}(x)]^{n}+(-1)^s[c\,(x-a)^{m+2s-2n}\,y^{(s)}(x)]^{(s)}=0, \tag{9}$$

где число s $(0\leqslant s\leqslant n-1)$ — целое, m — произвольное и

$$c=(-1)^{n-1-s}\prod_{\nu=s+1}^{n}(n-s+\nu)(m+\nu).$$

В данном случае

$$p_n(x)=(x-a)^m,\ \ p_s(x)=c\,(x-a)^{m+2s-2n}$$

и $p_k(x)=0$ $(k\neq s,\ n)$. Заметим, что при $m<1$ в условии 1 не выполняется только неравенство (2) для $k=n-1-s$, при $\varkappa<m<\varkappa+1$ в условии 2 не выполняется только неравенство (3) для $k=n-1-s$ и, наконец, при $n<m<n+\dfrac{1}{2}$ в условии 3 не выполняется только неравенство (5) для $k=n-1-s$. Однако в каждом из этих случаев для любого $\varepsilon>0$ сходятся, соответственно, интегралы

$$\int\limits_a^\alpha |p_s(x)|\,|\ln(x-a)|^{-1-\varepsilon}(x-a)^{2(n-1-s)}\int\limits_a^x \frac{dt\,dx}{|p_n(t)|}<\infty,$$

$$\int_a^{c} |p_s(x)|\, |\ln(x-a)|^{-1-\varepsilon} (x-a)^{2(n-1-s)-k} h_k(x)\, dx < \infty,$$

$$\int_a^{c} |p_s(x)|\, |\ln(x-a)|^{-1-\varepsilon} (x-a)^{2(n-1-s)-n} h_n(x)\, dx < \infty.$$

С другой стороны, при любом m уравнение (9) имеет два решения $y_1(x)=0$ и $y_2(x)=(x-a)^{2n}$, удовлетворяющие в точке $x=a$ одинаковым начальным условиям.

Приведем некоторые определения и обозначения из монографии [1], которые используются в статье.

Квазипроизводные $y^{[k]}(x)$ $(k=0, 1, \cdots, 2n)$ функции $y(x)$, соответствующие дифференциальному выражению (1), определяются формулами

$$y^{[k]}=\frac{d^k y}{dx^k},\quad k=0, 1, \cdots, n-1,$$

$$y^{[n]}=p_n\frac{d^n y}{dx^n},$$

$$y^{[n+k]}=p_{n-k}\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}}-\frac{d}{dx}(y^{[n+k-1]}),\quad k=1, 2, \cdots, n. \tag{10}$$

Из определения квазипроизводных следует, что

$$l[y]=y^{[2n]}. \tag{11}$$

Считается, что выражение $l[y]$ имеет смысл для данной функции $y(x)$, если все квазипроизводные функции $y(x)$ до $(2n-1)$-го порядка включительно существуют и абсолютно непрерывны на каждом конечном отрезке $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$.

Пусть $y(x)$ и $z(x)$ — функции, для которых выражение l имеет смысл и α, β $(\alpha<\beta)$ — некоторые числа из интервала (a, b). Имеет место формула Лагранжа

$$\int_\alpha^\beta l[y(x)]\, z(x)\, dx-\int_\alpha^\beta y(x)\, l[z(x)]\, dx=[y, z]_\beta-[y, z]_\alpha, \tag{12}$$

где

$$[y, z]_x=\sum_{k=0}^{n-1}\{y^{[k]}(x)\, z^{[2n-1-k]}(x)-y^{[2n-1-k]}(x)\, z^{[k]}(x)\}. \tag{13}$$

Если функции y, z, $l[y]$, $l[z]$ суммируемы с квадратом на интервале $(a, \beta]$, то, как следует из формулы (12), существует конечный предел

$$[y, z]_a=\lim_{\alpha\to a}[y, z]_\alpha.$$

Для функций y и z, зависящих от параметра λ, вместо $[y, z]_x$ иногда будем использовать обозначение $[y, z]_{x,\lambda}$.

§ 1. Поведение решений при условии 1

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l\,[y]=f,\ f\in L^2(a,\ b). \tag{14}$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют условию* 1. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Для любого решения* $y\,(x)$ *уравнения* (14) *существует конечный предел*

$$\lim_{x\to a} y\,(x)=y\,(a) \tag{15}$$

и, кроме того

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu}\,y^{[\nu]}\,(x)\}=0,\ \nu=1,\ 2,\cdots,\ n-1, \tag{16}$$

$$\lim_{x\to a}\left\{y^{[n+\nu]}\,(x)(x-a)^{n+\nu-1}\int\limits_a^x\frac{dt}{|p_n(t)|}\right\}=0,\ \nu=0,\ 1,\cdots,\ n-1. \tag{17}$$

2°. *Если решение* $y\,(x)$ *уравнения* (14) *такое, что при некотором* $m\ (0\leqslant m\leqslant n-1)$

$$y^{[\nu]}\,(a)=0,\ \nu=0,\ 1,\cdots,\ m-1, \tag{18}$$

то существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a}\{(m-\nu)!\ (x-a)^{\nu-m}\,y^{[\nu]}\,(x)\}=y^{[m]}\,(a),\ \nu=0,\ 1,\cdots,\ m, \tag{19}$$

и, кроме того

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-m}\,y^{[\nu]}\,(x)\}=0,\ \nu=m+1,\ m+2,\cdots,\ n-1, \tag{20}$$

$$\lim_{x\to a}\left\{y^{[n+\nu]}\,(x)\,(x-a)^{n+\nu-m-1}\int\limits_a^x\frac{dt}{|p_n(t)|}\right\}=0,\ \nu=0,\ 1,\cdots,\ n-1. \tag{21}$$

3°. *Если решение* $y\,(x)$ *уравнения* (14) *такое, что при некотором* $m\ (0\leqslant m\leqslant n-1)$ $y^{[\nu]}\,(a)=0$ $(\nu=0,1,\cdots,\ n+m-1)$, *то функции*

$$y^{[\nu]}\,(x)\left[(x-a)^{n-1-\nu+m}\int\limits_a^x\frac{dt}{|p_n(t)|}\right]^{-1},\ \nu=0,\ 1,\cdots,\ n-1, \tag{22}$$

ограничены на конечном интервале $(a,\ \alpha]\subset(a,\ b)$, *существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to a}\{(m-\nu)!\ (a-x)^{m-\nu}\,y^{[n+\nu]}\,(x)\}=y^{[n+m]}\,(a),\ \nu=0,\ 1,\cdots,\ m, \tag{23}$$

и кроме того

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-m}\,y^{[n+\nu]}\,(x)\}=0,\ \nu=m+1,\ m+2,\cdots,\ n-1 \tag{24}$$

4°. *Если решение* $y\,(x)$ *уравнения* (14) *удовлетворяет условиям* $y^{[\nu]}\,(a)=0$ $(\nu=0,1,\cdots,\ n-1)$, *то*

$$\lim_{x\to a}\left\{y^{[\nu]}(x)\left[(x-a)^{2n-2-\nu}\int_a^x\frac{dt}{|p_n(t)|}\right]^{-1}\right\}=0,\ \nu=0,1,\cdots,n-1, \tag{25}$$

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-n+1}y^{[n+\nu]}(x)\}=0,\ \nu=0,1,\cdots,n-1. \tag{26}$$

Доказательство. Пусть $y(x)$— некоторое решение уравнения (14). Обозначим $c_k=y^{[k]}(\alpha)$ $(k=0,1,\cdots,2n-1)$, где α — некоторое число из интервала $(a,\ b)$, и введем функции

$$\varphi_{\nu k}(x,\ t)=\int_x^t\frac{(x-u)^{n-1-\nu}(t-u)^{n-1-k}}{(n-1-\nu)!\,(n-1-k)!\,p_n(u)}\,du,\ \nu,\ k=0,1,\cdots,n-1, \tag{27}$$

$$\psi_\nu(x)=\sum_{k=\nu}^{n-1}c_k\frac{(x-\alpha)^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\sum_{k=0}^{n-1}c_{2n-1-k}\,\varphi_{\nu k}(x,\alpha)-\int_x^\alpha\varphi_{\nu 0}(x,\ t)\,f(t)\,dt, \tag{28}$$

$$\nu=0,1,\cdots,n-1.$$

Используя формулы (10) и (11), нетрудно убедиться, что функции $y^{[\nu]}(x)$ $(\nu=0,1,\cdots,n-1)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$y^{[\nu]}(x)=\psi_\nu(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\int_x^\alpha\varphi_{\nu k}(x,\ t)\,p_k(t)\,y^{[k]}(t)\,dt, \tag{29}$$

$$\nu=0,1,\cdots,n-1,$$

причем

$$y^{[2n-1-\nu]}(x)=\sum_{k=0}^{\nu}c_{2n-1-k}\frac{(\alpha-x)^{\nu-k}}{(\nu-k)!}+\int_x^\alpha\frac{(t-x)^\nu}{\nu!}f(t)\,dt-$$

$$-\sum_{k=0}^{\nu}\int_x^\alpha\frac{(t-x)^{\nu-k}}{(\nu-k)!}\,p_k(t)\,y^{[k]}(t)\,dt, \tag{30}$$

$$\nu=0,1,\cdots,n-1.$$

В уравнениях (29) число α выберем так, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\alpha|p_k(t)|\,(t-a)^{2(n-1-k)}\int_a^t\frac{du\,dt}{|p_n(u)|}<\frac{1}{2n}. \tag{31}$$

Если обозначить

$$z_\nu(x)=y^{[\nu]}(x)\,(x-a)^\nu,\ \xi_\nu(x)=\psi_\nu(x)(x-a)^\nu,$$

$$\nu=0,1,\cdots,n-1,$$

то из (29) для функций $z_\nu(x)$ получим соотношения

$$z_\nu(x)=\xi_\nu(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\int_x^\alpha\frac{(x-a)^\nu}{(t-a)^k}\,\varphi_{\nu k}(x,\ t)\,p_k(t)\,z_k(t)\,dt, \tag{32}$$

$$\nu=0,1,\cdots,n-1.$$

Очевидно, что при $a < x < t < \alpha$

$$\frac{(x-a)^{\nu}}{(t-a)^{k}}\,|\varphi_{\nu k}(x, t)| < (t-a)^{2(n-1-k)}\int\limits_{a}^{t}\frac{du}{|p_n(u)|}. \tag{33}$$

Обозначим

$$z(x) = \max_{\substack{x<t<\alpha\\ 0<\nu<n}} |z_{\nu}(t)|,\quad \xi(x) = \max_{\substack{x<t<\alpha\\ 0<\nu<n}} |\xi_{\nu}(t)|.$$

Тогда в силу неравенств (31) и (33) из формул (32) получим

$$z(x) \leqslant \xi(x) + \frac{1}{2} z(x)$$

или, что то же самое, $z(x) \leqslant 2\xi(x)$. Однако функция $\xi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, \alpha]$. Поэтому в формуле (32) подынтегральная функция при всех $x \in (a, \alpha]$ мажорируется суммируемой функцией $2\xi(a) \times \times g_k(t)\,|p_k(t)|$, где через $g_k(t)$ обозначено стоящее в правой части (33) выражение. В силу теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из формул (32) получим, что при $x \to a$ функция $z_0(x)$ стремится к конечному пределу, а функции $z_{\nu}(x)$ $(\nu = 1, 2, \cdots, n-1)$ стремятся к нулю. Тем самым существование конечного предела (15), а также соотношения (16) доказаны. Используя соотношения (15) и (16), из формул (30) легко получаются соотношения (17). Таким образом, утверждение 1° доказано.

Утверждение 2° докажем методом индукции. Заметим, что утверждение 2° при $m = 0$ совпадает с утверждением 1°. Предположим, что утверждение 2° верно для некоторого $m = j\cdot(0 \leqslant j \leqslant n-2)$. Тогда для решения $y(x)$ уравнения (14) из условия (18) при $m = j+1$ имеем, что

$$\lim_{x\to a} |(x-a)^{\nu-j}\, y^{[\nu]}(x)| = 0,\quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{34}$$

Функцию $\psi_{\nu}(x)$ (см. (28)) представим в виде

$$\psi_{\nu}(x) = \sum_{k=\nu}^{n-1} B_k \frac{(x-a)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} - \sum_{k=0}^{n-1} A_k\, \varphi_{\nu k}(x, a) + \int\limits_{a}^{x} \varphi_{\nu 0}(x, t)\, f(t)\, dt, \tag{35}$$

где

$$B_k = \sum_{s=k}^{n-1} c_k \frac{(a-\alpha)^{s-k}}{(s-k)!} - \sum_{s=0}^{n-1} c_{2n-1-s}\, \varphi_{ks}(a, \alpha) - \int\limits_{a}^{\alpha} \varphi_{k0}(a, t)\, f(t)\, dt,$$

$$A_k = \sum_{s=0}^{k} c_{2n-1-s} \frac{(\alpha-a)^{k-s}}{(k-s)!} + \int\limits_{a}^{\alpha} \frac{(t-a)^k}{k!} f(t)\, dt. \tag{36}$$

В силу представления (35) формула (30) принимает вид

$$y^{[2n-1-\nu]}(x) = \sum_{k=0}^{\nu} A_k \frac{(a-x)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} - \int\limits_{a}^{x} \frac{(t-x)^{\nu}}{\nu!} f(t)\, dt -$$

$$-\sum_{k=0}^{\nu}\int_{x}^{a}\frac{(t-x)^{\nu-k}}{(\nu-k)!}p_k(t)\,y^{[k]}(t)\,dt, \tag{37}$$

$$\nu=0,1,\cdots,n-1.$$

В силу соотношений (34), в формулах (29) при $0<\nu\leqslant j$ можно положить $x=a$. Тогда, учитывая (35) и условия $y^{[\nu]}(a)=0$ ($\nu=0,1,\cdots$ $\cdots,j$) имеем, что

$$B_\nu=-\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a}^{a}\varphi_{\nu k}(a,t)\,p_k(t)\,y^{[k]}(t)\,dt,\ \nu=0,1,\cdots,j. \tag{38}$$

Подставляя эти выражения в формулы (29), получим

$$y^{[\nu]}(x)=\eta_{\nu j}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a}^{a}\Phi_{\nu kj}(x,t)\,p_k(t)\,y^{[k]}(t)\,dt, \tag{39}$$

$$\nu=0,1,\cdots,j$$

$$y^{[\nu]}(x)=\psi_\nu(x)+\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x}^{a}\varphi_{\nu k}(x,t)\,p_k(t)\,y^{[k]}(t)\,dt, \tag{40}$$

$$\nu=j+1,\ j+2,\cdots,n-1,$$

где

$$\eta_{\nu j}(x)=\sum_{k=j+1}^{n-1}B_k\frac{(x-a)^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-\sum_{k=0}^{n-1}A_k\,\varphi_{\nu k}(x,a)+\int_{a}^{x}\varphi_{\nu 0}(x,t)\,f(t)\,dt,$$

$$\Phi_{\nu kj}(x,t)=-\sum_{s=\nu}^{j}\frac{(x-a)^{s-\nu}}{(s-\nu)!}\varphi_{sk}(a,t),\ a\leqslant t\leqslant x\leqslant \alpha, \tag{41}$$

$$\Phi_{\nu kj}(x,t)=-\sum_{s=\nu}^{j}\frac{(x-a)^{s-\nu}}{(s-\nu)!}\int_{a}^{x}\frac{(a-u)^{n-1-s}(t-u)^{n-1-k}}{(n-1-s)!\,(n-1-k)!\,p_n(u)}du+$$

$$+\sum_{s=j+1}^{n-1}\frac{(x-a)^{s-\nu}}{(s-\nu)!}\int_{x}^{t}\frac{(a-u)^{n-1-s}\ (t-u)^{n-1-k}}{(n-1-s)!\,(n-1-k)!\,p_n(u)}du,\ a\leqslant x\leqslant t\leqslant \alpha. \tag{42}$$

Тем же путем, что и при доказательстве утверждения 1°, из формул (39), (40) получим соотношения (19) и (20) при $m=j+1$, а затем из формул (37) получим соотношения (21) при $m=j+1$. Утверждение 2° доказано.

Утверждение 3° тоже доказывается методом индукции. Убедимся в его справедливости при $m=0$. Пусть решение $y(x)$ уравнения (14) удовлетворяет условиям $y^{[\nu]}(a)=0$ ($\nu=0,1,\cdots,n-1$). Тогда, в силу утверждения 2°, в формулах (29) можно положить $x=a$. Следовательно, соотношения (38) имеют место для всех ν $(0\leqslant\nu<n-1)$. Подставляя выражения (38) в формулы (29), получим

$$y^{[\nu]}(x) = -\sum_{k=0}^{n-1} A_k\, \varphi_{\nu k}(x, a) + \int_a^x \varphi_{\nu 0}(x, t)\, f(t)\, dt -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x y^{[k]}(t)\, p_k(t) \int_a^t \frac{(x-u)^{n-1-\nu}\, (t-u)^{n-1-k}}{(n-1-\nu)!\, (n-1-k)!\, p_n(u)}\, du dt -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \int_x^a y^{[k]}(t)\, p_k(t) \int_a^x \frac{(x-u)^{n+1-\nu}\, (t-u)^{n-1-k}}{(n-1-\nu)!\, (n-1-k)!\, p_n(u)}\, du dt, \qquad (43)$$

$$\nu = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Из формул (43) следует ограниченность функций (22) при $m=0$. В силу этого, из формул (37) получим соотношения (23) и (24) при $m=0$. Таким образом, утверждение 3° при $m=0$ верно. Предположим, что для некоторого числа j $(0 < j \leqslant n-2)$ утверждение 3° при $m = n-2-j$ верно и докажем его справедливость при $m = n-1-j$. В силу ограниченности функций (22) при $m = n-2-j$, в формулах (37) для $j+1 \leqslant \nu \leqslant n-1$ можно положить $x = a$. Учитывая условия $y^{[2n-1-\nu]}(a) = 0$ $(j+1 \leqslant \nu \leqslant n-1)$, получим, что

$$A_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \int_a^a \frac{(t-a)^{\nu-k}}{(\nu-k)!}\, p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt, \quad j+1 \leqslant \nu \leqslant n-1. \qquad (44)$$

Подставляя эти выражения в формулы (43) и (37), получим (см. (41), (42)), что

$$y^{[\nu]}(x) = -\sum_{k=0}^{j} A_k\, \varphi_{\nu k}(x, a) + \int_a^x \varphi_{\nu 0}(x, t)\, f(t)\, dt -$$

$$-\sum_{k=j+1}^{n-1} \int_a^x \varphi_{\nu k}(x, t)\, p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt +$$

$$+\sum_{k=0}^{j} \int_a^a \Phi_{k\nu j}(t, x)\, p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt, \qquad (45)$$

$$\nu = 0, 1, \cdots, n-1,$$

$$y^{[2n-1-\nu]}(x) = \sum_{k=0}^{j} A_k \frac{(a-x)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} - \int_a^x \frac{(t-x)^{\nu}}{\nu!}\, f(t)\, dt +$$

$$+\sum_{k=j+1}^{\nu} \int_a^x \frac{(t-a)^{\nu-k}}{(\nu-k)!}\, p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt +$$

$$+\sum_{k=0}^{j} \int_a^x \left[\sum_{s=j+1}^{\nu} \frac{(a-x)^{\nu-s}\, (t-a)^{s-k}}{(\nu-s)!\, (s-k)!}\right] p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt -$$

$$-\sum_{k=0}^{j} \int_x^a \left[\sum_{s=k}^{j} \frac{(a-x)^{\nu-s}\, (t-a)^{s-k}}{(\nu-s)!\, (s-k)!}\right] p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt, \qquad (46)$$

$$\nu = j+1, j+2, \cdots, n-1,$$

$$y^{[2n-1-\nu]}(x)=\sum_{k=0}^{\nu}A_k\frac{(a-x)^{\nu-k}}{(\nu-k)!}-\int_a^x\frac{(t-x)^\nu}{\nu!}f(t)\,dt-$$

$$-\sum_{k=0}^{\nu}\int_x^a\frac{(t-x)^{\nu-k}}{(\nu-k)!}p_k(t)\,y^{[k]}(t)\,dt, \tag{47}$$

$$\nu=0,1,\cdots,j.$$

Из формул (45), как нетрудно убедиться, следует ограниченность функций (22) при $m=n-1-j$. В силу этого из формул (46) и (47) получим соотношения (23), (24) при $m=n-1-j$. Тем самым утверждение 3° доказано.

Докажем теперь утверждение 4°. В силу утверждения 3° в формулах (37) можно положить $x=a$. Учитывая условия $y^{[n+\nu]}(a)=0$ $(\nu=0,1,\cdots,n-1)$, получим, что соотношения (44) имеют место для всех $\nu\,(0\leqslant\nu\leqslant n-1)$. Подставляя выражения (44) в формулы (43) и (37), получим

$$y^{[\nu]}(x)=\int_a^x\varphi_{\nu 0}(x,t)\,f(t)\,dt-\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^x\varphi_{\nu k}(x,t)\,p_k(t)\,y^{[k]}(t)\,dt, \tag{48}$$

$$y^{[2n-1-\nu]}(x)=-\int_a^x\frac{(t-x)^\nu}{\nu!}f(t)\,dt+\sum_{k=0}^{\nu}\int_a^x\frac{(t-x)^{\nu-k}}{(\nu-k)!}p_k(t)\,y^{[k]}(t)\,dt,$$

$$\nu=0,1,\cdots,n-1. \tag{49}$$

Из формул (48) и (49) получаются соотношения (25) и (26). Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют условию* 1. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1°. *Уравнение* (14) *имеет решение* $y(x)$, *и притом только одно, удовлетворяющее условиям*

$$y^{[\nu]}(a)=0,\quad \nu=0,1,\cdots,2n-1. \tag{50}$$

2°. *Для любого целого числа* $m\,(0<m\leqslant 2n-1)$ *уравнение* (14) *имеет решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям*

$$y^{[\nu]}(a)=0,\quad \nu=0,\cdots,m-1, \tag{51}$$

$$y^{[m]}(a)=1. \tag{52}$$

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений (48). Нетрудно убедиться, что эта система уравнений разрешима и определяет решение $y(x)$ уравнения (14), удовлетворяющее условиям (50). Однако, если решение $y(x)$ уравнения (14) удовлетворяет условиям (50), то, как и при доказательстве теоремы 1, функции $y^{[\nu]}(x)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (48), имеющей только одно решение. Утверждение 1° доказано.

В силу утверждения 1° доказательство утверждения 2° достаточно провести для однородного уравнения $l[y]=0$. Пусть $0<m\leqslant$

$< n-1$. Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений на интервале $(a, \alpha]$:

$$y^{[\nu]}(x) = \frac{(x-a)^{m-\nu}}{(m-\nu)!} + \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \Phi_{\nu,k,m-1}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t)\, dt,$$

$$\nu = 0, 1, \cdots, m-1,$$

$$y^{[m]}(x) = 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^\alpha \varphi_{\nu k}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t)\, dt, \tag{53}$$

$$y^{[\nu]}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^\alpha \varphi_{\nu k}(x, t) p_k(t) y^{[k]}(t)\, dt, \quad \nu = m+1, m+2, \cdots, n-1,$$

где функции $\varphi_{\nu k}(x, t)$ и $\Phi_{\nu k m}(x, t)$ определяются по формулам (27), (41), (42), при этом предполагается выполненным неравенство (31). В силу неравенства (31) приведенная система уравнений разрешима и определяет на интервале $(a, \alpha]$ решение $y(x)$ уравнения $l[y] = 0$, удовлетворяющее условиям (51). При этом существует конечное значение $y^{[m]}(a)$ и, кроме того

$$|y^{(\nu)}(x)|\,(x-a)^{\nu-m} < 2, \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{54}$$

В силу неравенств (31) и (54) из формулы (53) получим, что

$$|y^{[m]}(x)| > 1 - \frac{1}{n} \geqslant 0.$$

Значит $y^{[m]}(a) \neq 0$ и, следовательно, уравнение $l[y] = 0$ имеет решение, удовлетворяющее всем условиям (51), (52).

В случае $m = n$ нужно рассматривать систему интегральных уравнений (43) и учесть формулы (37), полагая $f(x) = 0$, $A_{n-1} = 1$ и $A_k = 0$ при $k \neq n-1$. А в случае $n + 1 \leqslant m \leqslant 2n-1$ следует рассматривать систему интегральных уравнений (45) и учесть формулы (46), (47), полагая $j = 2n-1-m$, $f(x) = 0$, $A_{2n-1-m} = 1$ и $A_k = 0$ при $k \neq 2n-1-m$. Теорема доказана.

§ 2. Поведение решений при условии 2

Теорема 3. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения (1) удовлетворяют условию 2. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Для любого решения $y(x)$ уравнения (14) существует конечный предел $\lim\limits_{x\to a} y(x) = y(a)$ и имеют место соотношения*

$$\lim_{x\to a} \{(x-a)^{\nu} y^{[\nu]}(x)\} = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, n-1,$$

$$\lim_{x\to a} \{(x-a)^{n-1-\varkappa+\nu} h_\varkappa(x)\, y^{[\varkappa+\nu]}(x)\} = 0, \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1.$$

2°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (14) *такое, что при некором* m $(0 \leqslant m \leqslant n-1-\varkappa)$ $y^{[\nu]}(a)=0$ $(\nu=0,1,\cdots,m-1)$, *то существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to a}\{(m-\nu)!\,(x-a)^{\nu-m}\,y^{[\nu]}(x)\}=y^{[m]}(a),\ \nu=0,1,\cdots,m,$$

и имеют место соотношения

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-m}\,y^{[\nu]}(x)\}=0,\ \nu=m+1,\ m+2,\cdots,n-1,$$

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{n-1-m-\varkappa+\nu}\,h_\varkappa(x)\,y^{[n+\nu]}(x)\}=0,\ \nu=0,1,\cdots,n-1.$$

3°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (14) *такое, что при некотором* m $(0\leqslant m\leqslant \varkappa-1)$

$$y^{[\nu]}(a)=0,\quad \nu=0,1,\cdots,n-1-\varkappa+m,$$
$$y^{[n+\nu]}(a)=0,\ \nu=0,1,\cdots,m-1,$$

то функции

$$y^{[\nu]}(x)\,[(x-a)^{n-1-\nu-\varkappa+m}\,h_\varkappa(x)]^{-1},\ \nu=0,1,\cdots,n-1,$$

ограничены на конечном интервале $(a,\alpha]\subset(a,b)$, *существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to a}\{(m-\nu)!\,(a-x)^{\nu-m}\,y^{[n+\nu]}(x)\}=y^{[n+m]}(a),\ \nu=0,1,\cdots,m,$$

и, кроме того

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-m}\,y^{[n+\nu]}(x)\}=0,\ \nu=m+1,\ m+2,\cdots,n-1.$$

4°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (14) *такое, что при некотором* m $(0\leqslant m\leqslant\varkappa-1)$

$$y^{[\nu]}(a)=0,\ \nu=0,1,\cdots,n-1-\varkappa+m,$$
$$y^{[n+\nu]}(a)=0,\ \nu=0,1,\cdots,m,$$

то существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a}\{(n-\nu-\varkappa+m)!\,(x-a)^{\nu+\varkappa-m-n}\,y^{[\nu]}(x)\}=y^{[n-\varkappa+m]}(a),$$

$$\nu=0,1,\cdots,n-\varkappa+m,$$

и, кроме того

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu+\varkappa-m-n}\,y^{[\nu]}(x)\}=0,\ n-\varkappa+m+1\leqslant\nu\leqslant n-1,$$

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-m-1}\,h_\varkappa(x)\,y^{[n+\nu]}(x)\}=0,\ \nu=0,1,\cdots,n-1.$$

5°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (14) *такое, что при некотором* m $(0\leqslant m\leqslant n-1-\varkappa)$ $y^{[\nu]}(a)=0$ $(\nu=0,1,\cdots,n+\varkappa+m-1)$, *то функции*

$$y^{[\nu]}(x)\,[(x-a)^{n-1-\nu+m}\,h_\varkappa(x)]^{-1},\ \nu=0,1,\cdots,n-1,$$

ограничены на конечном интервале $(a,\alpha]\subset(a,b)$, *существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to a}\{(\varkappa+m-\nu)!\,(a-x)^{\nu-\varkappa-m}\,y^{[n+\nu]}(x)\}=y^{[n+\varkappa+m]}(a),$$

$$\nu=0,1,\cdots,\varkappa+m,$$

и, кроме того

$$\lim_{x\to a}[(x-a)^{\nu-\varkappa-m}\,y^{[n+\nu]}(x)]=0,\quad \varkappa+m+1\leqslant\nu\leqslant n-1.$$

6°. *Если решение $y(x)$ уравнения* (14) *удовлетворяет условиям $y^{[\nu]}(a)=0$ $(\nu=0,1,\cdots,2n-1)$, то имеют место соотношения*

$$\lim_{x\to a}\{y^{[\nu]}(x)\,[(x-a)^{2n-2-\varkappa-\nu}h_\varkappa(x)]^{-1}\}=0,\quad \nu=0,1,\cdots,n-1,$$

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-n+1}\,y^{[n+\nu]}(x)\}=0,\quad \nu=0,1,\cdots,n-1.$$

Доказательство. Утверждение 1° доказывается таким же образом, как утверждение 1° теоремы 1. Только в данном случае число $\alpha\in(a,b)$ в уравнениях (29) нужно подобрать так, чтобы

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\alpha (x-a)^{2k-\varkappa}\,h_\varkappa(x)\,|p_{n-1-k}(x)|\,dx<\frac{1}{2n^2}. \tag{55}$$

Утверждения 2°—5° доказываются методом индукции, при этом метод индукции нужно применить к утверждениям 3° и 4° одновременно. Чтобы вывести системы интегральных уравнений, которым удовлетворяют функции $y^{[\nu]}(x)$ при тех или иных предположениях относительно решения $y(x)$ уравнения (14), удобно функцию $\psi_\nu(x)$ (см. 28)) представить в виде

$$\psi_\nu(x)=\int_a^x\varphi_{\nu 0}(x,t)\,f(t)\,dt+\sum_{k=\nu}^{n-1}D_k\frac{(x-a)^{k-\nu}}{(k-\nu)!}-$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1}A_k\int_x^\alpha\frac{(x-u)^{n-1-\nu}\,(a-u)^{n-1-k}}{(n-1-\nu)!\,(n-1-k)!\,p_n(u)}\,du, \tag{56}$$

где

$$D_k=\sum_{s=k}^{n-1}c_s\frac{(a-\alpha)^{s-k}}{(s-k)!}+\int_a^\alpha f(t)\int_t^\alpha\frac{(a-u)^{n-1-k}\,(t-u)^{n-1}}{(n-1-k)!\,(n-1)!\,p_n(u)}\,du\,dt,$$

а числа A_k определяются по формуле (36) (представление (35) функции $\psi_\nu(x)$ при условии 2, вообще говоря, теряет смысл).

Пусть решение $y(x)$ уравнение (14) удовлетворяет условиям

$$y^{[\nu]}(a)=0,\quad \nu=0,1,\cdots,m, \tag{57}$$

$$y^{[2n-1-\nu]}(a)=0,\quad \nu=j+1,\,j+2,\cdots,n-1, \tag{58}$$

где $-1\leqslant m,\ j\leqslant n-1$ (при $m=-1$ или $j=n-1$ условия (57) и (58), соответственно, отсутствуют), и пусть поведение функций $y^{[\nu]}(x)$ при $x\to a$ такое, что в формулах (29) при $0\leqslant\nu\leqslant m$ и формулах (37) при $j+1 \leqslant \nu \leqslant n-1$ можно положить $x = \alpha$. Тогда, учитывая формулу (56) и условия (57), (58), для чисел D_ν и A_ν получим выражения

$$D_\nu = \sum_{k=0}^{n-1} A_k \int_a^\alpha \frac{(\alpha - u)^{2n-2-k-\nu}\, du}{(n-1-\nu)!\,(n-1-k)!\,p_n(u)} -$$

$$- \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^\alpha \varphi_{\nu k}(\alpha, t)\, p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt, \quad \nu = 0, 1, \cdots, m,$$

$$A_\nu = \sum_{k=0}^{\nu} \int_a^\alpha \frac{(t-a)^{\nu-k}}{(\nu-k)!} p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt, \quad \nu = j+1,\ j+2, \cdots, n-1.$$

Подставляя эти выражения в формулы (37) и (29), для функций $y^{[\nu]}(x)$ $(\nu = n,\ n+1, \cdots, 2n-1)$ получим формулы (46), (47), а для функций $y^{[\nu]}(x)$ $(\nu = 0,\ 1, \cdots, n-1)$ получим следующую систему интегральных уравнений на интервале $(a, \alpha]$:

$$y^{[\nu]}(x) = \zeta_\nu(x) + \sum_{k=j+1}^{n-1} \int_a^\alpha F_{\nu k}(x, t)\, p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j} \int_a^\alpha H_{\nu k}(x, t)\, p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt, \tag{59}$$

$$\nu = 0,\ 1, \cdots, m,$$

$$y^{[\nu]}(x) = \psi_\nu(x) + \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^\alpha \varphi_{\nu k}(x, t)\, p_k(t)\, y^{[k]}(t)\, dt, \tag{60}$$

$$\nu = m+1,\ m+2, \cdots, n-1,$$

причем, если ввести обозначения

$$K^r_{k\nu}(x, t, u) = \frac{(x-a)^{r-\nu}(t-u)^{n-1-k}(\alpha-u)^{n-1-r}}{(r-\nu)!\,(n-1-k)!\,(n-1-r)!\,p_n(u)},$$

$$G^{rs}_{\nu k}(x, t, u) = \frac{(x-a)^{r-\nu}(t-a)^{s-k}(\alpha-u)^{2n-2-s-r}}{(r-\nu)!\,(s-k)!\,(n-1-s)!\,(n-1-r)!\,p_n(u)},$$

то для функций $\zeta_\nu(x)$, $F_{\nu k}(x, t)$, $H_{\nu k}(x, t)$ имеют место формулы:

$$\zeta_\nu(x) = \int_a^x \varphi_{\nu 0}(x, t) f(t)\, dt + \sum_{k=m+1}^{n-1} D_k \frac{(x-a)^{k-\nu}}{(k-\nu)!} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{j} A_k \left\{ \sum_{r=\nu}^{m} \int_a^x K^r_{\nu k}(x, a, u)\, du - \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_x^\alpha K^r_{\nu k}(x, a, u)\, du \right\},$$

$$F_{\nu k}(x, t) = \sum_{r=\nu}^{m} \int_t^x K^r_{\nu k}(x, t, u)\, du - \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_x^{\alpha} K^r_{\nu k}(x, t, u)\, du,$$

$$a \leqslant t \leqslant x \leqslant \alpha,$$

$$F_{\nu k}(x, t) = -\sum_{r=m+1}^{n-1} \int_t^{\alpha} K^r_{\nu k}(x, t, u)\, du, \quad a \leqslant x \leqslant t \leqslant \alpha,$$

$$H_{\nu k}(x, t) = -\sum_{s=j+1}^{n-1} \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_x^{\alpha} G^{rs}_{\nu k}(x, t, u)\, du -$$

$$-\sum_{s=k}^{j} \sum_{r=\nu}^{m} \int_a^t G^{rs}_{\nu k}(x, t, u)\, du + \sum_{s=j+1}^{n-1} \sum_{r=\nu}^{m} \int_t^x G^{rs}_{\nu k}(x, t, u)\, du,$$

$$a \leqslant t \leqslant x \leqslant \alpha,$$

$$H_{\nu k}(x, t) = -\sum_{s=j+1}^{n-1} \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_t^{\alpha} G^{rs}_{\nu k}(x, t, u)\, du -$$

$$-\sum_{s=k}^{j} \sum_{r=\nu}^{m} \int_a^x G^{rs}_{\nu k}(x, t, u)\, du + \sum_{s=k}^{j} \sum_{r=m+1}^{n-1} \int_x^t G^{rs}_{\nu k}(x, t, u)\, du,$$

$$a < x \leqslant t \leqslant \alpha.$$

Если m или j принимают одно из значений -1 или $n-1$, вид приведенных уравнений значительно упрощается. Например, при $m=n-1$ и $j=n-1$ уравнения (59), (60) сводятся к (48).

Дальнейшее доказательство теоремы основано на применении формул (59), (60) и (46), (47). При этом нужно учесть, что функция $h_\varkappa(x)$ монотонно возрастает, а функция $(x-a)^{-1} h_\varkappa(x)$ монотонно убывает на интервале $(a, \alpha]$ и, кроме того, $h_\varkappa(a) = 0$.

Теорема 4. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют условию* 2. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1°. *Уравнение* (14) *имеет единственное решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям* $y^{[\nu]}(a) = 0\ (\nu = 0, 1, \cdots, 2n-1)$.

2°. *Для любого целого* $m\ (0 \leqslant m \leqslant n-1-\varkappa$ *или* $n+\varkappa \leqslant m < 2n-1)$ *уравнение* (14) *имеет решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям*

$$y^{[m]}(a) = 1, \quad y^{[\nu]}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, \cdots, m-1.$$

3°. *Для любого целого* $m\ (0 \leqslant m \leqslant \varkappa - 1)$ *уравнение* (14) *имеет решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям* $y^{[n+m]}(a) = 1$ *и*

$$y^{[\nu]}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, \cdots, n-1-\varkappa+m,$$

$$y^{[n+\nu]}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, \cdots, m-1.$$

4°. *Для любого целого* $m\,(n-\varkappa \leqslant m \leqslant n-1)$ *уравнение* (14) *имеет решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям* $y^{[m]}(a)=1$ *и*

$$y^{[\nu]}(a)=0, \quad \nu=0,\ 1, \cdots,\ m-1,$$

$$y^{[n+\nu]}(a)=0, \quad \nu=0,\ 1, \cdots,\ m+\varkappa-n.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

§ 3. Поведение решений при условии 3

Теорема 5. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют условию* 3. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Для любого решения* $y(x)$ *уравнения* (14) *функции*

$$y^{[\nu]}(x)\,(x-a)^{\nu}\left[1+\int\limits_x^{c}\frac{(u-a)^{n-1}}{|p_n(u)|}\,du\right]^{-1}, \quad \nu=0, 1, \cdots, n-1,$$

ограничены на конечном интервале $(a, c] \subset (a, b)$, *существует конечный предел*

$$\lim_{x\to a} y^{[n]}(x)=y^{[n]}(a)$$

и, кроме того

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu}\,y^{[n+\nu]}(x)\}=0, \quad \nu=1, 2, \cdots, n-1.$$

2°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (14) *такое, что при некотором* $m\,(0\leqslant m\leqslant n-1)$

$$y^{[\nu]}(a)=0, \quad \nu=0,\ 1, \cdots,\ m-1,$$

$$y^{[n+\nu]}(a)=0, \quad \nu=0, 1, \cdots,\ m,$$

то существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a}\{(m-\nu)!\,(x-a)^{\nu-m}\,y^{[\nu]}(x)\}=y^{[m]}(a), \quad \nu=0, 1, \cdots, m,$$

и имеют место соотношения

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-m}\,y^{[\nu]}(x)\}=0, \quad \nu=m+1, \quad m+2, \cdots, n-1.$$

Кроме того, если $0\leqslant m\leqslant n-2$, *то*

$$\lim_{x\to a}\{y^{[n+\nu]}(x)\,(x-a)^{\nu-m-1}\,h_n(x)\}=0, \quad \nu=0, 1, \cdots, n-1,$$

а если $m=n-1$, *то*

$$\lim_{x\to a}\left\{y^{[n+\nu]}(x)\,(x-a)^{\nu-n+1}\int\limits_x^{c}\frac{(u-a)^{n-1}}{|p_n(u)|}\,du\right\}=0, \quad \nu=0, 1, \cdots, \quad n-1.$$

3°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (14) *такое, что при некотором* $m\,(1\leqslant m\leqslant n-1)$

$$y^{[\nu]}(a)=0, \quad \nu=0, 1, \cdots,\ m-1,$$

$$y^{[n+\nu]}(a)=0, \quad \nu=0, 1, \cdots,\ m-1$$

то функции

$$y^{[\nu]}(x)\,[(x-a)^{m-\nu-1}h_\nu(x)]^{-1},\quad \nu=0,1,\cdots,n-1,$$

ограничены на конечном интервале $(a,\alpha]\subset(a,b)$, *существуют конечные пределы*

$$\lim_{x\to a}\{(m-\nu)!\,(a-x)^{\nu-m}\,y^{[n+\nu]}(x)\}=y^{[n+m]}(a),\quad \nu=0,1,\cdots,m,$$

и, кроме того

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-m}y^{[n+\nu]}(x)\}=0,\quad \nu=m+1,\ m+2,\cdots,n-1.$$

4°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (14) *удовлетворяет условиям* $y^{[\nu]}(a)=0$ $(\nu=0,1,\cdots,2n-1)$, *то имеют место соотношения*

$$\lim_{x\to a}\{(x-a)^{\nu-n+1}y^{[\nu]}(x)\}=0,\quad \nu=0,1,\cdots,n-1,$$

$$\lim_{x\to a}\left\{y^{[n+\nu]}(x)\,(x-a)^{\nu-n+1}\int_x^\alpha\frac{(u-a)^{n-1}}{|p_n(u)|}du\right\}=0,\quad \nu=0,1,\cdots,n-1.$$

Доказательство основано на применении формул (59), (60) и (46), (47), в которых число $\alpha\in(a,b)$ нужно подобрать так, чтобы имело место неравенство (55) при $x=n$. При этом метод индукции нужно применить к утверждениям 2° и 3° одновременно.

Теорема 6. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют условию* 3. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Уравнение* (14) *имеет единственное решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям* $y^{[\nu]}(a)=0$ $(\nu=0,1,\cdots,2n-1)$.

2°. *Для любого целого* m $(0\leqslant m\leqslant n-1)$ *уравнение* (14) *имеет решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям* $y^{[n+m]}(a)=1$ *и*

$$y^{[\nu]}(a)=0,\quad y^{[n+\nu]}(a)=0,\quad \nu=0,1,\cdots,m-1.$$

3°. *Для любого целого* m $(0\leqslant m\leqslant n-1)$ *уравнение* (14) *имеет решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям* $y^{[m]}(a)=1$ *и*

$$y^{[\nu]}(a)=0,\quad \nu=0,1,\cdots,m-1,$$
$$y^{[n+\nu]}(a)=0,\quad \nu=0,1,\cdots,m.$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

§ 4. Вспомогательные предложения

Докажем несколько предложений, предполагая, что коэффициенты выражения (1) для всех $\alpha\in(a,b)$ удовлетворяют какому-нибудь одному из следующих двух условий:

Условие 4. Для некоторого числа ε $\left(0\leqslant\varepsilon<\frac{1}{2}\right)$

$$\int_a^\alpha\frac{(x-a)^{n-1+\varepsilon}}{|p_n(x)|}dx<\infty,$$

$$\int_a^\alpha |p_k(t)| \int_a^x \frac{(t-a)^{n-1+\varepsilon}(x-t)^{n-1-k}}{(x-a)^{k+\varepsilon}|p_n(t)|}\,dtdx < \infty,\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

Условие 5. Для некоторого числа r $(0 \leqslant r \leqslant n-1)$

$$\int_a^\alpha \left[\int_x^\alpha \frac{(t-x)^{n-1-r}}{|p_n(t)|}\,dt\right]^2 dx < \infty,$$

$$\int_a^\alpha |p_{n-1-k}(x)| \int_x^\alpha \frac{(x-a)^{k+r}(t-x)^k}{(t-a)^r\,|p_n(t)|}\,dtdx < \infty,\ k=0,1,\cdots,n-1.$$

Замечание 1. Если выполняется условие 1 или 2, то выполняется также условие 4, а если выполняется условие 3, то выполняется также условие 5 при $r=0$.

Замечание 2. Если коэффициент $p_0(x)$ дифференциального выражения (1) удовлетворяет какому-нибудь одному из условий 1, 2, 3, то этому условию удовлетворяет и функция $p_0(x)-\lambda$ при любом λ. Поэтому все приведенные выше результаты справедливы также для уравнения (6).

Лемма 1. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют условию* 4, *и пусть* $y(x,\lambda)$ — *некоторое решение уравнения* (6). *Тогда при любом* $\alpha \in (a, b)$ *имеет место неравенство*

$$|y(x,\lambda)| \leqslant (x-a)^{-\varepsilon} e^{|\lambda| Q(\alpha)+P(\alpha)} \left\{ \int_a^\alpha q_0(t)|f(t)|\,dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha-a)^{k+\varepsilon} |y^{[k]}(\alpha,\lambda)| + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(\alpha)|y^{[2n-1-k]}(\alpha,\lambda)| \right\}, \tag{61}$$

где

$$q_k(t) = \int_a^t \frac{(u-a)^{n-1+\varepsilon}(t-u)^{n-1-k}}{|p_n(u)|}\,du,\quad k=0,1,\cdots,n-1,$$

$$Q(\alpha) = \int_a^\alpha \frac{q_0(t)}{(t-a)^\varepsilon}\,dt,\quad P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_a^\alpha \frac{q_k(t)}{(t-a)^{k+\varepsilon}}|p_k(t)|\,dt.$$

Доказательство. Нетрудно убедиться, что функции $y^{[\nu]}(x,\lambda)$ $(\nu=0,1,\cdots,n-1)$ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$y^{[\nu]}(x,\lambda) = \psi_\nu(x,\lambda) - \lambda\int_x^\alpha \varphi_{\nu 0}(x,t)\,y(t,\lambda)\,dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1}\int_x^\alpha \varphi_{\nu k}(x,t)\,p_k(t)\,y^{[k]}(t,\lambda)\,dt,$$

$$\nu = 0,1,\cdots,n-1,$$

где функции $\varphi_{\nu k}(x, t)$ и $\psi_\nu(x, \lambda)$ определяются формулами (27) и (28), причем в формуле (28) $c_\nu = y^{[\nu]}(\alpha, \lambda)$ $(\nu = 0, 1, \cdots, 2n-1)$.

Если обозначить

$$z(x, \lambda) = \max_{0 \le \nu \le n-1} |(x-a)^{\nu+r} y^{[\nu]}(x, \lambda)|,$$

то, как нетрудно убедиться, из приведенной системы интегральных уравнений получим интегральное неравенство

$$z(x, \lambda) \le \Psi(\alpha, \lambda) + |\lambda| \int_x^\alpha \frac{q_0(t)}{(t-a)^r} z(t, \lambda)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_x^\alpha \frac{q_k(t)}{(t-a)^{k+r}} |p_k(t)|\, z(t, \lambda)\, dt,$$

где

$$\Psi(\alpha, \lambda) = \int_a^\alpha q_0(t)|f(t)|\, dt + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha-a)^{k+r} |y^{[k]}(\alpha, \lambda)| +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} q_k(\alpha) |y^{[2n-1-k]}(\alpha, \lambda)|.$$

Из этого интегрального неравенства следует, что

$$z(x, \lambda) \le \Psi(\alpha, \lambda)\, e^{|\lambda| Q(\alpha) + P(\alpha)}.$$

Отсюда, в частности, вытекает неравенство (61).

Аналогично доказывается следующая

Лемма 2. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют условию* (5) *и пусть* $y(x, \lambda)$ — *некоторое решение уравнения* (6). *Тогда при любом* $\alpha \in (a, b)$ *имеет место неравенство*

$$|y(x, \lambda)| \le g_0(x, \alpha)\, e^{|\lambda| G(\alpha) + H(\alpha)} \left\{ \int_a^\alpha (t-a)^{n-1+r} |f(t)|\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{n-1} (1+\alpha-a)^k |y^{[k]}(\alpha, \lambda)| + \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha-a)^{k+r} |y^{[n+k]}(\alpha, \lambda)| \right\}, \qquad (62)$$

где

$$g_k(t, \alpha) = 1 + \int_t^\alpha \frac{(u-t)^{n-1-k}}{(u-a)^r |p_n(u)|}\, du, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1,$$

$$G(\alpha) = \int_a^\alpha (t-a)^{n-1+r} g_0(t, \alpha)\, dt,$$

$$H(\alpha) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_a^\alpha (t-a)^{n-1-k+r} g_k(t, \alpha) |p_k(t)|\, dt.$$

Предложение 1. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют какому-нибудь одному из условий* 4 *и* 5. *Тогда решения уравнения* (6) *суммируемы с квадратом на каждом интервале* $(a, \alpha] \subset (a, b)$.

Это непосредственно следует из неравенств (61) и (62).

Предложение 2. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют какому-нибудь одному из условий* 4 *или* 5, *и пусть функция* $y(x, \lambda)$ *при каждом* $\lambda \in M$ *является решением уравнения* (6), *где* M — *некоторое ограниченное множество точек комплексной плоскости, имеющее точку сгущения* $\lambda_0 \in M$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1°. *Если при некотором* $\alpha \in (a, b)$ *функция* $y^{[\nu]}(\alpha, \lambda)$ $(\nu=0, 1, \cdots, 2n-1)$ *непрерывны по* λ *в точке* λ_0, *то в точке* λ_0 *непрерывна по* λ *также функция* $y(x, \lambda)$ *в смысле метрики пространства* $L^2(a, \alpha)$. *При этом, если* $g, l[g] \in L^2(a, \alpha)$, *то выражение* (*см.* (13)) $[y, g]_{a, \lambda}$ *является непрерывной функцией по* λ *в точке* λ_0.

2°. *Если при некотором* $\alpha \in (a, b)$ *функции* $y^{[\nu]}(\alpha, \lambda)$ $(\nu=0, 1, \cdots, 2n-1)$ *дифференцируемы по* λ *в точке* λ_0, *то семейство функций*

$$\left|\frac{y(x, \lambda)-y(x, \lambda_0)}{\lambda-\lambda_0}\right|^2, \quad \lambda \in M, \quad \lambda \neq \lambda_0,$$

имеет суммируемую мажоранту на интервале $(a, \alpha]$.

Доказательство. Очевидно, что функция $u(x, \lambda) = y(x, \lambda) - y(x, \lambda_0)$ является решением уравнения

$$l[u] - \lambda u = (\lambda - \lambda_0)\, y(x, \lambda_0).$$

Поэтому для решения $u(x, \lambda)$ имеет место неравенство (61) или неравенство (62) с функцией $f(x) = (\lambda - \lambda_0)\, y(x, \lambda_0)$. Отсюда легко следует непрерывность по λ в точке λ_0 функции $y(x, \lambda)$ в смысле метрики пространства $L^2(a, \alpha)$. Учитывая это, непрерывность функции $[y, g]_{a, \lambda}$ в точке λ_0 легко получается из формулы (12):

$$[y, g]_{a, \lambda} = [y, g]_{\alpha, \lambda} + \int_a^\alpha y(x, \lambda)\, l[g(x)]\, dx -$$

$$- \lambda \int_a^\alpha y(x, \lambda)\, g(x)\, dx - \int_a^\alpha f(x)\, g(x)\, dx, \tag{63}$$

Утверждение 2° также легко следует из неравенства (61) или (62) для функции $u(x, \lambda)$.

Предложение 3. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют какому-нибудь одному из условий* 4 *или* 5, *и пусть решение* $y(x, \lambda)$ *уравнения* (6) *при каждом* $x \in (a, b)$ *является целой функцией параметра* λ. *Тогда для любого числа* $\alpha \in (a, b)$ *и для любой функции* $g \in L^2(a, \alpha)$ *интеграл*

$$\int_a^\alpha y(x, \lambda)\, g(x)\, dx$$

является целой функцией параметра λ. *Кроме того, при дополнительном условии* $l[g]\in L^2(a, \alpha)$ *выражение* $[y, g]_{a,\lambda}$ *также является целой функцией параметра* λ.

Доказательство. Из условия, наложенного на решение $y(x, \lambda)$, как нетрудно убедиться, следует, что квазипроизводные $y^{[\nu]}(x, \lambda)$ ($\nu = 0, 1, \cdots, 2n-1$) при каждом $x\in(a, b)$ являются целыми функциями параметра λ. Поэтому первое утверждение непосредственно следует из предложения 2. После этого второе утверждение легко следует из формулы (63).

§ 5. Основные следствия

Теорема 7. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют какому-нибудь одному из условий* 1, 2, 3. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Все решения уравнения* (6) *суммируемы с квадратом на каждом конечном интервале* $(a, \alpha]\subset(a, b)$.

2°. *Уравнение* (6) *имеет единственное решение* $y(x)$, *удовлетворяющее условиям*

$$y^{[\nu]}(a)=0.\quad \nu=0,1,\cdots, 2n-1. \tag{64}$$

3°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (6) *удовлетворяет условиям* (64), *то для любого решения* $z(x)$ *уравнения*

$$l[z]-\mu z=g;\quad g\in L^2(a, b) \tag{65}$$

имеет место соотношение

$$[y, z]_a=0. \tag{66}$$

4°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (6) *удовлетворяет соотношению* (66) *для всех решений* $z(x)$ *уравнения* (65), *то функция* $y(x)$ *удовлетворяет также условиям* (64).

Доказательство. Утверждения 1° и 2° доказаны выше. Утверждение 3° непосредственно следует из теорем 1, 3, 5. Докажем утверждение 4°. Пусть для определенности выполняется условие 1. Тогда согласно теореме 2, уравнение (65) имеет решения $z_k(x)$ ($k=0, 1,\cdots, 2n-1$), удовлетворяющие условиям

$$z_k^{[\nu]}(a)=\begin{cases}1 \text{ при } \nu=2n-1-k,\\ 0 \text{ при } 0\leqslant\nu<2n-1-k.\end{cases} \tag{67}$$

Согласно предположению, имеют место соотношения

$$[y, z_k]_a=0,\quad k=0,\ 1,\cdots, 2n-1. \tag{68}$$

Если учесть условия (67) при $k=0$, то в силу теоремы 1 получим $[y, z_0]_a=y(a)$ и, следовательно, $y(a)=0$. Далее применим метод индукции. Пусть при некотором k имеют место равенства $y^{[\nu]}(a)=0$ ($\nu=0,1,\cdots, k-1$). Тогда, учитывая условия (67), в силу теоремы 1 получим $[y, z_k]_a=y^{[k]}(a)$ при $k<n$ или $[y, z_k]_a=-y^{[k]}(a)$ при $k\geqslant n$. Отсюда, принимая во внимание соотношения (68), следует равенство $y^{[k]}(a)=0$, что и доказывает утверждение 4° при условии 1. При условиях 2 и 3 утверждение 4° доказывается аналогично.

Теорема 8. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют какому-нибудь одному из условий* 1, 2, 3, *и пусть* $z_k(x)$ $(k=0, 1, \cdots, 2n-1)$ — *некоторая фундаментальная система решений уравнения* $l[z]=0$. *Тогда для любого набора чисел* $\{c_0, c_1, \cdots, c_{2n-1}\}$ *уравнение* (6) *при любом* λ *имеет решение* $y(x, \lambda)$, *и притом только одно, удовлетворяющее условиям*

$$[y, z_k]_{a,\lambda} = c_k, \quad k = 0, 1, \cdots, 2n-1.$$

Решение $y(x, \lambda)$ *при каждом фиксированном* $x \in (a, b)$ *является целой функцией параметра* λ.

Доказательство. Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$u^{[\nu]}(x, \lambda) = \int_a^x \varphi_{\nu 0}(x, t) f(t)\, dt + \lambda \int_a^x \varphi_{\nu 0}(x, t)\, u(t, \lambda)\, dt -$$

$$-\sum_{k=0}^{n-1} \int_a^x \varphi_{\nu k}(x, t)\, p_k(t)\, u^{[k]}(t, \lambda)\, dt, \quad k=0, 1, \cdots, n-1.$$

Эта система уравнений, как нетрудно убедиться, разрешима и определяет решение $u(x, \lambda)$ уравнения (6), удовлетворяющее условиям $u^{[\nu]}(a, \lambda) = 0$ $(\nu=0, 1, \cdots, 2n-1)$. Кроме того, решение $u(x, \lambda)$ при каждом $x \in (a, b)$ является целой функцией параметра λ.

Обозначим через $y_j(x, \lambda)$ $(j = 0,1, \cdots, 2n-1)$ решения уравнения $l[y] = \lambda y$, удовлетворяющие в некоторой точке $x_0 \in (a, b)$ условиям

$$y_j^{[\nu]}(x_0, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } \nu = j \\ 0 & \text{при } \nu \neq j, \end{cases} \quad \nu, j = 0, 1, \cdots, 2n-1.$$

Решения $y_j(x, \lambda)$ линейно независимы и при каждом $x \in (a, b)$ являются целыми функциями параметра λ. Обозначим

$$\delta_{jk}(\lambda) = [y_j, z_k]_{a,\lambda}, \quad j, k = 0, 1, \cdots, 2n-1.$$

Покажем, что определитель

$$\Delta(\lambda) = \det \| \delta_{jk}(\lambda) \|_{j,k=0}^{2n-1}$$

не обращается в нуль ни при каком значении λ. Действительно, в противном случае существует ненулевая линейная комбинация $v(x)$ решений $y_j(x, \lambda)$, удовлетворяющая соотношению $[v, z]_a = 0$ для любого решения $z(x)$ уравнения $l[z] = 0$. Но тогда, в силу утверждения 4° теоремы 7, имеют место равенства $v^{[\nu]}(a) = 0$ $(\nu=0, 1, \cdots, 2n-1)$. Поэтому, согласно утверждению 2° теоремы 7 $v(x) \equiv 0$. Полученное противоречие доказывает неравенство $\Delta(\lambda) \neq 0$. Положим

$$w(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{2n-1} \gamma_j(\lambda)\, y_j(x, \lambda),$$

где числа $\gamma_j(\lambda)$ определяются из системы уравнений

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \gamma_j(\lambda)\, \delta_{jk}(\lambda) = c_k, \quad k = 0, 1, \cdots, 2n-1.$$

Согласно предложению 3 функции $\delta_{jk}(\lambda)$, а следовательно и решение $w(x, \lambda)$ уравнения $l[w]=\lambda w$, являются целыми функциями параметра λ. Положим $y(x, \lambda)=u(x, \lambda)+w(x, \lambda)$. Очевидно, что решение $y(x, \lambda)$ уравнения (6) удовлетворяет всем требованиям теоремы. Теорема доказана.

Введем множество Q целых чисел следующим образом:

1) при выполнении условия 1 $Q=\{0, 1, \cdots, n-1\}$;

2) при выполнении условия 2 $Q=\{0, 1, \cdots, n-2-\varkappa_0, n, n+1, \cdots$ $\cdots, n+\varkappa_0\}$, где $\varkappa_0$ есть целая часть числа $\dfrac{\varkappa-1}{2}$;

3) при выполнении условия 3 $Q=\{0, 1, \cdots, n-2-n_0, n, n+1, \cdots$ $\cdots, n+n_0\}$, где n_0 есть целая часть числа $\dfrac{n-1}{2}$ (при $n=1$ $Q=\{1\}$).

Очевидно, что во всех трех случаях множество Q содержит n элементов и, кроме того, если $\nu\in Q$, то $(2n-1-\nu)\overline{\in} Q$.

Теорема 9. *Пусть коэффициенты дифференциального выражения* (1) *удовлетворяют какому-нибудь одному из условий* 1, 2, 3. *Тогда справедливы следующие утверждения*:

1°. *Уравнение* $l[y]=\lambda y$ *имеет равно* n *линейно независимых решений, удовлетворяющих условиям* $y^{[\nu]}(a)=0$ *при всех* $\nu\in Q$.

2°. *Если решения* $y(x)$ *и* $z(x)$ *уравнений* (6) *и* (65) *удовлетворяют условиям* $y^{[\nu]}(a)=0$ *и* $z^{[\nu]}(a)=0$ *при всех* $\nu\in Q$, *то* $[y, z]_a=0$.

3°. *Если решение* $y(x)$ *уравнения* (6) *удовлетворяет соотношению* $[y, z]_a=0$ *для любого решения* $z(x)$ *уравнения* (65), *удовлетворяющего условиям* $z^{[\nu]}(a)=0$ *при всех* $\nu\in Q$, *то функция* $y(x)$ *удовлетворяет также условиям* $y^{[\nu]}(a)=0$ *при всех* $\nu\in Q$.

Доказательство непосредственно следует из теорем 1—6. При этом утверждение 3° доказывается таким же образом, как утверждение 4° теоремы 7.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.V.1981

Ի. Գ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ. Սովորական սինգուլյար դիֆերենցիալ հավասարման լուծումների ուսումնասիրությունը (*ամփոփում*)

Դիցուք l-ը 2n կարգի դիֆերենցիալ արտահայտություն է որոշված (a, b) $(-\infty<a<b\leqslant\infty)$ *միջակայքում հետևյալ բանաձևով.*

$$l(y]\equiv p_0y-\frac{d}{dx}\left[p_1\frac{dy}{dx}-\cdots-\frac{d}{dx}\left[p_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-\frac{d}{dx}\left[p_n\frac{d^ny}{dx^n}\right]\right]\cdots\right]:$$

$p_k(x)$ $(k=0,1,\cdots, n)$, *գործակիցների վրա դրվում են որոշ պայմաններ, որոնց դեպքում* (a, b) *միջակայքի ծայրակետերը ընդհանրապես սինգուլյար են* l *արտահայտության նկատմամբ։ Դիտարկվում է*

$$l[y]-\lambda y=f,\quad f\in L^2(a, b),$$

դիֆերենցիալ հավասարումը և ուսումնասիրվում է լուծումների վարքը, երբ $x\to a$*։ Պարզաբանվում են լուծումների մի շարք հատկություններ, ինչպես նաև ապացուցվում է* $x=a$ *կետում որոշ պայմանների բավարարող լուծման գոյությունը և միակությունը։*

I. G. KHACHATRIAN. *Investigation of solutions of an ordinary singular differential equation* (summary)

Let l be the differential expression of order $2n$ given on the interval (a, b) $(-\infty < a < b < \infty)$ by the formula

$$l[y] \equiv p_0 y - \frac{d}{dx}\left[p_1 \frac{dy}{dx} - \cdots - \frac{d}{dx}\left[p_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} - \frac{d}{dx}\left[p_n \frac{d^n y}{dx^n}\right]\right] \cdots\right].$$

It is assumed that the coefficients $p_k(x)$ $(k = 0, 1, \cdots, n)$ satisfy some restrictions under which both end points of the interval (a, b) are in general singular with respect to l. We consider the differential equation

$$l[y] - \lambda y = f, \quad f \in L^2(a, b),$$

Its solutions are investigated when $x \to a$. The existence and uniqueness of the solution under some natural conditions at $x = a$ is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. А. Наймарк.* Линейные дифференциальные операторы, М., «Наука», 1969.