ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

А. С. ЗИЛЬБЕРГЛЕЙТ, Ю. И. КОПИЛЕВИЧ

О СПЕКТРЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

1°. В гильбертовом пространстве H над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ рассмотрим полиномиальный операторный пучок степени n [1, 2]

$$L(\lambda) = I - \sum_{j=1}^{n} \lambda^j A_j, \tag{1.1}$$

где I — единичный оператор, $A_j \in R(H)$, $j=1, 2, \cdots, n$ — ограниченные операторы в H, λ — произвольное комплексное число. Число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется характеристическим числом пучка $L(\lambda)$, если задача

$$L(\lambda_0)\, u = 0$$

нетривиально разрешима в H. Одним из основных результатов теории операторных пучков является тот факт, что если все операторы A_j вполне непрерывны, $A_j \in \sigma_\infty(H)$, $j=1, 2, \cdots, n$, то спектр пучка $L(\lambda)$ состоит из нормальных характеристических чисел* [2]. Цель настоящей работы заключается в установлении более слабых требований к операторам A_j, сохраняющих приведенный результат. Именно, справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. *Пусть для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant n$, существует натуральное m такое, что $A_k^m \in \sigma_\infty$, и, кроме того $A_j \in \sigma_\infty$ для $j \neq k$. Тогда множество характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ (1.1) состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности**.

Этот результат в известном смысле точен: если хотя бы два из входящих в (1.1) операторов A_j не вполне непрерывны, но имеют вполне непрерывные итерации, то спектр пучка может „испортиться“. В самом деле, рассмотрим следующий пример. Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортобазис в H. Зададим квадратичный пучок (1.1), $n=2$, с операторами A_1 и A_2, действующими по правилам

$$A_1 \varphi_{2k} = a_k \varphi_{2k-1}, \quad A_1 \varphi_{2k-1} = 0,$$
$$A_2 \varphi_{2k} = 0, \quad A_2 \varphi_{2k-1} = b_k \varphi_{2k},$$
$$a_k,\ b_k \neq 0; \quad k = 1, 2, \cdots,$$

где $\{a_k\}$ и $\{b_k\}$ — произвольные комплексные числовые последовательности, не стремящиеся к нулю при $k \to \infty$. Ясно, что $A_1, A_2 \bar{\in} \sigma_\infty$, но $A_1^2 = A_2^2 = 0 \in \sigma_\infty$; укажем, что $A_1 A_2 \neq A_2 A_1$. Остается заметить, что

* В спектр пучка может входить, кроме того, точка $\lambda = \infty$, не являющаяся характеристическим числом (см. далее п. 2°).

рассматриваемый пучок имеет последовательность характеристических чисел $\lambda_k = (a_k b_k)^{-1/3}$, которым соответствуют собственные векторы $u_k = \varphi_{2k} + \lambda_k a_k \varphi_{2k-1}$. Выбирая $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ так, что $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k b_k) = \mu^{-3}$, $\mu \in \mathbf{C}$, получаем, что μ — точка сгущения спектра пучка; полагая же $a_k = b_k = 1$, $k = 1, 2, \cdots$, видим, что $\lambda = 1$ — характеристическое число бесконечной кратности.

Имеет место, однако

Теорема 2. *Пусть операторы A_j, $j = 1, 2, \cdots, n$, попарно коммутируют и имеют вполне непрерывные итерации, то есть найдутся натуральные m_j такие, что $A_j^{m_j} \in \sigma_\infty$, $j = 1, 2, \cdots, n$. Тогда множество характеристических чисел пучка $L(\lambda)$ (1.1) состоит из изолированных точек конечной алгебраической кратности*.*

Доказательства теорем 1 и 2 приведены в пп. 4° и 5° соответственно; пп. 2° и 3° содержат необходимые предварительные результаты.

Отметим, что квадратичные операторные пучки с непрерывным спектром изучались в работе [3].

2°. Как известно [1, 2] пучку (1.1) может быть сопоставлен ассоциированный оператор S, действующий в прямой сумме $H^n = \sum\limits_{l=1}^{n}{}^{+} H$ n копий пространства H с элементами $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$, $u_j \in H$, $j = 1, 2, \cdots, n$, которые можно рассматривать как векторы размерности n. Оператор S задается матрицей [4] вида

$$S = \begin{array}{c} \begin{matrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{n-1} & A_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{2.1}$$

причем всякому его собственному числу μ отвечает характеристическое число $\lambda = \mu^{-1}$ пучка $L(\lambda)$, и обратно.

Очевидно, что $S \in R(H^n)$ при $A_j \in R(H)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, но, независимо от свойств операторов A_j, $S \notin \sigma_\infty(H^n)$. Далее мы покажем, однако, что в условиях сформулированных теорем некоторая итерация S^r оператора S оказывается вполне непрерывным оператором в H^n, и, следовательно, весь ненулевой спектр S^r состоит из нормальных собственных чисел. Тогда и ненулевой спектр оператора S состоит из нормальных собственных чисел (см. [2], стр. 327), и, значит, имеют место доказываемые утверждения.

3°. Разобьем оператор S на два слагаемых

$$S = S_k + S_k' \tag{3.1}$$

где

$$S_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & A_k & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

$$S'_k = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \cdots A_{k-1} & 0 & A_k \cdots A_n \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Отнесем $n \times n$ -- матрицы M, N, P вида

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} \cdots M_{1k} & 0 \\ \vdots \qquad \vdots & \\ M_{k1} \cdots M_{kk} & \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ & N_{k+1\,k+1} \cdots N_{k+1\,n} \\ & \vdots \qquad \vdots \\ 0 & N_{n\,k+1} \cdots N_{nn} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P_{k+1\,1} \cdots P_{k+1\,k} & \\ \vdots \qquad \vdots & \\ P_{n1} \cdots P_{nk} & \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

к классам $\mathbf{M}_k$, $\mathbf{n}_k$, $\mathbf{P}_k$, соответственно. Следующие утверждения могут быть проверены непосредственно.

Лемма 1. *Пусть* $M, \tilde{M} \in \mathbf{M}_k$, $N, \tilde{N} \in \mathbf{n}_k$, $P, \tilde{P} \in \mathbf{P}_k$. *Тогда* $M\tilde{M} \in \mathbf{M}_k$, $N\tilde{N} \in \mathbf{n}_k$, $P\tilde{P} = 0$.

Лемма 2. *Пусть* $M \in \mathbf{M}_k$, $N \in \mathbf{n}_k$, $P \in \mathbf{P}_k$. *Тогда* $MN = NM = 0$, $MP = PN = 0$; $PM \in \mathbf{P}_k$, $NP \in \mathbf{P}_k$.

Заметим теперь, что матрицу (3.2) можно представить следующим образом:

$$S_k = M_k + N_k + P_k, \tag{3.4}$$

причем $M_k \in \mathbf{M}_k$, $N_k \in \mathbf{n}_k$, $P_k \in \mathbf{P}_k$:

$$M_k = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 \cdots 0 & A_k \\ I & 0 \cdots 0 & 0 \\ 0 & I \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots I & 0 \end{matrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ I & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots I & 0 \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$P_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \begin{matrix} 0 & 0 \cdots 0 & I \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots 0 & 0 \end{matrix} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно установить равенства

$$M_k^k = \begin{pmatrix} A_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_k & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & A_k & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix} \equiv \operatorname{diag}\{A_k, \cdots, A_k\}, \tag{35}$$

$$N_k^{n-k} = 0, \quad 1 \leqslant k < n, \quad N_n = 0. \tag{3.6}$$

Из представления (3.4) и лемм 1 и 2 вытекает

Лемма 3. *Для любого натурального p*

$$S_k^p = M_k^p + N_k^p + \sum_{\alpha=0}^{p-1} N_k^\alpha P_k M_k^{p-\alpha-1}.$$

Отсюда с учетом (3.6) следует

Лемма 4. *Для всякого натурального $p > n - k$*

$$S_k^p = M_k^p + \sum_{\beta=p-n+k}^{p-1} N^{p-\beta-1} P_k M_k^\beta. \tag{3.7}$$

Наконец, справедлива

Лемма 5. *Пусть для некоторого натурального m оператор A_k^m вполне непрерывен, $A_k^m \in \sigma_\infty(H)$. Тогда $S_k^{mk+n-k} \in \sigma_\infty(H^n)$.*

Доказательство. В силу (3.5) и условия леммы $M_k^{mk} = \operatorname{diag}\{A_k^m, \cdots, A_k^m\}$ вполне непрерывен. Следовательно, $M_k^\beta \in \sigma_\infty(H^n)$ для $\beta \geqslant mk$. Положим теперь в (3.7) $p = mk + n - k$, тогда в каждое слагаемое правой части (3.7) входит вполне непрерывный множитель M_k^β, $\beta \geqslant mk$. Лемма 5 доказана.

4°. Доказательство теоремы 1. По условию оператор S_k' (3.3) вполне непрерывен. Поэтому, возводя равенство (3.1) в степень $mk + n - k$, получаем

$$S^{mk+n-k} = S_k^{mk+n-k} + T,$$

где $T \in \sigma_\infty(H^n)$. Далее, условие леммы 5 выполняется, следовательно, $S_k^{mk+n-k} \in \sigma_\infty(H^n)$, а, значит, и оператор S^{mk+n-k} вполне непрерывен в H^n. Как было указано в п. 2°, отсюда следует утверждение теоремы 1.

5°. Доказательство теоремы 2. Представим ассоциированный с пучком (1.1) оператор S в виде

$$S = J + A, \tag{5.1}$$

где

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I & 0 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

Заметим, что

$$J^p = \begin{array}{c} p\{ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ I & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ 0 & I & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & I & \end{pmatrix}, \quad 1 \leqslant p < n, \tag{5.3}$$

$$J^p = 0, \quad p \geqslant n. \tag{5.4}$$

Кроме того

$$A^q = \begin{pmatrix} A_1^q & A_1^{q-1} A_2 \cdots A_1^{q-1} A_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

и из (5.3), (5.5) имеем

$$A^q J^p = \begin{pmatrix} A_1^{q-1} A_{p+1} & A_1^{q-1} A_{p+2} \cdots A_1^{q-1} A_n & \overbrace{0 \cdots 0}^{p} \\ 0 & 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 & 0 \quad \cdots \quad 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Возводя (5.1) в некоторую натуральную степень r, получаем, что S^r есть сумма однородных одночленов степени r вида

$$\prod_{i=1}^{s} A^{q_i} J^{p_i}, \tag{5.7}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{s} (q_i + p_i) = r; \; 0 \leqslant q_1, \, p_s \leqslant r, \; 1 \leqslant q_{i+1}, \; p_i \leqslant r-1, \; i=1, 2, \cdots, s-1. \tag{5.8}$$

В силу (5.4) можно считать $p_i \leqslant n-1$, $i=1, \cdots, s$, и поэтому

$$\sum_{i=1}^{s} q_i \geqslant r - s(n-1). \tag{5.9}$$

Ясно, что все одночлены (5.7) для которых хотя бы одно из чисел q_i, $i=1, 2, \cdots, s$, больше m_1 (см. условие теоремы 2), являются, ввиду (5.5), вполне непрерывными операторами. Поэтому далее рассматриваем лишь одночлены, в которых $q_i < m_1 + 1$, $i=1, 2, \cdots, s$. Для таких одночленов

$$r = \sum_{i=1}^{s} (q_i + p_i) < \sum_{i=1}^{s} (n + m_1),$$

то есть

$$s > \frac{r}{n + m_1}. \tag{5.10}$$

Из (5.9) и (5.10) получаем оценку снизу для суммы показателей q_i:

$$\sum_{i=1}^{s} q_i \geqslant r\left(1 - \frac{n-1}{n + m_1}\right).$$

Заметим теперь, что всякий одночлен (5.7) представляет собой, согласно (5.6), матрицу-строку, каждый ненулевой элемент которой, вследствие коммутативности операторов A_j, $j=1, 2, \cdots, n$, имеет вид

$$A_1^{\alpha_1} A_2^{\alpha_2} \cdots A_n^{\alpha_n},$$

причем $\alpha_j \geqslant 0$ и

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = \sum_{i=1}^{s} q_i > r\left(1 - \frac{n-1}{n+m_1}\right).$$

Поэтому для достаточно больших r среди чисел α_j, $j=1, 2, \cdots, n$, заведомо найдется такое, которое превосходит соответствующее m_j. Именно, достаточно, чтобы

$$r \geqslant n \frac{m_1 + n}{m_1 + 1} \cdot \max_{1 \leqslant j \leqslant n} m_j.$$

При этом все одночлены (5.7) оказываются вполне непрерывными, и, значит, $S' \in \sigma_\infty(H^n)$. Теорема 2 доказана.

Физико-технический институт
им. А. Ф. Иоффе АН СССР,
Государственный оптический
институт им. С. И. Вавилова

Поступила 20.II.1980

Ա. Ս. ԶԻԼԲԵՐԳԼԵՅՏ, Յու. Ի. ԿՈՊԻԼԵՎԻՉ. Բազմանդամային օպերատորային փնջի մասին *(ամփոփում)*

Հայտնի է, որ եթե բազմանդամային փունջ կազմող օպերատորները լիովին անընդհատ են, ապա նրա սպեկտրը կազմված է նորմալ խարակտերիստիկ թվերից։ Աշխատանքում ցույց է տրվում, որ այդ արդյունքը տեղի ունի ավելի թույլ պայմանների դեպքում. ա) եթե A_j փնջի օպերատորներից մեկը լիովին անընդհատ չէ, սակայն ունի A_j^m լիովին անընդհատ իտերացիա, բ) եթե նշված պայմանին բավարարում են բոլոր օպերատորները և նրանք զույգ առ զույգ տեղափոխելի են։ Բերվում է օրինակ, որը ցույց է տալիս, որ ա) պայմանը որոշ իմաստով ճշգրիտ է։

A. S. SILBERGLEIT, Yu. I. KOPILEVICH. *On the spectrum of polynomial operator pencil* (summary)

The spectrum of polynomial pencil $L(\lambda) = 1 - \sum_{j=1}^{n} \lambda^j A_j$ is known to consist of normal eigenvalues when it's operators are compact. The validity of this result is demonstrated under two sets of weaker conditions, namely a) when one of the operators of the pencil, A_j is not compact but has a compact iteration A_j^m and b) when the previous condition is satisfied by all the operators A_j, $j=1, \cdots, n$ and $A_j A_k = A_k A_j$. An example is presented which proves the condition a) to be in some sence exact.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. В. Келдыш.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР, 77, №1, 1951.
2. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, М., «Наука», 1965.
3. *Г. В. Вирабян.* О квадратичных операторных пучках с непрерывным спектром, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 6, 1977.
4. *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь.* Лекции по функциональному анализу, М., «Мир», 1979.