

В. М. МАРТИРОСЯН

О ЗАМЫКАНИИ, МИНИМАЛЬНОСТИ И БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА НА СИСТЕМЕ ЛУЧЕЙ

В в е д е н и е

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов полноты, описания замыкания, минимальности и базисности определенных систем функций, порожденных целой функцией типа Миттаг-Леффлера $E_p(z; \mu)$, где

$$E_p(z; \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma\left(\mu + \frac{n}{p}\right)} \quad (p > 0, -\infty < \mu < +\infty).$$

При этом рассмотрения ведутся в пространствах $L_{2, \omega}(\Gamma) \equiv L_2(\Gamma; |\zeta|^\omega d\zeta)$ ($-1 < \omega < 1$) функций, определенных на конечной системе лучей Γ , исходящих из начала координат.

Приведем краткий обзор связанных с данным исследованием работ.

1° (а). Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re} \lambda_k > 0$) — произвольная последовательность комплексных чисел (среди которых могут быть и повторяющиеся) из правой полуплоскости. Следуя М. М. Джрбашяну [1], обозначим s_k кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$. Теорема Мюнца-Саса о полноте системы экспонент в наиболее общем виде может быть сформулирована следующим образом [1—3].

Теорема. Для полноты в $L_2(0, +\infty)$ системы функций $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$ необходимо и достаточно условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k}{1 + |\lambda_k|^2} = +\infty.$$

М. М. Джрбашяном было получено существенное обобщение этого результата; им был установлен критерий полноты систем функций, порожденных целой функцией типа Миттаг-Леффлера $E_p(z; \mu)$ [3]. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем обозначения.

Обозначим через $L_{2, \omega}(0, +\infty)$ ($-1 < \omega < 1$) гильбертово пространство измеримых на $(0, +\infty)$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2, \omega}(0, +\infty)} = \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 x^\omega dx \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Пусть, далее, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ($|\arg \lambda_k| < \pi/(2\alpha)$, $1/2 < \alpha < +\infty$) — последовательность комплексных чисел, а $s_k > 1$ — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$. С этой последовательностью можно ассоциировать систему функций $\{\omega_p^*(x; \lambda_k)\}_1^\infty$ из $L_{2,\infty}(0, +\infty)$, положив

$$\omega_p^*(x; \lambda_k) = E_p^{(s_k-1)}(-\lambda_k x; \mu) x^{s_k-1} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

$$\rho = \frac{\alpha}{2\alpha-1}, \quad \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Теорема (М. М. Джрбашян). Для полноты в $L_{2,\infty}(0, +\infty)$ системы функций $\{\omega_p^*(x; \lambda_k)\}_1^\infty$ необходимо и достаточно условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_k^\alpha}{1+|\lambda_k|^{2\alpha}} = +\infty^*.$$

Если учесть, что $E_1(z; 1) = \exp(z)$, то при $\omega=0$, $\alpha=1$ ($\rho=\mu=1$), эта теорема переходит в теорему Мюнца-Саса в обобщенной формулировке.

(6) В связи с теоремой Мюнца-Саса в работе Л. Шварца [4] были выявлены характеристические свойства функций, принадлежащих замыканию системы $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty$ в метриках $L_p(0, +\infty)$, $p \geq 1$, или $C[0, +\infty]$, в предположении, что λ_k вещественны, $\uparrow +\infty$ и ряд $\sum 1/\lambda_k$ сходится. Но следует отметить, что эти свойства не дают собственно внутренней характеристики замыкания системы $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty$ в случае ее неполноты.

Впервые в работе М. М. Джрбашяна [1] (см. также [2]) было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^\infty$ ($\operatorname{Re} \lambda_k > 0$) в случае ее неполноты в $L_2(0, +\infty)$; этот результат содержит в себе, в частности, результат работы [4] в принципиально важном случае $p=2$.

В работе С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [5] было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{\omega_p^*(x; \lambda_k)\}_1^\infty$ в случае ее неполноты в $L_{2,\infty}(0, +\infty)$.

(в) Другие обобщения сформулированных выше теорем Мюнца-Саса и М. М. Джрбашяна были получены в работах [6–10]. В них были рассмотрены вопросы замыкания и базисности систем функций вида $\{e^{-\lambda_k x} z^{s_k-1}\}$ и $\{E_p^{(s_k-1)}(-\lambda_k z; \mu) z^{s_k-1}\}_1^\infty$ в различных пространствах функций, определенных на системе двух лучей, исходящих из точки $z=0$.

В работе [11] был установлен критерий полноты на конечной системе лучей систем функций типа Миттаг-Леффлера. Чтобы сформулировать этот результат введем обозначения.

Пусть $N \geq 2$ — целое и $L_{2,\infty}(\Gamma)$ ($-1 < \omega < 1$) — пространство функций f , измеримых на системе лучей Γ , где

$$\Gamma = \bigcup_{n=1}^N \{\zeta: \operatorname{Arg} \zeta = \vartheta_n\}, \quad 0 \leq \vartheta_1 < \dots < \vartheta_N < 2\pi$$

* Всюду в этой работе под z^α подразумевается та ветвь этой функции, которая на полуоси $(0, +\infty)$ принимает положительные значения.

и имеющих конечную норму

$$\|f\|_{2,\infty} = \left(\int_{\Gamma} |f(\zeta)|^2 |\zeta|^\infty |d\zeta| \right)^{1/2} < +\infty.$$

Пусть, далее

$$\max_{1 \leq n \leq N} \left\{ \frac{\pi}{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n} \right\} < \rho \quad (\vartheta_{N+1} = \vartheta_1 + 2\pi),$$

и при фиксированном n ($1 \leq n \leq N$) $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел из угловой области $\vartheta_n + \pi/(2\rho) < \operatorname{Arg} \lambda < \vartheta_{n+1} - \pi/(2\rho)$, а $s_k^{(n)}$ — кратность появления числа $\lambda_k^{(n)}$ на отрезке $\{\lambda_j^{(n)}\}_{j=1}^k$. Полагая $\mu = (1 + \omega + \rho)/(2\rho)$, рассмотрим систему функций

$$E_{\rho}^{(s_k^{(n)}-1)}(\overline{\lambda_k^{(n)}}; \mu) z^{s_k^{(n)}-1} \quad (k=1, 2, \dots; 1 \leq n \leq N). \quad (1)$$

Теорема (А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, И. О. Хачатрян). Для полноты в $L_{2,\infty}(\Gamma)$ системы функций (1) необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k^{(n)}|^{2\rho_n})^{-1} \operatorname{Re} [e^{i\gamma_n} \overline{\lambda_k^{(n)}}]^{\rho_n} = +\infty,$$

$$\gamma_n = \frac{1}{2} (\vartheta_n + \vartheta_{n+1}), \quad \pi/\rho_n = \vartheta_{n+1} - \vartheta_n - \pi/\rho \quad (1 \leq n \leq N).$$

Следует отметить, что при доказательстве этой теоремы авторы пользуются классическим методом сведения задачи полноты к теореме единственности в определенном классе голоморфных функций, что, в свою очередь, сводит задачу к обращению интегрального преобразования М. М. Джрбашяна на системе лучей.

2°. В данной работе рассматриваются более общие чем (1) системы. Эти системы определяются следующим образом.

Пусть

$$\rho_n > \frac{\pi}{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n} \quad (1 \leq n \leq N)$$

и $\{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^\infty$ — последовательность комплексных чисел из угловой области $\vartheta_n + \pi/(2\rho_n) < \operatorname{Arg} \lambda < \vartheta_{n+1} - \pi/(2\rho_n)$, а $s_k^{(n)}$ — кратность появления числа $\lambda_k^{(n)}$ на отрезке $\{\lambda_j^{(n)}\}_{j=1}^k$. Полагая $\mu_n = (1 + \omega + \rho_n)/(2\rho_n)$, рассмотрим систему функций

$$E_{\rho_n}^{(s_k^{(n)}-1)}(\overline{\lambda_k^{(n)}}; \mu_n) z^{s_k^{(n)}-1} \quad (k=1, 2, \dots; 1 \leq n \leq N). \quad (2)$$

Для этой системы устанавливаются критерии полноты, минимальности и базисности (в ее замыкании) в метрике $L_{2,\infty}(\Gamma)$. В случае неполноты такой системы дается полное внутреннее описание ее замыкания, а в случае минимальности строится биортогональная с ней система функций.

При установлении этих результатов мы основываемся на том, что $L_{2,\infty}(\Gamma)$ представимо в виде прямой суммы пространств $H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$ ($1 \leq n \leq N$) функций F , голоморфных в угловой области

$$\Delta_n^* = \{z: \vartheta_{n+1} < \text{Arg } z < \vartheta_n + 2\pi, 0 < |z| < +\infty\}$$

и имеющих конечную норму

$$\|F\|_{H_2^{(w)}[\Delta_n^*]}^2 = \sup_{\vartheta_{n+1} < \varphi < \vartheta_n + 2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^w dr \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Пользуясь этим фактом, мы сводим задачи замыкания, минимальности и базисности системы (2) в метрике $L_{2,\infty}(\Gamma)$ к соответствующим известным результатам [10] для системы

$$E_{\rho_n}^{(s_k^{(n)}-1)}(\overline{(j_k^{(n)})} z; \mu_n) z^{s_k^{(n)}-1} \quad (k=1, 2, \dots)$$

в метрике $H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$.

Введем следующие обозначения:

(а) Пусть $N \geq 2$ — целое и

$$0 \leq \vartheta_1 < \dots < \vartheta_N < 2\pi, \vartheta_{N+1} = \vartheta_1 + 2\pi.$$

Для значений $n=1, \dots, N$ обозначим через

$$\Delta_n = \{z: \vartheta_n < \text{Arg } z < \vartheta_{n+1}, 0 < |z| < +\infty\},$$

$$\Delta_n^* = \{z: \vartheta_{n+1} < \text{Arg } z < \vartheta_n + 2\pi, 0 < |z| < +\infty\}$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Пусть параметры ρ_n определяются из условий

$$\rho_n > \frac{\pi}{\vartheta_{n+1} - \vartheta_n} \quad (n=1, \dots, N).$$

Обозначим через $\Delta(\rho_n)$ угловую область

$$\Delta(\rho_n) = \left\{ z: \vartheta_n + \frac{\pi}{2\rho_n} < \text{Arg } z < \vartheta_{n+1} - \frac{\pi}{2\rho_n}, 0 < |z| < +\infty \right\}$$

и положим

$$\eta_n = \frac{\vartheta_n + \vartheta_{n+1}}{2}, \frac{\pi}{\beta_n} = \vartheta_{n+1} - \vartheta_n - \frac{\pi}{\rho_n} \quad (n=1, \dots, N).$$

Очевидно, что π/β_n — это раствор угловой области $\Delta(\rho_n)$. Ясно также, что $\Delta(\rho_n)$ является подобластью области Δ_n и луч $\{re^{i\eta_n}: r > 0\}$ является общей биссектрисой этих угловых областей.

Обозначим также через

$$\tilde{\Delta}(\rho_n) = \left\{ z: -\vartheta_{n+1} + \frac{\pi}{2\rho_n} < \text{Arg } z < -\vartheta_n - \frac{\pi}{2\rho_n}, 0 < |z| < +\infty \right\},$$

$$\tilde{\Delta}^*(\varrho_n) = \left\{ z: -\vartheta_n - \frac{\pi}{2\varrho_n} < \operatorname{Arg} z < -\vartheta_{n+1} + \frac{\pi}{2\varrho_n} + 2\pi, 0 < |z| < +\infty \right\},$$

взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Очевидно, что $\Delta(\varrho_n)$ и $\tilde{\Delta}(\varrho_n)$ симметричны относительно вещественной оси. Через $\partial\tilde{\Delta}^*(\varrho_n)$ обозначим границу $\tilde{\Delta}^*(\varrho_n)$, пробегаемую в положительном относительно этой области направлении.

Далее, обозначим через $\Gamma = \bigcup_{n=1}^N \Gamma_{\varrho_n}$ систему N лучей Γ_{ϱ_n} ($n = 1, \dots, N$), исходящих из точки $\zeta = 0$, где

$$\Gamma_{\varrho_n} = \{\zeta: \operatorname{Arg} \zeta = \vartheta_n, 0 \leq |\zeta| < +\infty\}.$$

Эта система лучей Γ разбивает плоскость $\mathbb{C}$ на непересекающиеся угловые области Δ_n ($n=1, \dots, N$) и является границей их объединения.

(6) Для дальнейшего изложения нам необходимо также определить некоторые классы функций.

Полагая, что $-1 < \omega < 1$, обозначим через $L_{2,\omega}(\Gamma)$ гильбертово пространство измеримых на Γ функций f с конечной нормой

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{2,\omega}(\Gamma)} &= \left\{ \int_{\Gamma} |f(\zeta)|^2 |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \sum_{n=1}^N \int_0^{+\infty} |f(re^{i\vartheta_n})|^2 r^\omega dr \right\}^{1/2} < +\infty. \end{aligned}$$

Пусть далее

$$\Delta = \{z: \chi < \operatorname{Arg} z < \alpha, 0 < |z| < +\infty\}, 0 < \alpha - \chi < 2\pi$$

— произвольная угловая область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $H_2^{(\omega)}[\Delta]$ класс функций F , голоморфных в Δ и таких, что

$$\|F\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta]} = \sup_{\chi < \varphi < \alpha} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\}^{1/2} < +\infty. \quad (3)$$

Такие классы функций, голоморфных в угловых областях, впервые были введены и исследованы М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [12] (см. также [13], гл. VII). Они являются естественными обобщениями на произвольные угловые области известного класса H_2 в полуплоскости (см., напр., [14]), и для них имеют место аналоги ряда важных свойств класса H_2 . В частности, справедлива следующая теорема (см. [13], теорему 7.5).

Теорема А. Если $F \in H_2^{(\omega)}[\Delta]$, то

1. Почти всюду на границе $\partial\Delta$ области Δ существуют угловые граничные значения $F(\zeta)$ функции F , причем

$$\|F\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta]} = \left\{ \int_{\partial\Delta} |F(\zeta)|^2 |\zeta|^\omega |d\zeta| \right\}^{1/2} < +\infty \quad (4)$$

и справедливы равенства

$$\lim_{\varphi \rightarrow \chi + 0} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\chi}) - F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr = 0,$$

$$\lim_{\varphi \rightarrow \chi - 0} \int_0^{+\infty} |F(re^{i\chi}) - F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr = 0;$$

2°. Имеет место интегральная формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} F(z), & \text{при } z \in \Delta, \\ 0, & \text{при } z \in \mathbb{C} \setminus \bar{\Delta}, \end{cases}$$

где направление на $\partial\Delta$ совпадает с направлением положительного обхода области Δ .

В силу утверждения 1° этой теоремы в $H_2^{(\omega)}[\Delta]$ можно ввести скалярное произведение

$$(F, G) = \int_{\partial\Delta} F(\zeta) \overline{G(\zeta)} |\zeta|^\omega |d\zeta|; \quad F, G \in H_2^{(\omega)}[\Delta]. \quad (5)$$

При этом $H_2^{(\omega)}[\Delta]$ со скалярным произведением (5) является гильбертовым пространством и

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \|F\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta]} \leq \|F\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta]}^* \leq \|F\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta]} \quad (6)$$

(см. [15], теорему 2).

(в) Между пространством $L_{2,\omega}(\Gamma)$ и пространствами $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ ($n = 1, \dots, N$) имеется прямая связь.

Во-первых, каждую функцию $F_n \in H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ можно рассматривать как элемент пространства $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Действительно, в силу теоремы А функция F_n однозначно определяется своими граничными значениями $F_n(\zeta)$, $\zeta \in \partial\Delta_n^*$; и поскольку $\partial\Delta_n^* \subset \Gamma$, то F_n полностью определяется заданием ее значений на Γ . А из неравенств (3) и (4) следует, что $F_n \in L_{2,\omega}(\Gamma)$, причем в силу (6) имеем

$$\|F_n\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]} \leq \|F_n\|_{2,\omega} \leq N \|F_n\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]}. \quad (6')$$

При этом заметим, что мы можем рассматривать сужение F_n на Γ , так как $\Gamma \subset \Delta_n^* \cup \partial\Delta_n^*$.

С другой стороны, если рассмотреть функцию

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^N F_n(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma,$$

где $F_n \in H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$, то $f \in L_{2,\omega}(\Gamma)$. Оказывается, что это представление характерно для пространства $L_{2,\omega}(\Gamma)$. Именно, имеет место

Теорема В. Каждая функция $f \in L_{2,\omega}(\Gamma)$ единственным образом представима в виде

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^N F_n(\zeta), \quad \zeta \in \Gamma,$$

где $F_n \in H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$. При этом

$$A_n \max_{1 \leq n \leq N} \|F_n\|_{H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]} \leq \|f\|_{\infty} \leq B_n \max_{1 \leq n \leq N} \|F_n\|_{H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]}, \quad (7)$$

где $A_n > 0$, $B_n > 0$ — константы, не зависящие от f . (см. [16], теорему 1).

Замечание. В этой теореме на $\partial\Delta_n^*$ мы рассматриваем угловые граничные значения функции $F_n \in H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$. Это замечание относится также к утверждениям 3' теорем 1 и 2.

(г) Для удобства читателя мы здесь напомним также известные (см., напр., [17]) определения базисных и минимальных систем.

Система $\{h_k\}_1^\infty$ элементов гильбертова пространства H называется его базисом, если каждый элемент $h \in H$ единственным образом разлагается в сходящийся по метрике H ряд

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(h) h_k,$$

где $c_k(h)$ — комплексные коэффициенты. Базис $\{h_k\}_1^\infty$ называется базисом Рисса H , если выполняются неравенства

$$\alpha \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(h)|^2 \leq \|h\|^2 \leq A \sum_{k=1}^{\infty} |c_k(h)|^2, \quad \forall h \in H,$$

где $\alpha > 0$ и $A > 0$ — не зависящие от h константы. Нетрудно проверить, что система $\{h_k\}_1^\infty$ будет базисом Рисса пространства H в том и только в том случае, когда существует ограниченный обратимый линейный оператор $A: H \rightarrow H$ и такой, что $\{Ah_k\}_1^\infty$ является ортонормальным базисом H .

Далее, система $\{h_k\}_1^\infty$ называется минимальной в H , если ни один ее член нельзя приблизить линейными комбинациями остальных. Минимальность системы $\{h_k\}_1^\infty$ необходима и достаточна для существования биортогональной с ней системы, т. е. такой системы $\{h_k^*\}_1^\infty \subset H$, что

$$(h_k, h_m^*) = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m, \end{cases} \quad (k, m = 1, 2, \dots).$$

Напомним также, что если $\{h_k\}_1^\infty$ — базис H , то $\{h_k\}_1^\infty$ — минимальная система.

Формулировки результатов

1. Пусть для данного n ($1 \leq n \leq N$) $\Lambda_n = [\lambda_k^{(n)}]_{k=1}^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta(p_n)$, среди которых могут быть числа произвольной конечной или даже бесконечной кратности.

Для произвольного целого $j > 1$ обозначим через $s_j^{(n)}$ кратность появления числа $\lambda_j^{(n)}$ на отрезке $[\lambda_k^{(n)}]_{k=1}^j$, а через $p_j^{(n)}$ — кратность появления числа $\lambda_j^{(n)}$ во всей последовательности $\Lambda_n \equiv \{\lambda_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$.

Очевидно, что

$$1 \leq s_j^{(n)} \leq p_j^{(n)} \leq +\infty \quad (j=1, 2, \dots).$$

Легко видеть также, что если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k^{(n)}|^{2p_n})^{-1} \operatorname{Re} [e^{i\gamma_n} \overline{\lambda_k^{(n)}}]^{\beta_n}, \quad (8)$$

то число $p_k^{(n)}$ конечно при любом $k \geq 1$.

Введем в рассмотрение систему функций типа Миттаг-Леффлера $E \equiv \{E_k^{(n)}(\zeta); k \geq 1, 1 \leq n \leq N\}$, положив

$$E_k^{(n)}(\zeta) = E_{p_n}^{(s_k^{(n)}-1)}(\overline{\lambda_k^{(n)}}\zeta; p_n) \zeta^{s_k^{(n)}-1} \quad (k \geq 1; 1 \leq n \leq N). \quad (9)$$

Из асимптотических свойств целой функции типа Миттаг-Леффлера (см. [13], лемму 3.4) следует, что функции системы (9) принадлежат пространству $L_{2,\infty}(\Gamma)$, т. е. $E \subset L_{2,\infty}(\Gamma)$.

Обозначим через $V_{2,\infty}(E)$ замыкание (т. е. замкнутую линейную оболочку) системы (9) в метрике $L_{2,\infty}(\Gamma)$. Очевидно, что $V_{2,\infty}(E)$ является замкнутым подпространством пространства $L_{2,\infty}(\Gamma)$, и полнота системы (9) в $L_{2,\infty}(\Gamma)$ означает равенство $V_{2,\infty}(E) = L_{2,\infty}(\Gamma)$.

2 (а). В этой работе мы устанавливаем следующий критерий полноты в $L_{2,\infty}(\Gamma)$ системы (9).

Теорема 1. Следующие утверждения эквивалентны

1°. Система E полна в $L_{2,\infty}(\Gamma)$;

2°. Одновременно расходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k^{(n)}|^{2p_n})^{-1} \operatorname{Re} (e^{i\gamma_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n} = +\infty \quad (1 \leq n \leq N); \quad (10)$$

3°. Класс $V_{2,\infty}(E)$ совпадает с множеством функций f , которые единственным образом представимы в виде

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^N \int_{\partial \Delta^*(p_n)} E_{p_n}(\zeta t; p_n) \varphi_n(t) dt, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (11)$$

где $\varphi_n \in H_1^{(w)}[\tilde{\Delta}^*(p_n)]$.

Отметим, что эквивалентность утверждений 1° и 2° этой теоремы в специальных частных случаях были установлены ранее в других работах: в случае $N=2$ и $p_1=p_2$ — в работе автора [7], в случае $N=2$ и $p_1 \neq p_2$ — в работе А. Е. Аветисяна [9], и в случае $N \neq 2$, но $p_1 = \dots = p_N$ — в совместной работе А. Е. Аветисяна, С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [11].

(б) В силу теоремы 1, если хотя бы при одном n ($1 \leq n \leq N$) ряд (8) сходится, то система (9) не полна в $L_{2,\infty}(\Gamma)$, и, следовательно

но, порожденное ею замкнутое подпространство $V_{2, \infty}(E)$ не совпадает с $L_{2, \infty}(\Gamma)$. Чтобы описать это подпространство, введем еще один класс функций. Для этого сначала отметим, что если ряд (8) при данном n сходится, то бесконечное произведение

$$B_{\Delta(\rho_n)}^-(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{i\gamma_n} z)^{\beta_n} - (e^{i\gamma_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}}{(e^{i\gamma_n} z)^{\beta_n} + (e^{i\gamma_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}} x_k,$$

$$x_k = \frac{|1 - (e^{i\gamma_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{2\beta_n}|}{1 - (e^{i\gamma_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{2\beta_n}},$$

сходится абсолютно и равномерно внутри угловой области $\tilde{\Delta}(\rho_n)$ и определяет там аналитическую функцию $B_{\Delta(\rho_n)}^-(z)$, которая обладает следующими свойствами:

- 1) $|B_{\Delta(\rho_n)}^-(z)| \leq 1$, при $z \in \tilde{\Delta}(\rho_n)$;
- 2) функция $B_{\Delta(\rho_n)}^-$ обращается в нуль лишь в точках последовательности $\{\overline{\lambda_k^{(n)}}\}_{k=1}^{\infty}$, при этом точка $z = \overline{\lambda_k^{(n)}}$ является для нее нулем кратности $\beta_k^{(n)}$ (см. [3]).

При условии сходимости ряда (8) обозначим через

$$H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n); \Lambda_n]$$

класс функций φ , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $\varphi \in H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n)]$;
- 2) существует мероморфная в $\tilde{\Delta}(\rho_n)$ функция φ_* , с возможными полюсами в точках последовательности $\{\overline{\lambda_k^{(n)}}\}_{k=1}^{\infty}$ и такая, что

$$a) \varphi_* B_{\Delta(\rho_n)}^- \in H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}(\rho_n)];$$

- б) угловые граничные значения φ изнутри $\tilde{\Delta}^*(\rho_n)$ и угловые граничные значения φ_* изнутри $\tilde{\Delta}(\rho_n)$ совпадают почти всюду на общей границе $\partial \tilde{\Delta}^*(\rho_n)$ областей $\tilde{\Delta}^*(\rho_n)$ и $\tilde{\Delta}(\rho_n)$.

Грубо говоря, $H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n); \Lambda_n]$ — это класс тех функций φ из $H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}^*(\rho_n)]$, которые в определенном смысле допускают мероморфное продолжение φ_* в область $\tilde{\Delta}(\rho_n)$, с возможными полюсами в точках последовательности $\{\overline{\lambda_k^{(n)}}\}_{k=1}^{\infty}$; и это продолжение, будучи умножено на $B_{\Delta(\rho_n)}^-$, принадлежит $H_2^{(-\infty)}[\tilde{\Delta}(\rho_n)]$.

Следует здесь же отметить, что класс $H_2^{(-\infty)}[\bar{\Delta}^*(p_n); \Lambda_n]$ совпадает с замыканием в метрике $H_2^{(-\infty)}[\bar{\Delta}^*(p_n); \Lambda_n]$ системы простейших рациональных дробей $\{(\zeta - \overline{\lambda_k^{(n)}})^{-s_k^{(n)}}\}_{k=1}^{\infty}$ (см. [5] или [15]).

Сформулируем теперь теорему, в которой дается полное внутреннее описание замыкания системы (9), в случае ее неполноты в $L_{2, \infty}(\Gamma)$.

Теорема 2. Если хотя бы при одном n ($1 \leq n \leq N$) ряд (8) сходится, то класс $V_{2, \infty}(E)$ совпадает с множеством функций f , единственным образом представимых в виде

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^N \int_{\bar{\Delta}^*(p_n)} E_{p_n}(\zeta; p_n) \varphi_n(t) dt, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (12)$$

где $\varphi_n \in H_2^{(-\infty)}[\bar{\Delta}^*(p_n)]$, если при данном n ряд (8) расходится, и $\varphi_n \in H_2^{(-\infty)}[\bar{\Delta}^*(p_n); \Lambda_n]$, если при данном n ряд (8) сходится.

3. Теперь сформулируем критерий минимальности системы (9).

Теорема 3. Система (9) минимальна в $L_{2, \infty}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |p_k^{(n)}|^{2\beta_n})^{-1} \operatorname{Re} (e^{i\eta_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n} < +\infty \quad (1 \leq n \leq N). \quad (13)$$

В случае, когда выполняются условия (13), мы построим систему функций

$$\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}}) \in L_{2, \infty}(\Gamma) \quad (k=1, 2, \dots; 1 \leq n \leq N), \quad (14)$$

биортогональную с системой (9) в смысле

$$\int_{\Gamma} E_p^{(r)}(\zeta) \Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}}) |\zeta|^\alpha |d\zeta| = \begin{cases} 1, & \text{когда } k=p \text{ и } r=n; \\ 0, & \text{когда } k \neq p \text{ или } r \neq n; \end{cases} \quad (15)$$

$$k, p = 1, 2, \dots; 1 \leq n, r \leq N.$$

Наконец, положим

$$\lambda_k^{(n)}(\omega) = \left\{ |\lambda_k^{(n)}|^\omega [|\lambda_k^{(n)}|^{1-\beta_n} \operatorname{Re} (e^{i\eta_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n}]^{2s_k^{(n)}-1} \right\}^{1/2} \\ (k=1, 2, \dots; 1 \leq n \leq N),$$

и сформулируем следующий критерий базисности системы (9).

Теорема 4. Если одновременно выполняются условия

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{j=1}^N \left| \frac{(e^{i\eta_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n} - (e^{i\eta_n} \overline{\lambda_j^{(n)}})^{\beta_n}}{(e^{i\eta_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{\beta_n} + (e^{i\eta_n} \overline{\lambda_j^{(n)}})^{\beta_n}} \right| > 0 \quad (1 \leq n \leq N), \quad (16)$$

$$\sup_{k \geq 1} |p_k^{(n)}| < +\infty \quad (1 \leq n \leq N), \quad (17)$$

то система $\{ \lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta) : k \geq 1, 1 \leq n \leq N \}$ является базисом Рисса пространства $V_{2, \omega}(E)$.

Если же хотя бы одно из $2N$ условий (16) и (17) нарушается, то система E ни при какой расстановке членов не является базисом пространства $V_{2, \omega}(E)$.

Таким образом, если выполняются условия (16) и (17), то любая функция f , принадлежащая пространству $V_{2, \omega}(E)$ (т. е. замыканию в метрике $L_{2, \omega}(\Gamma)$ системы (9)) единственным образом разлагается в ряд

$$f(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^N c_k^{(n)}(f) |\lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta)|, \quad (18)$$

который безусловно сходится к f в метрике $L_{2, \omega}(\Gamma)$. Но легко видеть, что из условий (16) следует также сходимость рядов (8) при всех n ($1 \leq n \leq N$), т. е. (13). А в этом случае, как уже было отмечено, мы построим систему $\{ \Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}}) : k \geq 1, 1 \leq n \leq N \}$, удовлетворяющую соотношениям биортогональности (15). Следовательно, коэффициенты ряда (18) эффективно восстанавливаются по формулам

$$c_k^{(n)}(f) = \frac{1}{\lambda_k^{(n)}(\omega)} \int_{\Gamma} f(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})} |\zeta|^{\omega} |d\zeta| \quad (k \geq 1; 1 \leq n \leq N).$$

Доказательства теорем 1—4

При установлении сформулированных здесь теорем 1—4 вопросы замыкания, минимальности и базисности системы (9) в метрике $L_{2, \omega}(\Gamma)$ мы сводим к соответствующим вопросам для систем

$$E_k^{(n)}(\zeta) = E_{p_n}^{(s_k^{(n)}-1)}(\overline{\lambda_k^{(n)}} \zeta; \mu_n) \zeta^{s_k^{(n)}-1} \quad (k=1, 2, \dots) \quad (19)$$

в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ ($1 \leq n \leq N$). Поэтому обозначим также через

$$V_2^{(\omega)}(E^{(n)}; \Delta_n^*)$$

замыкание в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ системы функций $E^{(n)} \equiv [E_k^{(n)}(\zeta)]_{k=1}^{\infty}$ ($1 \leq n \leq N$). Отметим при этом, что из асимптотических свойств целой функции типа Миттаг-Леффлера (см. [13], лемму 3.4) следует включение $E^{(n)} \subset H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$.

Доказательства теорем 1 и 2. Пусть $\{Q_j\}_1^{\infty}$ — некоторая последовательность линейных комбинаций элементов системы E :

$$Q_j = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{m_{j,n}} a_{k,n}^{(j)} E_k^{(n)} \quad (j=1, 2, \dots).$$

Так как система E распадается на N подсистем $E^{(n)}$, то каждое Q_j представимо в виде

$$Q_j = \sum_{n=1}^N Q_{j,n} \quad (j=1, 2, \dots), \quad (20)$$

где $Q_{j,n}$ — линейная комбинация элементов подсистемы $E^{(n)}$:

$$Q_{j,n} = \sum_{k=1}^{m_{j,n}} a_{k,j}^{(n)} E_k^{(n)}.$$

При этом $\{Q_{j,n}\}_{j=1}^{\infty} \subset H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$, поскольку функции системы $E^{(n)}$ принадлежат классу $H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$.

Пусть, далее, $f \in L_{2,w}(\Gamma)$. По теореме В справедливо представление вида

$$f = \sum_{n=1}^N F_n, \quad F_n \in H_2^{(w)}[\Delta_n^*].$$

Отсюда и из (20) получаем

$$f - Q_j = \sum_{n=1}^N (F_n - Q_{j,n}) \quad (j = 1, 2, \dots),$$

причем очевидно, что $F_n - Q_{j,n} \in H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$ ($1 \leq n \leq N$). Следовательно, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} A_w \max_{1 \leq n \leq N} \{ \|F_n - Q_{j,n}\|_{H_2^{(w)}[\Delta_n^*]} \} &\leq \|f - Q_j\|_{L_{2,w}} \leq \\ &\leq B_w \max_{1 \leq n \leq N} \{ \|F_n - Q_{j,n}\|_{H_2^{(w)}[\Delta_n^*]} \}, \quad j = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (21)$$

Отсюда, во-первых, следует, что каждую функцию $f \in L_{2,w}(\Gamma)$ можно аппроксимировать в метрике $L_{2,w}(\Gamma)$ линейными комбинациями элементов системы E тогда и только тогда, когда для всех n ($1 \leq n \leq N$) каждую функцию $F_n \in H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$ можно аппроксимировать в метрике $H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$ линейными комбинациями элементов системы $E^{(n)}$. Иначе говоря, система E полна в $L_{2,w}(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда для всех n ($1 \leq n \leq N$) система $E^{(n)}$ полна в $H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$; и поскольку система $E^{(n)}$ полна в $H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$ в том и только в том случае, когда расходится ряд (8) (см. [10], теорему 1), то эквивалентность утверждений 1° и 2° теоремы 1 доказана.

С другой стороны, из неравенств (21) вытекает, что последовательность $\{Q_j\}_j^\infty$ сходится по метрике $L_{2,w}(\Gamma)$ к функции f тогда и только тогда, когда при каждом n ($1 \leq n \leq N$) последовательность компонент $\{Q_{j,n}\}_j^\infty$ сходится в топологии $H_2^{(w)}[\Delta_n^*]$ к соответствующей компоненте F_n функции f . Таким образом, класс $V_{2,w}(E)$ совпадает с множеством функций f , представимых в виде

$$f = \sum_{n=1}^N F_n, \quad F_n \in V_2^{(w)}(E^{(n)}; \Delta_n^*), \quad (22)$$

причем в силу теоремы В такое представление единственно. Отсюда уже следует утверждение теоремы 2, так как класс $V_2^{(w)}(E^{(n)}; \Delta_n^*)$ совпадает с множеством функций F_n , представимых в виде

$$F_n(\zeta) = \int_{\partial \Delta_n^*} E_{p_n}(\zeta t; \mu_n) \varphi_n(t) dt, \quad \zeta \in \Delta_n^*,$$

где $\varphi_n \in H_2^{(-\infty)}[\Delta_n^*]$, если при данном n ряд (8) расходится, и $\varphi_n \in H_2^{(-\infty)}[\Delta_n^*]$, если при данном n ряд (8) сходится (см. [10], теоремы 1 и 2). Очевидно, что из этих рассуждений следует также импликация $2^\circ \rightarrow 3^\circ$ в теореме 1. Чтобы завершить доказательство теоремы 1 нам осталось установить импликацию $3^\circ \rightarrow 1^\circ$ (напомним, что эквивалентность утверждений 2° и 3° уже доказана). Но эта импликация следует из теоремы В и того факта, что при каждом n ($1 \leq n \leq N$) класс $H_2^{(\infty)}[\Delta_n^*]$ совпадает с множеством функций F_n , представимых в виде

$$F_n(\zeta) = \int_{\partial \Delta_n^*} E_{p_n}(\zeta t; \mu_n) \varphi_n(t) dt, \quad \zeta \in \Delta_n^*,$$

где $\varphi_n \in H_2^{(-\infty)}[\Delta_n^*]$ (см. [13], теорему 7.7, или [10], теорему 1).

Таким образом, теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

Доказательство теоремы 3. Предположим, что при некотором $n = n_0$ ($1 \leq n_0 \leq N$) ряд (8) расходится. Тогда система $E^{(n_0)}$ (т. е. система (19) при $n = n_0$) не минимальна в метрике $H_2^{(\infty)}[\Delta_{n_0}^*]$ (см. [10], теорему 3). Иначе говоря, существует элемент системы $E^{(n_0)}$, который можно приблизить в метрике $H_2^{(\infty)}[\Delta_{n_0}^*]$ линейными комбинациями остальных элементов этой системы. В силу неравенств (6') этот же элемент можно приблизить линейными комбинациями остальных элементов системы $E^{(n_0)}$ уже в метрике $L_{2, \infty}(\Gamma)$. Поскольку $E^{(n_0)}$ является подсистемой системы E , то отсюда уже вытекает, что в данном случае система E не минимальна в $L_{2, \infty}(\Gamma)$. Таким образом, выполнение условий (13) необходимо для минимальности в $L_{2, \infty}(\Gamma)$ системы E .

Обратно, предположим, что условия (13) выполняются. Построим систему функций (14), биортогональную с системой E в смысле (15). Отсюда уже будет следовать минимальность системы E в $L_{2, \infty}(\Gamma)$.

При условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k^{(n)}|^{2p_n})^{-1} \operatorname{Re} (e^{i\eta_n} \overline{\lambda_k^{(n)}})^{p_n} < +\infty$$

в работе [10] была построена система функций

$$\{\mathcal{Q}_{p_n}^*(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})\}_{k=1}^{\infty} \subset H_2^{(-\infty)}[\Delta_n], \quad (23)$$

биортогональная с системой (19) в следующем смысле:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_n} E_p^{(n)}(\zeta) \mathcal{Q}_{p_n}^*(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}}) d\zeta = \begin{cases} 1, & k = p, \\ 0, & k \neq p, \end{cases} \quad (k, p \geq 1). \quad (24)$$

Исходя из систем (23), построим нашу систему (14). Для значений k ($k = 1, 2, \dots$) и n ($1 \leq n \leq N$) положим

$$\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi i} |\zeta|^{-n} e^{-i\theta_n} \overline{\Omega_{p_n}^*(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})}, & \zeta \in \Gamma_{0n}, \\ \frac{1}{2\pi i} |\zeta|^{-n} e^{-i\theta_{n+1}} \overline{\Omega_{p_n}^*(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})}, & \zeta \in \Gamma_{0n+1}, \\ 0, & \zeta \in \Gamma \setminus \{\Gamma_{0n} \cup \Gamma_{0n+1}\}. \end{cases}$$

В силу такого определения, очевидно, будем иметь

$$\overline{\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})} |\zeta|^n |d\zeta| = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \Omega_{p_n}^*(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}}) d\zeta, & \text{при } \zeta \in \partial\Delta_n, \\ 0, & \text{при } \zeta \in \Gamma \setminus \partial\Delta_n. \end{cases} \quad (25)$$

С другой стороны, из (23) вытекает принадлежность функции $\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})$ классу $L_{2,\infty}(\Gamma)$.

Теперь убедимся в соотношениях биортогональности (15). Для этого, воспользовавшись (25), напомним равенство

$$\int_{\Gamma} E_p^{(r)}(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})} |\zeta|^n |d\zeta| = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_n} E_p^{(r)}(\zeta) \Omega_{p_n}^*(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}}) d\zeta \quad (26)$$

и рассмотрим три возможных случая: 1) $n = r$, $k = p$; 2) $n = r$, $k \neq p$; 3) $n \neq r$.

В первых двух случаях ввиду (24) и (26) будем иметь:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} E_p^{(r)}(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})} |\zeta|^n |d\zeta| = \\ & = \begin{cases} 1, & \text{при } n = r \text{ и } k = p, \\ 0, & \text{при } n = r \text{ и } k \neq p, \end{cases} \quad (k, p = 1, 2, \dots; 1 \leq n, r \leq N). \end{aligned} \quad (27)$$

Рассмотрим теперь случай $n \neq r$.

В этом случае имеем включение $\Delta_n \subset \Delta_r$, и поскольку $E_p^{(r)}(\zeta) \in H_2^{(w)}[\Delta_r]$, то

$$E_p^{(r)}(\zeta) \in H_2^{(w)}[\Delta_n]. \quad (28)$$

Имеем также

$$\Omega_{p_n}^*(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}}) \in H_2^{(-w)}[\Delta_n]. \quad (29)$$

Из (28) и (29) следует, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta_n} E_p^{(r)}(\zeta) \Omega_{p_n}^*(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}}) d\zeta = 0 \quad (n \neq r; k, p = 1, 2, \dots),$$

(см. [15], лемму 2). Отсюда на основании (26) получаем

$$\int_{\Gamma} E_p^{(r)}(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \overline{\lambda_k^{(n)}})} |\zeta|^n |d\zeta| = 0 \quad (n \neq r; k, p = 1, 2, \dots).$$

Эти равенства вместе с (27) дают (15). Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Сначала напомним, что, как было установлено в процессе доказательства теорем 2 и 3, каждая функция $f \in V_{2, \infty}(E)$ представима в виде

$$f = \sum_{n=1}^N F_n, F_n \in V_2^{(\omega)}(E^{(n)}, \Delta_n^*). \quad (22')$$

При этом имеют место неравенства (см. теорему В)

$$\frac{A_\omega^2}{N} \sum_{n=1}^N \|F_n\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]}^2 \leq \|f\|_{L_{2, \infty}}^2 \leq B_\omega^2 \sum_{n=1}^N \|F_n\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]}^2. \quad (7')$$

Теперь предположим, что условия (16) и (17) выполняются. Тогда при каждом n ($1 \leq n \leq N$) система $\{\lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta)\}_{k=1}^\infty$ является базисом Рисса пространства $V_2^{(\omega)}(E^{(n)}, \Delta_n^*)$ (см. [10], теорему 5). Иначе говоря, каждая функция $F_n \in V_2^{(\omega)}(E^{(n)}, \Delta_n^*)$ единственным образом разлагается в ряд

$$F_n(\zeta) = \sum_{k=1}^\infty c_k^{(n)}(F_n) [\lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta)], \quad (20)$$

безусловно сходящийся к F_n по метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$, причем выполняются неравенства

$$\alpha \sum_{k=1}^\infty |c_k^{(n)}(F_n)|^2 \leq \|F_n\|_{H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]}^2 \leq A \sum_{k=1}^\infty |c_k^{(n)}(F_n)|^2,$$

где $\alpha > 0$ и $A > 0$ не зависят от F_n .

Отсюда на основании (22') и (7') заключаем, что каждая функция $f \in V_{2, \infty}(E)$ разлагается в безусловно сходящийся по метрике $L_{2, \infty}(\Gamma)$ ряд

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^\infty c_k^{(n)}(f) [\lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta)], \quad (31)$$

где

$$c_k^{(n)}(f) = c_k^{(n)}(F_n) \quad (k = 1, 2, \dots; 1 \leq n \leq N)$$

и при этом

$$\frac{\alpha A_\omega^2}{N} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^\infty |c_k^{(n)}(f)|^2 \leq \|f\|_{L_{2, \infty}}^2 \leq A B_\omega^2 \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^\infty |c_k^{(n)}(f)|^2.$$

Наконец, поскольку из (16) следует (13), то система E минимальна в $L_{2, \infty}(\Gamma)$. Значит разложение функции $f \in V_{2, \infty}(E)$ в ряд вида (31) единственно.

Таким образом, при условиях (16) и (17) система $\{\lambda_k^{(n)}(\omega) E_k^{(n)}(\zeta), k=1, 2, \dots; 1 \leq n \leq N\}$ является базисом Рисса пространства $V_{2, \infty}(E)$.

Обратно, предположим, что система E при некоторой расстановке членов является базисом пространства $V_{2, \infty}(E)$. Обозначим эту расстановку через σ .

Из базисности системы E вытекает, что она минимальна в $L_{2, \infty}(\Gamma)$ и, следовательно, выполняются условия (13). Ввиду этого каждая система $E^{(n)}$ ($1 \leq n \leq N$) минимальна в $H_2^{(\omega)}[\Delta_n^*]$ (см. [10], теорему 3).

Убедимся теперь, что при каждом n_0 ($1 \leq n_0 \leq N$) система $E^{(n_0)}$ является базисом пространства $V_2^{(\omega)}(E^{(n_0)}, \Delta_{n_0}^*)$ при расстановке σ ее членов.

Пусть $F_{n_0} \in V_2^{(n_0)}(E^{(n_0)}; \Delta_{n_0}^*)$. Поскольку $E^{(n_0)}$ является подсистемой системы E и имеют место неравенства (6'), то F_{n_0} принадлежит замыканию в метрике $L_{2, \infty}(\Gamma)$ системы $E^{(n_0)}$, и, в частности, $F_{n_0} \in V_{2, \infty}(E)$. Следовательно, F_{n_0} разлагается в ряд

$$F_{n_0}(\zeta) = (\sigma) \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)}(F_{n_0}) E_k^{(n)}(\zeta), \quad (32)$$

сходящийся к F_{n_0} по метрике $L_{2, \infty}(\Gamma)$. Значок (σ) означает, что члены ряда расставлены в порядке σ .

Однако из минимальности системы E следует, что коэффициенты $c_k^{(n)}(F_{n_0})$ ряда (32) определяются из формул

$$c_k^{(n)}(F_{n_0}) = \int_{\Gamma} F_{n_0}(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \bar{\lambda}_k^{(n)})} |\zeta|^n |d\zeta| \quad (k \geq 1; 1 \leq n \leq N). \quad (33)$$

Но поскольку F_{n_0} принадлежит замыканию в метрике $L_{2, \infty}(\Gamma)$ системы $E^{(n_0)}$, то некоторая последовательность $|P_j|^\sigma$ линейных комбинаций элементов системы $E^{(n_0)}$ сходится к F_{n_0} в метрике $L_{2, \infty}(\Gamma)$. Ввиду (15) будем иметь

$$\int_{\Gamma} P_j(\zeta) \overline{\Omega(\zeta; \bar{\lambda}_k^{(n)})} |\zeta|^n |d\zeta| = 0 \quad (j \geq 1, k \geq 1, n \neq n_0)$$

и устремив здесь $j \rightarrow +\infty$, на основании (33) получим

$$c_k^{(n)}(F_{n_0}) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots; n \neq n_0, 1 \leq n \leq N).$$

Следовательно, каждая функция $F_{n_0} \in V_2^{(n_0)}(E^{(n_0)}; \Delta_{n_0}^*)$ разлагается в ряд

$$F_{n_0}(\zeta) = (\sigma) \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n_0)}(F_{n_0}) E_k^{(n_0)}(\zeta), \quad (32')$$

сходящийся к F_{n_0} по метрике $L_{2, \infty}(\Gamma)$. Ввиду неравенств (6') этот ряд сходится к F_{n_0} и по метрике $H_2^{(n_0)}[\Delta_{n_0}^*]$ и поскольку система $E^{(n_0)}$ минимальна в $H_2^{(n_0)}[\Delta_{n_0}^*]$, то разложение F_{n_0} в ряд вида (32') единственно. Иначе говоря, система $E^{(n_0)}$ при расстановке σ является базисом пространства $V_2^{(n_0)}(E^{(n_0)}; \Delta_{n_0}^*)$. Следовательно, при каждом n ($1 \leq n \leq N$) выполняются условия

$$\inf_{k \geq 1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j^{(n)} + \lambda_k^{(n)}}}^{\infty} \left| \frac{(e^{i\tau_n} \bar{\lambda}_k^{(n)})^{p_n} - (e^{i\tau_n} \bar{\lambda}_j^{(n)})^{p_n}}{(e^{i\tau_n} \bar{\lambda}_k^{(n)})^{p_n} + (e^{i\tau_n} \bar{\lambda}_j^{(n)})^{p_n}} \right| > 0, \\ \sup_{k \geq 1} |p_k^{(n)}| < +\infty$$

(см. [10], теорему 5). Отсюда вытекают условия (16) и (17). Теорема доказана.

Пользуясь случаем, приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за внимание к работе.

վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Հառաջայրենի համակարգի վրա Միտագ-Լեֆլերի տիպի սխեմաների փակույթի, մինիմալության ու բազիսության մասին (ամփոփում)

Ներկա աշխատանքում ստացվել են հառաջայրենի համակարգի վրա Միտագ-Լեֆլերի տիպի սխեմաների լրիվության, մինիմալության ու բազիսության հայտանիշները Այդպիսի սխեմաներ ոչ լրիվ լինելու դեպքում ստվել է նրա փակույթի լիակատար ներքին նկարագրությունը, իսկ մինիմալության դեպքում կառուցվել է նրա հետ բիրթոգոնալ սխեմաներ

V. M. MARTIROSIAN. *On the closure, minimality and basisness of systems of Mittag-Leffler type on a system of rays (summary)*

In the paper criteria of fullness, minimality and basisness on the system of rays are established for function systems of Mittag-Leffler type. In case the system is not full, a description of its closure is given, and in case of minimality the biorthogonal system is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. М. Джрбашян. О пополнении и замыкании неполной системы функций. $(e^{-\mu x} x^{s_k-1})_1^n$. ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
2. М. М. Джрбашян. Характеристика замкнутых линейных оболочек двух семейств неполных систем аналитических функций, Матем. сборник, 114 (156), № 1, 1981 3—84.
3. М. М. Джрбашян. О замкнутости системы типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
4. L. Schwartz. Etude des sommes d'exponentielles, Paris, 1942; Strasburg, 1953.
5. С. А. Акопян, И. О. Хачатрян. О замыкании незамкнутых систем функций типа Миттаг—Леффлера, Изв. АН СССР, сер. матем., 40, № 1, 1976, 96—114.
6. М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян. Теоремы типа Винера—Пэли и Мюнца—Саса, ДАН СССР, 225, № 5, 1975, 1001—1004; Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 4, 1977, 868—894.
7. В. М. Мартиросян. О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН Арм. ССР, 62, № 5, 1976, 269—274.
8. В. М. Мартиросян. Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм. ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.
9. А. Е. Аветисян. О пополнении одной неполной системы функций, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XV, № 2, 1980, 96—109.
10. В. М. Мартиросян. О замыкании, минимальности и базисности систем функций типа Миттаг—Леффлера в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XVI, № 2, 1981, 85—102.
11. А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, И. О. Хачатрян. О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера на произвольной конечной системе лучей, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 389—395.
12. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
13. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
14. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
15. В. М. Мартиросян. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
16. В. М. Мартиросян. О замыкании, минимальности и базисности систем простейших рациональных дробей на системе лучей, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XV, № 4, 1980, 276—291.
17. И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. Введение в теорию линейных несамопряженных операторов, «Наука», М., 1967.