ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ СС
Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математик

Р. М. МЕГРАБЯН

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ТЕОРЕМЫ РИМАНА О БЕЗУСЛОВНОЙ СХОДИМОСТИ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ

Для ряда $\sum x_n$ из линейного пространства X через $M(\sum x_n)$ будем обозначать множество тех $x \in X$, для каждого из которых существует перестановка $\tau(i)=n_i$ натурального ряда такая, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_{\tau(i)}=x$.

Через s обозначается линейное пространство числовых последовательностей с топологией, эквивалентной покоординатной сходимости, а через T — линейное пространство вещественных функций на $[0,1]$ с топологией, эквивалентной сходимости всюду на $[0,1]$.

Одна из эквивалентных в R^1 формулировок теоремы Римана выглядит так: для безусловной сходимости ряда $\sum a_n$ необходимо и достаточно, чтобы $M(\sum a_n)$ состояло из одного элемента (кратко card $M=1$).

Известно, что эта формулировка сохраняет силу и для рядов из R^k (см. [1], [2], а также [4]).

Б. С. Кашин показал (см. [4]), что подобное утверждение для пространства T неверно, более того он построил пример ряда

$$\sum_{1}^{\infty} f_n(x), \tag{1}$$

состоящего из непрерывных функций, для которого card$M(\sum f_n)=1$ (точнее $M(\sum f_n)=\{0\}$; сходимость в смысле T) и при этом выполняется условие

$$\sum_{1}^{\infty}|f_n(x)|=\infty \quad \forall\, x\in[0,1]. \tag{2}$$

В настоящей заметке, упрощая метод Б. С. Кашина, мы доказываем справедливость такого утверждения:

Теорема 1. *Существует ряд* $\sum f_n(x)$, $f_n \in C[0,1]$, *удовлетворяющий условиям:*

а) $\sum f_n$ *сходится к нулю равномерно на* $[0,1]$.

б) *если для какой-нибудь перестановки* σ *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_{\sigma(n)}$ *сходится всюду на* $[0,1]$, *то обязательно к нулю для всех* x, *причем равномерно на* $[0,1]$,

в) $\sum|f_n(x)|=\infty \ \forall x\in[0,1]$.*

* В примере Б. С. Кашина $f_n(x) \underset{n}{\to} 0$ неравномерно на $[0,1]$.

Далее мы показываем, что для пространства s, которое занимает в известном смысле промежуточное положение между R^k и T, ситуация такова же, как и в R^k.

Теорема 2. *Для ряда* $\sum x_i$, $x^i \in s$, *безусловная сходимость эквивалентна условию* $\operatorname{card} M(\sum x_i) = 1$.

В связи с этой теоремой уместно отметить следующее утверждение, принадлежащее Р. И. Овсепяну: если X— бесконечномерное банахово пространство (в нормированной или слабой топологии) или

$$x = L^p(x, \Omega, \mu),\ 0 < p < 1,\ \dim L^p(x, \Omega, \mu) = \infty$$

(μ — произвольная мера) или $X = L^0(X, \Omega, \mu)$ и μ имеет неатомичную часть, то в X существует ряд $\sum x_i$, для которого $\operatorname{card} M = 1$, однако он не является безусловно сходящимся.

Доказательство теоремы 1. Обозначим через A множество числовых последовательностей $a = (a_1, a_2, \cdots)$, где $a_i = 1$ или 0 и пусть $n_a = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

Для $\gamma \in (0,1)$ введем обозначение $B = B_\gamma = \{a \in A: \frac{n_a}{n} \geqslant \gamma,\ \forall n\}$.

Пусть $C = \{x = 0, a_1, a_2, \cdots; (a_1, a_2, \cdots) \in B\}$.

Легко проверить, что C— замкнутое подмножество отрезка [0,1], поэтому $D = [\inf C, \sup C] \setminus C$ является открытым множеством. Пусть (α_i, β_i) $i = 1, 2, \cdots$ — составляющие интервалы множества D.

Положим $\varphi_{2\cdot i-1}(x) = \frac{a_i}{\sqrt{i}}$, где $x = 0, a_1, a_2, \cdots \in C$ $\varphi_{2\cdot i}(x) \equiv -\varphi_{2\cdot i-1}(x)$, $i = 1, 2, \cdots$,

$$f_i(x) = \begin{cases} \varphi_i(x) & x \in C \\ \varphi_i(\alpha_j) & \alpha_j < x \leqslant \gamma_j^i = \beta_j - \dfrac{\beta_j - \alpha_j}{i} \\ \varphi_i(\inf C) & 0 \leqslant x \leqslant \inf C \\ \varphi_i(\sup C) & \sup C \leqslant x \leqslant 1 \\ \text{отрезок прямой, соединяющий точки } (\gamma_j^i, f_i(\gamma_j^i)) \text{ и} \\ (\beta_j, \varphi_i(\beta_j)). \end{cases}$$

Покажем, что для ряда $\sum f_i$ выполняются все утверждения теоремы 1. Сначала установим несколько простых утверждений.

1. Если для $a \in A$ выполняется неравенство $\varlimsup_{n\to\infty} \frac{n_a}{n} > 0$, то

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1}{\sqrt{i}} = \infty.$$

Доказательство. $\sum_{i=1}^{N} a_i \frac{1}{\sqrt{i}} \geqslant \frac{N_a}{\sqrt{N}} = \sqrt{N}\,\frac{N_a}{N}$.

2. Для любых положительных чисел β и ε существует $N = N(\beta, \varepsilon)$ такое, что для любого $a \in A$, удовлетворяющего условию

$$\sum a_i \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant \beta \tag{3}$$

и для $\forall\, n > N$ $n_a/n < \varepsilon$. В частности, если $a_i = 0$, $i \leqslant N$, то $n_a/n < \varepsilon$ $\forall n$.

Доказательство. Возьмем N настолько большим, что $\beta/\sqrt{N} < \varepsilon$. Тогда для $\forall a \in A$, удовлетворяющего условию (3), имеем $\frac{n_a}{n} = \frac{n_a}{\sqrt{n}\,\sqrt{n}} \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ при $n > N$.

Очевидно, что ряд $\sum \varphi_i(x)$ сходится к нулю равномерно на C и что φ_i непрерывны на C, но тогда в силу определения функций f_i они сами непрерывны на [0,1], и ряд (1) сходится к нулю равномерно на [0,1]. Далее, поскольку $\sum_1^\infty |\varphi_i(x)| = \infty$ $\forall x \in C$, то условие (2) выполнено.

Пусть σ — взаимнооднозначное отображение множества натуральных чисел на себя и $x_0 = 0,\ 1\ 1 \cdots \in C$. Назовем член $\varphi_{\sigma(j)}(x_0)$, $j \leqslant N$ сокращающийся в выражении

$$\varphi_{\sigma(1)}(x_0) + \cdots + \varphi_{\sigma(N)}(x_0), \tag{4}$$

если $-\varphi_{\sigma(j)}(x_0) \in \{\varphi_{\sigma(i)}(x_0),\ i = 1, \cdots, N\}$, в противном случае назовем его несокращающимся.

Обозначим через (α^+, N, σ), (α^-, N, σ) сумму положительных, соответственно отрицательных, несокращающихся членов в выражении (4).

3. Если $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}\,(\alpha^+, N, \sigma) = \underline{\lim\limits_{N\to\infty}}\,(\alpha^-, N, \sigma) = 0$, то $\sum\limits_{i=1}^\infty \varphi_{\sigma(i)}(x)$ сходится к нулю равномерно на C.

Доказательство. Утверждение является следствием очевидного неравенства

$$(\alpha^-, N, \sigma) \leqslant \sum_1^N \varphi_{\sigma(i)}(x) \leqslant (\alpha^+, N, \sigma)\ \ \forall\, N,\ \forall\, x \in C.$$

4. Если $\overline{\lim\limits_{N\to\infty}}\,(\alpha^+, N, \sigma) = \beta_1 > 0$ (или $\underline{\lim\limits_{N\to\infty}}\,(\alpha^-, N, \sigma) = \beta_2 < 0$), то существует точка $\bar{x} \in C$, в которой ряд $\sum \varphi_{\sigma(i)}(\bar{x})$ расходится.

Доказательство. Если расходится ряд $\sum\limits_1^\infty \varphi_{\sigma(i)}(x_0)$, то $\bar{x} \equiv x_0$.

Предположим $\sum\limits_1^\infty \varphi_{\sigma(i)}(x_0) = p$. Пусть $\gamma \in (0,1)$. Для $\beta = 1$ и $\varepsilon \in \left(0, \frac{1-\gamma}{3}\right)$ выберем n_0 в соответствии с пунктом 2. На k-ом шаге берем N'_k настолько большим, чтобы $(\alpha^+, N'_k, \sigma) > \beta_0/2$* и $\varphi_i(x_0)$, $i = 1, \cdots, 2 \cdot n_{k-1}$ сокращается в выражении

$$\varphi_{\sigma(1)}(x_0) + \cdots + \varphi_{\sigma(N'_k)}(x_0).$$

* $\beta_0 = \min\{1, \beta_1\}$

Из $\{\varphi_{\sigma(i)}(x_0)\}_{i=1}^{N'_k}$ выбираем произвольным образом такое количество положительных несокращающихся членов, что их сумма s_k удовлетворяет неравенству

$$\beta_0/2 \leqslant s_k \leqslant 1. \tag{5}$$

Теперь выберем натуральные числа N_k и n_k так, чтобы числа $\varphi_{\sigma(i)}(x_0)$, $i = 1, \cdots, N'_k$ сокращались в выражении

$$\varphi_{\sigma(1)}(x_0) + \cdots + \varphi_{\sigma(N_k)}(x_0),$$

$$\{\varphi_{\sigma(i)}(x_0)\}_{i=1}^{N_k} \subset \{\varphi_i(x_0)\}_{i=1}^{2\cdot n_k} \text{ и } n_k > 2\cdot n_{k-1}. \tag{6}$$

Ясно, что выбранные согласно (5) положительные несокращающиеся члены на k-ом шаге принадлежат множеству

$$\{\varphi_i(x_0)\}_{i=2\cdot n_{k-1}}^{2\cdot n_k}. \tag{7}$$

Положим $a^k = (a_1^k, a_2^k, \cdots) \in A$, где $a_i^k = 1$ тогда и только тогда, если $\varphi_{2\cdot i-1}(x_0)$ присутствует в сумме s_k. Из (7) следует

$$a_i^k = 0 \ \forall\ i \leqslant n_{k-1} \text{ и } \forall\ i > n_k. \tag{8}$$

Из (5) и определения a^k имеем для любого $k \geqslant 1 \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k \frac{1}{\sqrt{i}} \leqslant 1.$

Но тогда в силу пункта 2 имеем

$$\frac{n_{a^k}}{n} < \varepsilon \ \forall n,\ \forall k, \tag{9}$$

откуда

$$\frac{n_{a^k}}{n_k} < \varepsilon \quad \text{для } \forall n \geqslant n_k,\ \forall\ k. \tag{10}$$

Пусть $\bar{a} = (1, 1, 1, \cdots) - \sum_{1}^{\infty} a^k$ (здесь имеется в виду покоординатная сумма и разность).

Из (8) следует, что $\bar{a} \in A$. Покажем, что $\bar{a} \in B$.

В самом деле, при $n \leqslant n_0$ имеем $\frac{n_{\bar{a}}}{n} = 1$. Если же $n_{m-1} < n < n_m$, то в силу (6), (9), (10) получим

$$\frac{n_{\bar{a}}}{n} = \frac{1}{n}\left(n - \sum_{k=1}^{m} n_{a_k}\right) = 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{n_{a^k}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - (2^{-(m-2)}\cdot \frac{n_{a^1}}{n_1} + 2^{-(m-3)} \cdot \frac{n_{a^2}}{n_2} + \cdots + \frac{n_{a^{m-1}}}{n_{m-1}} + \frac{n_{a^m}}{n} \geqslant$$

$$\geqslant 1 - \left(2\varepsilon + \sum_{1}^{\infty} \varepsilon\cdot 2^{-i}\right) = 1 - 3\cdot\varepsilon > \gamma,$$

откуда следует, что $\bar{a} \in B \, (= B_\tau)$.

Пусть $\bar{x} = 0, \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots$ (где $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2 \cdots)$). Из конструкции a следует

$$\sum_1^{N_k'} \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x}) = \sum_1^{N_k'} \varphi_{\sigma(l)}(x_0) - s_k \ \forall \ k,$$

$$\sum_1^{N_k} \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x}) = \sum_1^{N_k} \varphi_{\sigma(l)}(x_0) \quad \forall \ k,$$

откуда вытекает

$$\lim_{k \to \infty} \sum_1^{N_k} \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x}) = p,$$

$$\underline{\lim}_{k \to \infty} \sum_1^{N_k'} \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x}) \leqslant p - \beta_0/2,$$

а это влечет расходимость ряда $\sum\limits_1^\infty \varphi_{\sigma(l)}(\bar{x})$ и 4-й пункт доказан.

Из пунктов 3 и 4 следует, что для любой перестановки возможны 2 случая:

а) $\sum \varphi_{\sigma(l)}(x)$ сходится к нулю равномерно на C, следовательно ряд $\sum f_{\sigma(l)}(x)$ сходится к нулю равномерно на $[0,1]$,

б) $\sum \varphi_{\sigma(l)}(x)$ расходится в некоторой точке множества C, но тогда в этой же точке расходится и ряд $\sum f_{\sigma(i)}(x)$.

Теорема 1 доказана.

Покажем еще, что рассматриваемые в теореме функции можно брать из класса C^∞.

Пусть $\sum \varepsilon_k < \infty$, $\varepsilon_k > 0$. Пусть $F_1 \in C^\infty$ и $\|F_1 - f_1\|_\infty < \varepsilon_1$. Далее $F_2 \in C^\infty$ выбираем так, чтобы $\|(F_1 + F_2) - (f_1 + f_2)\|_\infty < \varepsilon_2$. Отсюда следует, что $\|F_2 - f_2\|_\infty < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Затем берем $F_3 \in C^\infty$ таким, чтобы $\left\| \sum\limits_1^3 F_i - \sum\limits_1^3 f_i \right\|_\infty < \varepsilon_3$. Но тогда $\|F_3 - f_3\|_\infty < \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ и т. д. Ясно, что $\sum\limits_1^\infty \|F_n - f_n\|_\infty < \infty$. Нетрудно проверить, что ряд $\sum F_n$ искомый.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся некоторые обозначения и вспомогательные утверждения.

Если $y = (y^1, y^2, \cdots)$ — элемент из s или $y = (y^1, \cdots, y^m)$ — элемент из R^m и $k < m$, то обозначим $(y)^k = (y^1, \cdots, y^k) \in R^k$.

Аналогично, если E — подмножество s или R^m, то обозначим $(E)^k = \{(y)^k \colon y \in E\}$.

Для ряда

$$\sum_{i=1}^\infty x_i \tag{11}$$

с элементами из s множество $M = M(\sum x_i)$ определяется как и ранее. Далее обозначим $M^k = \{x \in R^k\}$; существует перестановка τ такая, что $\sum_\tau (x_i)^k = x$. Положим еще

$$(m, n) \equiv \{m, m+1, \cdots, n\},$$

$$\tau(m, n) = \{\tau(m), \tau(m+1), \cdots, \tau(n)\}.$$

Лемма 1. (*Е. Штейниц, см.* [1], *а также* [3], [5]). *Для любого натурального числа k существует число B_k такое, что для любой конечной системы $x_1, \cdots, x_N$ элементов из R^k, удовлетворящей условию $\sum_1^N x_i = 0$, существует перестановка τ множества $\{1, 2, \cdots, N\}$ такая, что* $\left\| \sum_{1\tau}^{m} x_i \right\| \leqslant B_k \cdot \max\limits_{1<i<N} \|x_i\|,\ 1 \leqslant m \leqslant N.$

Мы будем пользоваться следующими двумя очевидными следствиями этой леммы.

Следствие 1. *Для любой конечной системы $x_1, \cdots, x_N$ элементов из R^k существует перестановка τ множества $\{1, \cdots, N\}$ такая, что*

$$\left\| \sum_{1\tau}^{m} x_i \right\| \leqslant B_k \cdot \max_{1<i<N} \|x_i\| + B_k \left\| \sum_{1}^{N} x_i \right\| \ \forall\ m \in (1, N).$$

Следствие 2. (*см.* [3], *лемма* 1). *Пусть $x_i \in R^k$ $i = 1, 2, \cdots$ и $\|x_i\| \underset{i}{\to} 0$. Если подпоследовательность натуральных чисел $\{n_m\}_{m-1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\sum_{i=1\tau}^{n_m} x_i \underset{m}{\to} x$ в R^k, то существует перестановка $\bar{\tau}$ такая, что для любого*

$$m,\ \bar{\tau}\colon (n_{m-1}+1, n_m) \to \tau(n_{m-1}+1, n_m) \text{ и } \sum_{1\bar{\tau}}^{\infty} x_i = x.$$

Лемма 2. *Для произвольного ряда*

$$\sum x_i \quad x_i \in s$$

верно:

1°. *При фиксированном k, если $M^{k+1} \neq \varnothing$, то $M^k = (M^{k+1})^k$.*

2°. *Если $y \in s$ и для любого $k = 1, 2, \cdots$ $(y)^k \in M^k$, то $y \in M$.*

3°. *Если $M \neq \varnothing$, то $M^k = (M)^k$ для всех $k = 1, 2, \cdots$.*

Доказательство леммы 2.

1°. Пусть α и β — такие перестановки, что

$$\sum_\alpha (x_i)^{k+1} = (a^1, \cdots, a^{k+1}),\ \sum_\beta (x_i)^k = (b^1, \cdots, b^k), \tag{12}$$

где $a^1, \cdots, a^{k+1}) \in R^{k+1}$, $(b^1, \cdots, b^k) \in R^k$.

Обозначим $A = (a^1, \cdots, a^k)$, $B = (b^1, \cdots, b^k)$.

Мы должны доказать, что существует такая перестановка τ, что

$$\sum_\tau (x_i)^k = B \tag{13}$$

и ряд $\sum_\tau x_i^{k+1}$ сходится, где x_i^{k+1} — $k+1$-я координата вектора $x_i \in s$.

Допустим противное, т. е. что при всех перестановках τ, удовлетворяющих условию (13), ряд $\sum_\tau x_l^{k+1}$ расходится. Но поскольку в силу (12) $\|(x_l)^k\| \underset{l}{\to} 0$, то по следствию 2 получим, что для всех перестановок τ, удовлетворяющих (13), должны выполняться условия

$$\sum_{l=1}^{m}{}_\tau\, x_l^{k+1} \underset{m}{\to} +\infty \quad \text{или} \quad \sum_{l=1}^{m}{}_\tau\, x_l^{k+1} \underset{m}{\to} -\infty. \tag{14}$$

Более того, если перестановка τ такая, что для некоторой подпоследовательности натуральных чисел $\{n_m\}_{m=1}^{\infty}$ выполняется условие

$$\sum_{l=1}^{m}{}_\tau\, (x_l)^k \underset{m}{\to} B, \tag{15}$$

то

$$\sum_{l=1}^{n_m}{}_\tau\, x_l^{k+1} \underset{m}{\to} +\infty \quad \text{или} \quad \sum_{l=1}^{n_m}{}_\tau\, x_l^{k+1} \underset{m}{\to} -\infty. \tag{16}$$

Таким образом, в силу (12), перестановка β также удовлетворяет условию (14). Не ограничивая общность можно считать, что

$$\sum{}_\beta\, x_l^{k+1} = +\infty. \tag{17}$$

Покажем, что тогда для всякой перестановки σ, удовлетворяющей условию (3), должно выполняться равенство

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}_\sigma\, x_l^{k+1} = +\infty. \tag{18}$$

Действительно, в противном случае из (14) получим, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}{}_\sigma\, x_l^{k+1} = -\infty.$$

Далее положим $m_0 = 0$ и по индукции определим на p-ом шаге натуральные числа n_p и m_p так, чтобы выполнялись условия

$$\sigma(1, m_{p-1}) \subset \beta(1, n_p) \subset \sigma(1, m_p), \tag{19}$$

$$\left\| \sum_{l=1}^{n_p}{}_\beta (x_l)^k - B \right\| < \frac{1}{p}, \quad \sum_{l=1}^{n_p}{}_\beta\, x_l^{k+1} > 0, \tag{20}$$

$$\left\| \sum_{l=1}^{m_p}{}_\sigma (x_l)^k - B \right\| < \frac{1}{p}, \quad \sum_{l=1}^{m_p}{}_\sigma\, x_l^{k+1} < 0. \tag{21}$$

Теперь определим перестановку τ

$$\tau: (m_{p-1}+1,\ n_p) \longleftrightarrow \beta(1, n_p) \setminus \sigma(1, m_{p-1}) \quad \forall\ p,$$

$$\tau: (n_p+1,\ m_p) \longleftrightarrow \sigma(1, m_p) \setminus \beta(1, n_p) \quad \forall\ p.$$

Из (20), (21) и определения τ вытекает, что

$$\sum_{i=1}^{n_p}{}_{\tau} (x_i)^k = \sum_{i=1}^{n_p}{}_{\beta} (x_i)^k \xrightarrow[p]{} B, \quad \sum_{i=1}^{n_p}{}_{\tau} x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^{n_p}{}_{\beta} x_i^{k+1} > 0,$$

$$\sum_{i=1}^{m_p}{}_{\tau} (x_i)^k = \sum_{i=1}^{m_p}{}_{\sigma} (x_i)^k \xrightarrow[p]{} B, \quad \sum_{i=1}^{m_p}{}_{\tau} x_i^{k+1} = \sum_{i=1}^{m_p}{}_{\sigma} x_i^{k+1} < 0.$$

Но это противоречит (15) и (16). Итак, утверждение (18) справедливо.

Очевидно, что подобным образом можно показать, что если хотя бы для одной перестановки τ с условиями (15) и (16) имеем

$$\sum_{i=1}^{n_m}{}_{\tau} x_i^{k+1} \xrightarrow[m]{} +\infty, \tag{22}$$

то этот же знак будет реализовываться для всех перестановок с условиями (15), (16).

А теперь построим перестановку τ с условием (15), но для которой не выполняется (22). Этим противоречием будет завершено доказательство пункта 1° леммы 2.

Так как по теореме П. Леви-Штейница M^k — плоское множество и A, $B \in M^k$, то найдется такая перестановка σ, что

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{\sigma} (x_i)^k = A + 2\cdot(B - A). \tag{23}$$

Положим $n_0 = 0$, $m_0 = 0$, $m_0' = 0$.

Определим по индукции на p-ом шаге натуральные числа n_p, m_p, m_p' так, что

$$\alpha(1, m'_{p-1}) \subset \sigma(1, n_p) \subset \beta(1, m_p) \subset \alpha(1, m'_p), \tag{24}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{n_p}{}_{\sigma} (x_i)^k - (A + 2(B - A)) \right\| < \frac{1}{p}, \tag{25}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_p}{}_{\beta} (x_i)^k - B \right\| < \frac{1}{p}, \quad \sum_{i=1}^{m_p}{}_{\beta} x_i^{k+1} > a^{k+1} + \sum_{i=1}^{n_p}{}_{\sigma} x_i^{k+1}, \tag{26}$$

$$\left\| \sum_{i=1}^{m_p'}{}_{\alpha} (x_i)^{k+1} - (a^k, \cdots, a^{k+1}) \right\| < \frac{1}{p}. \tag{27}$$

С помощью (24) можно определить перестановку τ так, что для любого $p = 1, 2, \cdots$

$$\tau\colon (n_{p-1} + m'_{p-1} - m_{p-1} + 1,\ n_p) \longleftrightarrow \sigma(n_{p-1} + 1,\ n_p) \setminus [\alpha(1, m'_{p-1}) \setminus$$

$$\setminus \beta(1, m_{p-1})],$$

$$\tau\colon (n_p + 1,\ n_p + m'_p - m_p) \longrightarrow \alpha(1, m'_p) \setminus \beta(1, m_p).$$

Из (23), (25—27) и определения τ вытекает, что

$$\sum_{l=1}^{n_p+m_p'-m_p}{}_{\tau}(x_l)^k=\sum_{l=1}^{n_p}{}_{\sigma}(x_l)^k+\sum_{l=1}^{m_p'}{}_{\alpha}(x_l)^k-\sum_{l=1}^{m_p}{}_{\beta}(x_l)^k\xrightarrow[p]{}B,$$

$$\sum_{l=1}^{n_p+m_p'-m_p}{}_{\tau}x_l^{k+1}=\sum_{l=1}^{n_p}{}_{\sigma}x_l^{k+1}+\sum_{l=1}^{m_p'}{}_{\alpha}x_l^{k+1}-\sum_{l=1}^{m_p}{}_{\beta}x_l^{k+1}<\frac{1}{p}\ \forall p.$$

Но это находится в противоречии с (15) и (22).

Утверждение 1° леммы 2 доказано,

2°. Пусть $y\in s$ и для любого $k=1, 2,\cdots$ существует перестановка τ_k такая, что $\sum_{\tau_k}(x_l)^{k+1}=(y)^{k+1}$.

Положим $n_0=0$. Определим по индукции на k-ом шаге число n_k так, что

$$\tau_{k-1}(1,\ n_{k-1})\subset\tau_k(1,\ n_k),\tag{28}$$

$$\left\|\sum_{l=1}^{n_k}{}_{\tau_k}(x_l)^{k+1}-(y)^{k+1}\right\|<\frac{1}{k\cdot B_{k+1}},\ \|(x_i)^{k+1}\|<\frac{1}{(k+1)B_{k+1}}\ \forall\, i>n_k.\tag{29}$$

Обозначим $\Omega_k=\tau_k(1,\ n_k)\setminus\tau_{k-1}(1,\ n_{k-1})$.

Из (28) и (29) следует

$$\left\|\sum_{l\in\Omega_k}(x_l)^k\right\|=\left\|\sum_{l=1}^{n_k}{}_{\tau_k}(x_l)^k-\sum_{l=1}^{n_{k-1}}{}_{\tau_{k-1}}(x_l)^k\right\|\leqslant\frac{1}{k\cdot B_k}+\frac{1}{(k-1)B_k}.\tag{30}$$

Из следствия 1 и из (29), (30) вытекает существование перестановки τ такой, что

$$\tau:(n_{k-1}+1,\ n_k)\to\Omega_k\ \forall\ k\geqslant1$$

и

$$\left\|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{m}{}_{\tau}(x_l)^k\right\|\leqslant\max_{n_{k-1}<l<n_k}\|(x_{\tau(l)})^k\|\cdot B_k+\left\|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}{}_{\tau}(x_l)^k\right\|\cdot B_k=$$

$$=\max_{l\in\Omega_k}\|(x_l)^k\|\cdot B_k+\left\|\sum_{l\in\Omega_k}(x_l)^k\right\|\cdot B_k\leqslant B_k\left(\frac{2}{k\cdot B_k}+\frac{1}{(k-1)B_k}\right)<\frac{3}{k-1}$$

для любого m, $n_{k-1}<m<n_k$.

При $p>k$ из (29) и того, что если $x\in s$, то $\|(x)^k\|\leqslant\|(x)^{p+1}\|$, получаем

$$\left\|\sum_{l=1}^{n_p}{}_{\tau}(x_l)^k-(y)^k\right\|\leqslant\left\|\sum_{l=1}^{n_p}{}_{\tau}(x_l)^{p+1}-(y)^{p+1}\right\|=$$

$$=\left\|\sum_{i=1}^{n_p}{}_{\tau_p}(x_l)^{p+1}-(y)^{p+1}\right\|<\frac{1}{p},$$

$$\left\|\sum_{i=n_{p-1}+1}^{m}{}_{\tau}(x_l)^k\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=n_{p-1}+1}^{m}{}_{\tau}(x_l)^p\right\|\leqslant\frac{3}{p-1},\ n_{p-1}<m\leqslant n_p.$$

Отсюда вытекает сходимость ряда $\sum\limits_{1}^{\infty} (x_i)^k$ и $\sum\limits_{1}^{\infty} (x_i)^k = (y)^k$ $(\forall\, k)$.

Следовательно $\sum x_i = y$ и $y \in M$. Утверждение 2° леммы 2 доказано.

3°. Включение $(M)^k \subset M^k$ $\forall\, k$ очевидно.

Зафиксируем i и докажем, что $(M^i) \supset M^i$. Пусть $(y^1, \cdots, y^i) \in M^i$. Поскольку M—непустое множество, то, очевидно, что таковы же все M^k и тогда в силу 1° существует такое y^{i+1}, что $(y^1, \cdots, y^i, y^{i+1}) \in M^{i+1}$. Аналогично рассуждая и дальше, мы получим бесконечный вектор $y = (y^1, \cdots, y^i, \cdots)$, удовлетворяющий условиям $(y)^k \in M^k$ $\forall\, k$ и, следовательно, по пункту 2° $y \in M$, а потому $(y)^i \in (M)^i$.

Доказательство теоремы 2.

Пусть $\operatorname{card} M(\sum x_i) = 1$. В силу пункта 3° леммы 2 имеем для любого k, $\operatorname{card} M^k = 1$ и тогда по теореме П. Леви—Е. Штейница ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (x_i)^k$ безусловно сходится в R^k, а значит и покоординатно. Отсюда сразу следует безусловная сходимость ряда $\sum x_i$ в s. Обратная часть утверждения теоремы 2 очевидна.

Замечание. Лемма 2 доставляет нам другое доказательство теоремы С. Л. Троянски (см. [5]), которая утверждает, что для условно сходящегося ряда $\sum x_i$ в s его множество сумм M является смещенным подпространством.

В самом деле, если $x, y \in M$ и z—произвольная точка, лежащая на прямой, проходящей через x и y, то ясно, что $(x)^k \in M^k$, $(y)^k \in M^k$ и так как M^k—смещенное подпространство (теорема П. Леви—Е. Штейница), то $(z)^k \in M^k$. Поскольку это справедливо для каждого натурального k, в силу пункта 2° леммы 2 имеем $z \in M$.

В заключение автор выражаат свою благодарность Р. И. Овсепяну за постановку задач и руководство в процессе их решения.

Ереванский государственный
университет

Поступила 25.I.1981
и 15.V.1981

Ռ. Մ. ՄԵՀՐԱԲՅԱՆ. Ռիմանի թվային շարքերի տեղափոխելիության վերաբերյալ թեորեմի ընդհանրացման մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ապացուցվում է, որ անվերջ թվային հաջորդականությունների s *տարածությունում* $\operatorname{card} \left\{ x \in s : \exists\sigma, \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x \right\} = 1$ *պայմանից հետևում է* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *շարքի տեղափոխելիությունը, իսկ ֆունկցիոնալ շարքերի համար ուժեղացվում է Բ. Ս. Կաշինի բացասական օրինակը։*

R. M. MEHRABIAN. *On a generalization of Rieman's theorem about unconditional convergence of number series* (summary)

It is shown in the space s of infinite sequences of numbers the condition $\operatorname{card} \{x \in s : \exists\sigma, \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} = x\} = 1$ implies unconditional convergence of the series $\sum\limits_{1}^{\infty} x_n$.

It is shown also that this is not the case in the space $C([0,1]$ (generalization of the theorem of B. S. Kashin).

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Steinitz*. Bedingt konvergent Reihen und konvexe systeme, J. reine u. angew Math., 143, 1913, 128—175.
2. *P. Levy*. Sur les series semi-convergents, Nouv. ann. d. Math., 5. 1905, 506—511.
3. *М. И. Кадец*. Об одном свойстве ломаных в n-мерном пространстве, УМН, VIII, вып. 1, 1953, 139—143.
4. *Б. С. Кашин*. Об одном свойстве функциональных рядов, Матем. заметки, 11, вып. 5, 1972, 481—490.
5. *С. Троянски*. Об условно сходящихся рядах и некоторых F-пространствах. Теор. функций, функц. анализ и их приложения, вып. 5, 1967, 102—107.