ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

М. А. МКРТЧЯН, А. П. ЮЖАКОВ

МНОГОГРАННИК НЬЮТОНА И РЯДЫ ЛОРАНА РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ n ПЕРЕМЕННЫХ

Как известно, функция, голоморфная в n-круговой области пространства $\mathbf{C}^n$, разлагается в этой области в кратный ряд Лорана. Коэффициенты ряда Лорана выражаются интегралом (см. [1], стр. 41) и не всегда могут быть вычислены эффективно. В работах [2—5](см. также [6], §§ 20,21), посвященных применению кратного логарифмического вычета к неявным функциям и системам алгебраических уравнений, рассмотрены некоторые случаи, когда вычет рациональной функции (коэффициент при $z_1^{-1}\ldots z_n^{-1}$ соответствующего ряда Лорана) выражается рационально через коэффициенты числителя и знаменателя.

В настоящей заметке исследуется вопрос о существовании различных разложений Лорана рациональной функции n переменных и вычислении их коэффициентов. Оказывается этот вопрос можно связать с понятием многогранника Ньютона многочлена. Показано (теоремы 1, 2), что каждой вершине многогранника Ньютона многочлена Q соответствует n-круговая область с центром в начале координат, в которой рациональная функция $\frac{P}{Q}$ разлагается в ряд Лорана, причем коэффициенты ряда выражаются рационально через коэффициенты многочленов P, Q. Заметим, что случаи, встречающиеся в [2—5], охватываются теоремой 1. Как и в [2—5] выписываются явные формулы ((1.4), (1.5)). Полученные результаты позволяют оценить снизу размерность группы гомологий $H_n(\mathbf{C}^n\setminus\{z: Q(z)=0\})$ числом вершин многогранника Ньютона, не лежащих на координатных плоскостях (теорема 3, следствие 1).

§ 1. Обозначения. Основные результаты

Обозначим $N, Z, R, \mathbf{C}$, соответственно, множества натуральных (включая 0), целых, вещественных, комплексных чисел. Если M — произвольное множество, то $M^n=\{x=(x_1,\cdots,x_n): x_j\in M\}$. $H_n=\{z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdots z_n^{\alpha_n}: z\in\mathbf{C}^n, \alpha\in Z^n\}$ — множество мономов от n переменных.

Определение 1. Линейное отношение порядка $\succ$ на множестве H_n назовем мультипликативным, если из условия $z^\alpha\succ z^\beta$ следует $z^{\alpha+\mu}\succ z^{\beta+\mu}$ для любого $\mu\in Z^n$. Здесь $\alpha+\beta=(\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_n+\beta_n)$.

Определение 2. Многогранником Ньютона многочлена

$$Q(z)=\sum_\alpha a_\alpha z^\alpha \tag{1.1}$$

называется выпуклая оболочка в R^n множества $\{\alpha\in Z^n: a_\alpha\neq 0\}$. Многогранник Ньютона многочлена Q обозначим $\mathcal{N}(Q)$.

Предложение 1. *Пусть для члена* $a_\beta z^\beta$ *многочлена* (1.1) *на остове* $\Gamma_\beta = \{z \in \mathbf{C}^n: |z_1| = \rho_1, \cdots, |z_n| = \rho_n\}$ *выполняется неравенство*

$$|a_\beta z^\beta| > |g(z)|, \tag{1.2}$$

где $g(z) = Q(z) - a_\beta z^\beta$. *Тогда коэффициенты ряда Лорана*

$$f(z) = \sum_{\alpha \in Z^n} c_\alpha z^\alpha \tag{1.3}$$

рациональной функции $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ (*P — произвольный многочлен*) *в окрестности* Γ_β *выражаются абсолютно сходящимся рядом*

$$c_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \mathfrak{M} \left[\frac{P(z)}{a_\beta z^{\beta+\alpha}} \left(\frac{g(z)}{a_\beta z^\beta} \right)^k \right], \tag{1.4}$$

где $\mathfrak{M}$ — *линейный функционал, ставящий в соответствие многочлену Лорана его свободный член.*

Формулу (1.4) можно также записать в виде

$$c_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a_\beta^{k+1} \prod_{j=1}^{n} [\alpha_j + \beta_j (k+1) - 1]!} \times$$

$$\times \left. \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + (k+1)(\beta_1 + \cdots + \beta_n) - n} [P(z) g^k(z)]}{\partial z_1^{\alpha_1 + (k+1)\beta_1 - 1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n + (k+1)\beta_n - 1}} \right|_{z=0}.$$

Теорема 1. *Пусть* $a_\beta z^\beta$ — *старший член многочлена* (1.1) *при некотором мультипликативном отношении порядка* $\succ$ *в* H_n. *Тогда*

а) *существуют числа* $\rho_1, \cdots, \rho_n$, $\rho_j > 0$ *такие, что на остове* $\Gamma_\beta = \{z: |z_j| = \rho_j,\ j = 1, \cdots, n\}$ *выполняется неравенство* (1.2);

б) *в ряде* (1.4) *для каждого* α *лишь конечное число членов отлично от нуля, т. е. коэффициенты ряда Лорана рациональной функции* $f = \dfrac{P}{Q}$ *в окрестности* Γ_β *выражаются рационально через коэффициенты многочленов* P *и* Q.

Выбор радиусов ρ_j остова Γ_β описан в § 2 при доказательстве теоремы 1.

Замечание 1. Если $f = P / \prod_{j=1}^{m} Q_j$ и $a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}$ — старший член многочлена Q_j, $j = 1, \cdots, m$ для некоторого мультипликативного отношения порядка в H_n, то, очевидно, $a_\beta z^\beta = \prod_{j=1}^{n} a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}$ является старшим членом многочлена $Q = \prod_{j=1}^{m} Q_j$ для этого отношения порядка. В этом случае коэффициенты c_α ряда Лорана функции f в окрестности Γ_β можно вычислять как по формуле (1.4), так и по формуле

$$c_\alpha = \sum_{k_1, \ldots, k_m = 0}^{\infty} \mathfrak{M}\left[P \prod_{j=1}^{m} \frac{(-1)^{k_j}}{a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}} \left(\frac{g_j(z)}{a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}} \right)^{k_j} \right], \tag{1.5}$$

где $g_j(z) = Q_j(z) - a_{\beta(j)} z^{\beta(j)}$. При этом в ряде (1.5) также для каждого α содержится лишь конечное число членов отличных от нуля.

Замечание 2. В работах [2—5] для формул типа (1.5) в каждом случае даются конкретные оценки числа слагаемых, отличных от нуля. Эти оценки неявно опираются на некоторые частные случаи мультипликативной упорядоченности.

Замечание 3. Из формулы (1.4) следует, что если в «старшем» члене $a_\beta z^\beta$ показатель $\beta_j = 0$, то ряд Лорана (1.3) функции f в окрестности Γ_β не содержит отрицательных степеней переменной z_j.

Теорема 2. *Член $a_\beta z^\beta$ многочлена Q является старшим при некотором мультипликативном отношении порядка тогда и только тогда, когда точка β является вершиной многогранника Ньютона.*

Таким образом, каждой вершине многогранника Ньютона знаменателя рациональной функции соответствует свое лорановское разложение этой функции. При этом коэффициенты рядов Лорана выражаются рационально через коэффициенты числителя и знаменателя.

Остов Γ_β становится n-мерным циклом в $\mathbf{C}^n \setminus \{z\colon Q(z) = 0\}$, если на нем ввести некоторую ориентацию.

Обозначим $M(Q)$ — множество вершин многогранника Ньютона, не лежащих на координатных плоскостях.

Теорема 3. *Циклы Γ_β, $\beta \in M(Q)$ гомологически независимы в $\mathbf{C}^n \setminus \{z\colon Q(z) = 0\}$. Цикл $\Gamma_\beta \sim 0$ в $\mathbf{C}^n \setminus \{z\colon Q(z) = 0\}$, если хотя бы для одного $j \in \{1, \cdots, n\}$ $\beta_j = 0$.*

Отсюда следует, что циклы Γ_β, $\beta \in M(Q)$ образуют базис некоторой подгруппы группы $H_n(\mathbf{C}^n \setminus \{z\colon Q(z) = 0\})$.

Следствие 1. *Размерность группы гомологий $H_n(\mathbf{C}^n \setminus \{Q(z) = 0\})$ не меньше мощности множества $M(Q)$, т. е. числа вершин многогранника Ньютона многочлена $Q(z)$, не лежащих в координатных плоскостях.*

§ 2. Доказательства. Вспомогательные утверждения

Доказательство предложения 1. Из неравенства (1.2) следует, что функция $f = \dfrac{P}{Q}$ голоморфна в окрестности Γ_β и, следовательно, разлагается там в ряд Лорана (1.3) с коэффициентами (см. [1], стр. 41).

$$c_\alpha = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\beta} \frac{f(z)\, dz}{z^{\alpha + I}}, \tag{2.1}$$

где $I = (1, \ldots, 1)$.

В силу (1.2) ряд геометрической прогрессии

$$\frac{P(z)}{z^{\alpha+I} Q(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{P(z)}{a_\beta z^{\beta+\alpha+I}} \left(\frac{g(z)}{a_\beta z^\beta} \right)^k$$

равномерно и абсолютно сходится на Γ_β. Подставляя его в (2.1), получим

$$c_\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\beta} \frac{P(z)}{a_\beta z^{\nu+\beta+I}} \left(\frac{g(z)}{a_\beta z^\beta}\right)^k dz$$

или (1.4), поскольку $\int_{\Gamma_\beta} z^\alpha dz = (2\pi i)^n$, если $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = -1$, и $\int_{\Gamma_\beta} z^\alpha dz = 0$, если $\alpha \in Z^n$, $\alpha \neq (-1, \cdots, -1)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть точка $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n)$ является вершиной многогранника Ньютона $N(Q)$ многочлена (1.1). Так как $N(Q)$ — выпуклый, то существует опорная гиперплоскость $L = \{x \in R^n: \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = d\}$ такая, что $N(Q) \cap L = \{\beta\}$. Можно предполагать, что точки $x \in N(Q)$, $x \neq \beta$ удовлетворяют неравенству $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n < d$. Тогда для членов $a_\alpha z^\alpha \neq a_\beta z^\beta$ многочлена (1.1) имеет место неравенство

$$\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_n \alpha_n < \lambda_1 \beta_1 + \cdots + \lambda_n \beta_n. \tag{2.2}$$

Введем на H_n отношение порядка $\succ$ следующим образом. Будем полагать $z^\beta \succ z^\alpha$, если существует индекс $j \in \{1, \cdots, n\}$ такой, что $\lambda_i \alpha_i + \cdots + \lambda_i \alpha_i = \lambda_1 \beta_1 + \cdots + \lambda_i \beta_i$ для $i = j+1, \cdots, n$ и $\lambda_1 \alpha_1 + \cdots + \lambda_j \alpha_j < \lambda_1 \beta_1 + \cdots + \lambda_j \beta_j$. Очевидно это отношение порядка является мультипликативным и для него в силу наравенства (2.2) $a_\beta z^\beta$ является старшим членом многочлена $Q(z)$.

Обратно, пусть $a_\beta z^\beta$ является старшим членом многочлена (1.1) при некотором мультипликативном отношении порядка $\succ$ в H_n. Предположим, что β не является вершиной $N(Q)$. Так как многогранник $N(Q)$ выпуклый, а его вершины $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(k)}$ имеют целочисленные координаты, то найдутся неотрицательные рациональные числа $q_1, \cdots, q_k$ такие, что $q_1 + \cdots + q_k = 1$ и $q_1 \alpha^{(1)} + \cdots + q_k \alpha^{(k)} = \beta$. Умножая эти равенства на общий знаменатель s чисел $q_1, \cdots, q_k$ получим равенства

$$p_1 \alpha^{(1)} + \cdots + p_k \alpha^{(k)} = s\beta, \quad p_1 + \cdots + p_k = s, \tag{2.3}$$

где $p_1, \cdots, p_k$ — неотрицательные целые числа. Так как $a_\beta z^\beta$ — старший член многочлена Q при данном отношении порядка, то $z^\beta \succ z^{\alpha^{(j)}}$, $j = 1, \cdots, k$. Отсюда и из (2.3), учитывая мультипликативность $\succ$, имеем

$$z^{s\beta} = z^{p_1\beta + \cdots + p_k\beta} \succ z^{p_1\alpha^{(1)} + \cdots + p_k\alpha^{(k)}} = z^{s\beta}.$$

Противоречие.

При доказательстве теоремы 1 нами будет использоваться теорема 2 и следующая

Лемма. *Если для любых двух элементов $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_m)$ множества $E \subset N^m$, $m \geq 2$, существуют индексы $i, j \in \{1, \cdots, m\}$ такие, что $\alpha_i > \beta_i$, $\alpha_j > \beta_j$, то множество E конечно.*

Доказательство проведем индукцией по m. Пусть $m = 2$. Так как в любом подмножестве чисел из N есть наименьшее число, то найдутся

$\lambda=(\lambda_1, \lambda_2)$, $\gamma=(\gamma_{1}, \gamma_{2})\in E$ такие, что $\lambda_1\leqslant\alpha_1$, $\gamma_2\leqslant\alpha_2$ для любого $\alpha=(\alpha_1, \alpha_2)\in E$. Тогда согласно условию леммы $\lambda_1\leqslant\alpha_1\leqslant\gamma_1$, $\gamma_2\leqslant\alpha_2\leqslant\lambda_2$ для любого $\alpha\in E$, т. е. E конечно.

Предположим теперь, что лемма верна для $m-1$, $m>2$ и докажем ее для m. Фиксируем произвольный элемент $\lambda=(\lambda_1,\cdots, \lambda_m)\in E$. Из условия леммы следует, что $E=\bigcup\limits_{i=1}^{m}\bigcup\limits_{j=1}^{\lambda_i} E_{ij}$, где $E_{ij}=\{\alpha\in E\colon \alpha_i=j\}$. Но по предположению индукции E_{ij} конечно. Значит E также конечно.

Доказательство теоремы 1. а). По теореме 2 β является вершиной многограника Ньютона $N(Q)$ многочлена (1.1). Возьмем $\rho_1=t^{\lambda_1},\cdots, \rho_n=t^{\lambda_n}$, где $\lambda_1,\cdots, \lambda_n$ — коэффициенты уравнения опорной гиперплоскости к $N(Q)$ в точке β, $t>0$. В силу неравенства (2.2) при t достаточно большом ($t>t_0$) на остове $\Gamma_\beta=\{z\in\mathbf{C}^n\colon |z_j|=\rho_j,\ j=1,\cdots$ $\cdots, n\}$ будет выполняться неравенство

$$|a_\alpha z^\alpha|=|a_\alpha|\, t^{\lambda_1\alpha_1+\cdots+\lambda_n\alpha_n}<\frac{1}{m}|a_\beta z^\beta|=\frac{1}{m}\,|a_\beta|\, t^{\lambda_1\beta_1+\cdots+\lambda_n\beta_n},$$

где $\alpha\neq\beta$, m — число членов многочлена $g(z)$, и, следовательно, неравенство (1.2).

б). Ввиду линейности функционала $\mathfrak{M}$ достаточно рассмотреть случай, когда $P(z)=z^\mu$. Пусть $g(z)=\sum\limits_{j=1}^{m} a_{\alpha(j)}\, z^{\alpha(j)}$. Тогда k-й член ряда (1.4) можно представить в виде

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=k}\frac{(-1)^k\, a_{\alpha(1)}^{k_1}\cdots a_{\alpha(m)}^{k_m}\, k!}{a_\beta^{k+1}\, k_1!\cdots k_m!}\,\mathfrak{M}\left[\frac{z^\mu}{z^{\beta+\alpha}}\left(\frac{z^{\alpha(1)}}{z^\beta}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{z^{\alpha(m)}}{z^\beta}\right)^{k_m}\right],$$

где m—число членов многочлена $g(z)$.

Согласно определению функционала $\mathfrak{M}$ значение

$$\mathfrak{M}\left[z^{\mu-\beta-\alpha}\,(z^{\alpha(1)-\beta})^{k_1}\cdots(z^{\alpha(m)-\beta})^{k_m}\right]\neq 0$$

тогда и только тогда, когда

$$z^{\mu-\beta-\alpha}(z^{\alpha(1)-\beta})^{k_1}\cdots(z^{\alpha(m)-\beta})^{k_m}=z^0=1. \tag{2.4}$$

Множество E наборов $(k_1,\cdots, k_m)$, определяемых условием (2.4)' удовлетворяет условиям леммы. Действительно, если $(p_1,\cdots, p_m)\in E$, $(p_1,\cdots, p_m)\neq(k_1,\cdots, k_m)\in E$, то из (2.4) следует, что

$$(z^{\alpha(1)-\beta})^{k_1-p_1}\cdots(z^{\alpha(m)-\beta})^{k_m-p_m}=1. \tag{2.5}$$

С другой стороны, так как $a_\beta z^\beta$ — старший член многочлена (1.1), то $z^{\alpha(j)-\beta}\to 1$, $j=1,\cdots, m$. Таким образом, (2.5) возможно лишь тогда, когда $k_i-p_i>0$ и $k_j-p_j<0$ для некоторых $i, j\in\{1,\cdots, m\}$. По лемме E конечно, следовательно множество $\{k=k_1+\cdots+k_m\colon (k_1,\cdots$ $\cdots, k_m)\in E\}$ конечно.

Из теорем 1, 2 вытекает

Предложение 2. *Если β — вершина многогранника Ньютона многочлена Q, то*

$$J_\beta=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_\beta}\frac{P(z)\,dz}{Q(z)}=c_{-I}=\sum_{k>0}(-1)^k\mathfrak{M}\left[\frac{P(z)}{a_\beta\, z^{\beta-I}}\left(\frac{g(z)}{a_\beta\, z^\beta}\right)^k\right]. \quad (2.6)$$

При этом в последней сумме лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Предложение 3. *Для любых* $\alpha, \beta\in M(Q)$ *интеграл*

$$J_{\alpha\beta}=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma_\beta}\frac{a_\alpha\, z^{\alpha-I}\,dz}{Q(z)}=\begin{cases}1, & \text{если } \alpha=\beta\\ 0, & \text{если } \alpha\neq\beta.\end{cases} \quad (2.7)$$

Доказательство. Согласно определению $M(Q)$ из $\alpha\in M(Q)$ следует $\alpha_j\geqslant 1$, $j=1,\cdots,m$. Положим в (2.6) $P(z)=a_\alpha z^{\alpha-I}$, тогда члены ряда (2.6) можно представить в вид

$$\sum_{k_1+\cdots+k_m=k}\frac{(-1)^k a_\alpha a_{\alpha(1)}^{k_1}\cdots a_{\alpha(m)}^{k_m}\,k!}{k_1!\cdots k_m!\,a_\beta^{k+1}}\,\mathfrak{M}\left[\frac{z^{\alpha-I}}{z^\beta}\left(\frac{z^{\alpha(1)}}{z^\beta}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{z^{\alpha(m)}}{z^\beta}\right)^{k_m}\right]. \quad (2.8)$$

Так как β — вершина $N(Q)$, то по теореме 2 $a_\beta z^\beta$ является старшим членом многочлена Q для некоторого мультипликативного отношения порядка $\succ$. Тогда $z^\beta\succ z^{\alpha(j)}$, $j=1,\cdots,m$, $z^\beta\succ z^\alpha$, если $\alpha\neq$ Следовательно

$$\mathfrak{M}\left[\frac{z^\alpha}{z^\beta}\left(\frac{z^{\alpha(1)}}{z^\beta}\right)^{k_1}\cdots\left(\frac{z^{\alpha(m)}}{z^\beta}\right)^{k_m}\right]=1,$$

если $\alpha=\beta$, а $k_1=\cdots=k_m=k=0$ и равно 0, если $\alpha\neq\beta$, либо $\alpha=\beta$ но $k_1+\cdots+k_m=k>0$. Отсюда и из (2.8) и (2.6) вытекает (2.7),

Доказательство теоремы 3. Докажем, что циклы Γ_β $\beta\in M(Q)$, гомологически независимы. Допустим противное, что существуют числа λ_β, $\beta\in M(Q)$ не все равные нулю, для которых цикл $\Gamma=\sum_{\beta\in M(Q)}\lambda_\beta\Gamma_\beta\sim 0$ в $\mathbf{C}^n\setminus\{z:Q(z)=0\}$. Пусть $\lambda_\alpha\neq 0$. Так как форма $\omega_\alpha=a_\alpha z^{\alpha-I}\,dz/Q(z)$ голоморфна и замкнута в $\mathbf{C}^n\setminus\{z:Q(z)=0\}$, то по теореме Стокса (см. [1]) $\int\limits_\Gamma\omega_\alpha=0$. С другой стороны, из предложения 3 следует, что

$$\int\limits_\Gamma\omega_\alpha=\sum_{\beta\in M(Q)}\lambda_\beta\int\limits_{\Gamma_\beta}\omega_\alpha=\lambda_\alpha\neq 0.$$

Противоречие.

Пусть теперь β — вершина $N(Q)$ и $\beta_j=0$. На остове Γ_β выполняется неравенство (1.2). Так как $a_\beta z^\beta$ не зависит от z_j, то по принципу максимума при фиксированных $z_k\in\{|z_k|=\rho_k\}$, $k\neq j$, неравенство (1.2) выполняется при всех $z_j\in\{|z_j|\leqslant\rho_j\}$. Следовательно, $B=\{z:|z_k|=\rho_k,\ k\neq j,\ |z_j|\leqslant\rho_j\}\subset\mathbf{C}^n\setminus\{z:Q(z)=0\}$. Но при соответствующей ориентации Γ_β и B цикл $\Gamma_\beta=\partial B$. Таким образом, $\Gamma_\beta\sim 0$ в $\mathbf{C}^n\setminus\{z:Q(z)=0\}$.

Институт физики СО АН СССР

Поступила 27.IV.1981

Մ. Ա. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Ա. Պ. ՅՈՒԺԱԿՈՎ. Նյուտոնի բազմանիստ և n փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիայի Լորանի շարքեր *(ամփոփում)*

Քննարկվում է n փոփոխականի ռացիոնալ ֆունկցիայի տարբեր Լորանի շարքերի գոյության և նրանց գործակիցների հաշվման հարցերը։

Այս խնդրի մասնակի լուծումը կապված է $Q(z)=\sum c_\alpha z^\alpha$ բազմանդամի $N(Q)$ Նյուտոնի բազմանիստի հասկացության հետ ($\{\alpha\in R^n : c_\alpha\neq 0\}$) բազմության ուռուցիկ թաղանթը R^n-ում),

Ցույց է տրվում (թեորեմներ 1, 2), որ Նյուտոնի բազմանիստի յուրաքանչյուր գագաթին համապատասխանում է n-շրջանային տիրույթ, որում P/Q ռացիոնալ ֆունկցիան վերլուծվում է Լորանի շարքի, ընդ որում շարքի գործակիցները արտահայտվում են P և Q բազմանդամների գործակիցներով ռացիոնալորեն։

M. A. MKRTCHIAN, A. P. JUZAKOV. *The Newton polytope and the Laurent series of rational functions of n variables* (summary)

The questions of existence of Laurent series and of calculating the coefficients of these series are considered.

It is shown (theorems 1, 2) that to each vertex of the Newton polytope of a polynomial $a(z)$ corresponds an n-circular domain. Where the rational function P/Q can be expanded to Laurent series. The coefficients of this series are expressed rationally by coefficients of polynomials P and Q.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Б. В. Шабат*. Введение в комплексный анализ, ч. 2, М., «Наука», 1976.
2. *А. П. Южаков*. О применении кратного логарифмического вычета для разложения неявных функций в степенные ряды, Мат. сб., № 2, 1975, 177—192.
3. *Л. А. Айзенберг*. Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и ее приложении к решению систем алгебраических уравнений, ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 505—508.
4. *Л. А. Айзенберг, А. К. Цих*. О применении многомерного логарифмического вычета к системам алгебраических уравнений, Сибирский матем. журн., 20, № 4, 1979, 699—703.
5. *А. П. Южаков*. О вычислении значений многочлена в решениях системы алгебраических уравнений, в кн.: «Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа», Красноярск, ИФ СО АН СССР, 1980, 197—214.
6. *Л. А. Айзенберг, А. П. Южаков*. Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, «Наука», 1979.