ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

Г. В. МИКАЕЛЯН

О СУЩЕСТВОВАНИИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ В КРУГЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМИ α-КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФУРЬЕ

1. Пусть $Z=\{z_k\}_1^\infty$ и $\beta=\{\beta_k\}_1^\infty$ — последовательности комплексных чисел, причем $z_k\neq 0$ и $z_k\to\infty$ при $k\to\infty$.

Следуя работе [1] Л. А. Рубеля и Б. А. Тейлора величины

$$c_0(r;\,Z:\beta)=\sum_{|z_n|<r}\log\frac{r}{|z_n|},$$

$$c_k(r;\,Z:\beta)=\frac{1}{2}\beta_k r^k+\frac{1}{2k}\sum_{|z_n|<r}\left[\left(\frac{r}{z_n}\right)^k-\left(\frac{\bar z_n}{r}\right)^k\right],$$

$$c_{-k}(r;\,Z:\beta)=\overline{c_k(r;\,Z:\beta)}\quad(k=1,2,\cdots),$$

где $r>0$, назовем коэффициентами Фурье, ассоциированными с последовательностью Z.

В той же работе [1] было доказано, что если для любого $r\in(0,+\infty)$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r;\,Z:\beta)|^2<+\infty,$$

то существует единственная целая функция $f(z)$ со следующими свойствами:

1°. $f(0)=1$, последовательность нулей $f(z)$ совпадает с Z.

2°. Последовательность коэффициентов Фурье функции $\log|f(re^{i\theta})|$ $(r>0)$ совпадает с $\{c_k(r;\,Z:\beta)\}$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$.

3°. В окрестности точки $z=0$ справедливо разложение

$$\log f(z)=\text{const}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k z^k.$$

2. Пусть $D^{-\alpha}$ $(-1<\alpha<+\infty)$ — интегро-дифференциальный оператор в смысле Римана-Лиувилля, т. е.

$$D^{-\alpha}f(x)\equiv\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}f(t)\,dt\quad(0<\alpha<+\infty),$$

$$D^0 f(x)\equiv f(x),$$

$$D^{-\alpha}f(x)\equiv\frac{d}{dx}\{D^{-(1+\alpha)}f(x)\}\quad(-1<\alpha<0),$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера.

В работе [3] была доказана следующая

Лемма. *Пусть функция* $f(z)(f(0)\neq 0)$ *с последовательностью нулей* $Z=\{z_n\}_1^\infty$ *аналитична в круге* $|z|<R$ $(0<R\leqslant+\infty)$. *Если в окрестности точки* $z=0$

$$\log f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k z^k,$$

то для любого $r\in(0, R)$ *и* $\alpha\in(-1, +\infty)$ *справедливо представление*

$$r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|f(re^{i\theta})|=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k^{(\alpha)}(r, f)\,e^{ik\theta},$$

где $c_k^{(\alpha)}(r,f)$ *определяются по формулам*

$$c_0^{(\alpha)}(r, f)\equiv\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx+\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\log|f(0)|,$$

$$c_k^{(\alpha)}(r, f)\equiv\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\beta_k r^k+\frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)}\times$$

$$\times\sum_{|z_n|<r}\left\{\left(\frac{r}{z_n}\right)^k\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}\,dx+\left(\frac{\bar z_n}{r}\right)^k\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\},$$

$$c_{-k}^{(\alpha)}(r, f)\equiv\overline{c_k^{(\alpha)}(r, f)}\quad(k=1, 2,\cdots).$$

Отметим, что когда $\alpha=0$ и $f(0)=1$, то

$$c_k^{(\alpha)}(r; f)\equiv c_k(r; Z{:}\ \beta)\ (k=0, \pm 1, \pm 2,\cdots).$$

3. Теперь допустим, что $Z=\{z_k\}_1^\infty$ и $\beta=\{\beta_k\}_1^\infty$ — последовательности комплексных чисел, причем $0<|z_k|\leqslant|z_{k+1}|<1$ и при фиксированном $\alpha\in(-1, +\infty)$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)^{1+\alpha}<+\infty. \tag{1}$$

Определение. *Для любого* $r\in(0, 1]$ *и* $\alpha\in(-1, +\infty)$ *величины*

$$c_0^{(\alpha)}(r; Z{:}\ \beta)\equiv\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\int_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx,$$

$$c_k^{(\alpha)}(r; Z{:}\ \beta)\equiv\frac{1}{2}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma(1+k+\alpha)}\beta_k r^k+$$

$$+\frac{1}{2\Gamma(1+\alpha)}\sum_{|z_n|<r}\left\{\left(\frac{r}{z_n}\right)^k\int\limits_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx+\left(\frac{\bar z_n}{r}\right)^k\int\limits_{\frac{|z_n|}{r}}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}, \tag{2}$$

$$c_{-k}^{(\alpha)}(r;\ Z:\ \beta)\equiv\overline{c_k^{(\alpha)}(r;\ Z:\ \bar\beta)}\quad (k=1,\ 2,\cdots),$$

назовем α-коэффициентами Фурье, ассоциированными с последовательностью Z.

Заметим, что при $r=1$ α-коэффициенты Фурье определяются как суммы рядов, которые сходятся ввиду условия (1).

Если для последовательности $Z=\{z_k\}$ условие (1) выполнено, то бесконечное произведение Бляшке—Джрбашяна (см. [2], гл. IX), где

$$W_\alpha(z;\ \zeta)=\int\limits_{|\zeta|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}dx-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+k)}\times$$

$$\times\left\{\zeta^{-k}\int\limits_0^{|\zeta|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx-\bar\zeta^k\int\limits_{|\zeta|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}dx\right\}z^k \tag{3}$$

$$(|z|<1,\ |\zeta|<1),$$

сходится в круге $|z|<1$ и представляет там аналитическую функцию, обращающуюся в нуль только на последовательности Z. $B_\alpha(z)$ совпадает с функцией Бляшке при $\alpha=0$.

Теорема. *Пусть $\{c_k^{(\alpha)}(r)\}\equiv\{c_k^{(\alpha)}(r;\ Z:\ \beta)\}$, $k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$ $\cdots$ — последовательность α-коэффициентав Фурье, ассоциированная с последовательностью Z, и пусть для некоторого $\alpha\in(-1,+\infty)$*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k^{(\alpha)}(1)|^2<+\infty. \tag{4}$$

Тогда существует единственная аналитическая в круге $|z|<1$ функция $f(z)$ со следующими свойствами:

1°. $f(0)=1$, *последовательность нулей $f(z)$ совпадает с Z.*

2°. *Последовательности коэффициентов Фурье функций $\log|f(re^{i\theta})|$ и $r^{-\alpha}D^{-\alpha}\log|f(re^{i\theta})|$ $(0<r<1)$ совпадают соответственно с $\{c_k^{(0)}(r)\}_{-\infty}^{+\infty}=\{c_k(r)\}_{-\infty}^{+\infty}$ и $\{c_k^{(\alpha)}(r)\}$.*

3°. *В окрестности точки $z=0$ справедливо разложение*

$$\log f(z)=\text{const}+\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k z^k. \tag{5}$$

Доказательство. Ввиду условия (4) ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty}c_k^{(\alpha)}(1)\,e^{ik\varphi}$$

по теореме Рисса-Фишера является рядом Фурье некоторой функции

$$\Phi_\alpha(e^{i\varphi}) \in L_2[-\pi, \pi].$$

Для $\alpha \in (-1, +\infty)$ введем в рассмотрение следующие функции:

$$S_\alpha(w; z) = \Gamma(1+\alpha)\left\{\frac{2}{\left(1-\frac{z}{w}\right)^{1+\alpha}} - 1\right\}, \tag{6}$$

$$Q_\alpha(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1} S_\alpha(w; z)\,\Phi_\alpha(w)\,\frac{dw}{w}\right\}, \tag{7}$$

$$f(z) = B_\alpha(z)\,Q_\alpha(z). \tag{8}$$

Функция $f(z)$ аналитична в круге $|z|<1$ и последовательность ее нулей совпадает с Z.

Поскольку

$$Q_\alpha(0) = \exp\left\{\frac{\Gamma(1+\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{|w|=1}\Phi_\alpha(w)\,\frac{dw}{w}\right\} =$$

$$= \exp\{\Gamma(1+\alpha)\,c_0^{(\alpha)}(1)\} = \prod_{n=1}^{\infty}\exp\left\{\int\limits_{|z_n|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right\}$$

и по (2) и (3)

$$B_\alpha(0) = \prod_{n=1}^{\infty}\exp\left\{-\int\limits_{|z_n|}^{1}\frac{(1-x)^\alpha}{x}\,dx\right\},$$

то

$$f(0) = B_\alpha(0)\,Q_\alpha(0) = 1.$$

Докажем теперь, что последовательность чисел

$$c_k(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log|f(re^{i\theta})|\,e^{-ik\theta}\,d\theta,\quad k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

и $\{c_k(r)\}_{-\infty}^{+\infty}$ совпадают.

Для этого, по лемме пункта 2, достаточно показать, что в окрестности нуля справедливо представление (5).

Из (2) и (3) будем иметь

$$\log B_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{z}{z_n}\right) - W_\alpha(z; z_n)\right] =$$

$$= \text{const} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-\frac{1}{z_n^k\,k} + \frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+k)}\,\times\right.$$

$$\left.\times\left\{z_n^{-k}\int\limits_0^{|z_n|}(1-x)^\alpha x^{k-1}dx - \bar{z}_n^{k}\int\limits_{|z_n|}^{1}(1-x)^\alpha x^{-k-1}\,dx\right\}\right] z^k$$

$$(|z| < |z_1|).$$

Поэтому

$$\frac{B_\alpha'(z)}{B_\alpha(z)}=\sum_{k=1}^{\infty} U_k^{(\alpha)} z^{k-1}, \text{ при } |z|<|z_1|, \tag{9}$$

где

$$U_k^{(\alpha)}=-\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(k)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{ z_n^{-k}\int_{|z_n|}^{1}(1-x)^{\alpha} x^{k-1}\,dx+\bar z_n^{k}\times\right.$$

$$\left.\times\int_{|z_n|}^{1}(1-x)^{\alpha} x^{-k-1}\,dx\right\}. \tag{10}$$

Далее из (6) и (7) получим

$$\frac{Q_\alpha'(z)}{Q_\alpha(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1}\Phi_\alpha(w)\frac{\partial}{\partial z}S_\alpha(w;z)\frac{dw}{w}=$$

$$=\frac{\Gamma(2+\alpha)}{\pi i}\int_{|w|=1}\frac{\Phi_\alpha(w)}{\left(1-\frac{z}{w}\right)^{2+\alpha}}\frac{dw}{w^2}. \tag{11}$$

Вычислим последний интеграл в (11):

$$\frac{\Gamma(2+\alpha)}{\pi i}\int_{|w|=1}\frac{w^{k-2}}{\left(1-\frac{z}{w}\right)^{2+\alpha}}dw=\frac{\Gamma(2+\alpha)}{\pi i}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+2+m)}{\Gamma(\alpha+1)\,\Gamma(m+1)}\times$$

$$\times\int_{|w|=1}w^{k-2-m}\,dw\, z^m=2\frac{\Gamma(\alpha+k+1)}{\Gamma(k)}z^{k-1}\ (|z|<1,\ k>0). \tag{12}$$

Поскольку

$$\int_{|w|=1}\frac{w^{-k}}{\left(1-\frac{z}{w}\right)^{2+\alpha}}\frac{dw}{w^2}=0,\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots,$$

то из (11) и (12) следует, что

$$\frac{Q_\alpha'(z)}{Q_\alpha(z)}=\sum_{k=1}^{\infty}V_k^{(\alpha)}z^{k-1}\ (|z|<1), \tag{13}$$

где

$$V_k^{(\alpha)}=2\,c_k^{(\alpha)}(1)\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(k)}=k\,\beta_k+$$

$$+\frac{\Gamma(1+\alpha+k)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(k)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{z_n^{-k}\int_{|z_n|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{k-1}\,dx+\bar z_n^{k}\int_{|z_n|}^{1}(1-x)^{\alpha}x^{-k-1}\,dx\right\}. \tag{14}$$

Замечая, что $U_k^{(\alpha)}+V_k^{(\alpha)}=k\,\beta_k$, из (9), (10), (13), (14) получим, что в окрестности точки $z=0$ имеет место разложение

$$\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{B'_n(z)}{B_n(z)} + \frac{Q'_n(z)}{Q_n(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,\beta_k\, z^{k-1}.$$

Тот факт, что последовательность коэффициентов Фурье функции $r^{-\alpha} D^{-\alpha} \log|f(re^{i\theta})|$ совпадает с $\{c_k^{(\alpha)}(r)\}_{-\infty}^{+\infty}$ $(0<r<1)$ следует из леммы.

Докажем единственность построеной нами функции. Допустим противное, то есть что существуют функции $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_1(0) = f_2(0) = 1$, с нулями Z и с коэффициентами Фурье

$$c_k(r, f_1) = c_k(r, f_2) = c_k(r) \quad (0<r<1).$$

Тогда для аналитической в круге $|z|<1$ функции

$$\varphi(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)} \quad c_k(r, \varphi) = 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

и поэтому $|\varphi(z)| \equiv 1$ $(|z|<1)$. Так как $\varphi(0) = 1$, то

$$\varphi(z) \equiv 1, \text{ т. е. } f_1(z) \equiv f_2(z).$$

Теорема полностью доказана.

Теперь приведем пример, который демонстрирует целесообразность введения α-коэффициентов Фурье.

Пусть для $z_n \in (0,1)$ и $\alpha = 1$ условие (1) выполнено и

$$\beta_k = -(k+1) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ z_n^{-k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)\, x^{k-1}\, dx + \bar{z}_n^{k} \int_{|z_n|}^{1} (1-x)\, x^{-k-1}\, dx \right\} + 2$$

$$(k = 1, 2, \cdots).$$

Тогда

$$c_k^{(1)}(1;\, Z{:}\ \beta) = \frac{1}{k+1} \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Если условие (1) при $\alpha = 0$ также выполнено, то вычисление показывает, что

$$c_k^{(0)}(1;\, Z{:}\ \beta) = \frac{1}{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} (z_n - z_n^k) + 1 \quad (k = 2, 3, \cdots),$$

а если (1) не выполнено, то просто $c_k^{(0)}(1;\, Z{:}\ \beta) = \infty$.

Таким образом, условие (4) при $\alpha = 1$ выполняется, а при $\alpha = 0$ не выполняется.

В заключение приношу свою благодарность М. М. Джрбашяну за постановку задачи и руководство.

Ереванский государственный
университет

[illegible]ла 2.VII.1981
[illegible]9.XII.1981

Գ. Վ. ՄԻՔԱՅԵԼՅԱՆ. Ֆուրյեի տրված α-գործակիցներով շրջանում անալիտիկ ֆունկցիայի գոյության մասին *(ամփոփում)*

Հոդվածում լուծվում է խնդիր Ֆուրյեի տրված α-գործակիցների ($-1<\alpha<+\infty$) հաջորդականություն ունեցող միավոր շրջանում անալիտիկ ֆունկցիայի կառուցման մասին։ $\alpha=0$ դեպքում ստացվում են Ֆուրյեի սովորական գործակիցները։ Լուծումը կայես հենվում է Ռուբել-Թեյլորի մի թեորեմի և Բլյաշկե-Ջրբաշյանի արտադրյալի վրա։

G. V. MIKAELIAN. *Existence of a function analytic in the disk having prescribed α-Fourier coefficients* (summary)

In the paper an analytic in the disk function with given sequence of α-Fourier coefficients ($-1<\alpha<+\infty$) is constructed. When $\alpha=0$ we obtain the ordinary Fourier coefficients. The solution is based on the theorem of Rubel—Taylor and Blaschke—Djrbashian products.

ЛИТЕРАТУРА

1. *L. A. Rubel, B. A. Taylor.* A. Fourier series method for meromorphic and entire functions, Bul. Soc. Math. France, 96, 1968, 53—96.
2. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. *Г. В. Микаелян.* О росте произведений Бляшке—Джрбашяна, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XVI, № 6, 1981.