ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVII, № 2, 1982 Математика

А. К. БАБАДЖАНЯНЦ, П. Б. МГОЯН

ОЦЕНКА ГОЛОМОРФНЫХ РЕШЕНИЙ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается система из n обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Правые части линейны по параметру и являются алгебраическими полиномами по неизвестным с голоморфными по аргументу коэффициентами. Предлагаются оценки области голоморфности локального решения по аргументу и оценки остаточных членов соответствующих тейлоровских разложений. Доказательство их основано на сведении нелинейной дифференциальной системы конечной размерности к счетной линейной дифференциальной системе.

1°. **Обозначения.** Символика и обозначения, используемые ниже, мало отличаются от стандартных. Здесь приводится небольшой их список. В неясных случаях следует обратиться к работам [1, 2].

Для введения обозначений используется символ $\overset{\text{def}}{=}$. Символы Z, R, C обозначают множества целых, вещественных и комплексных чисел соответственно. Если $i=(i_1,\cdots,i_n)\in Z^n$, то $|i|\overset{\text{def}}{=}i_1+\cdots+i_n$. Если $X=(x_1,\cdots,x_n)\in C^n$, то $X^i\overset{\text{def}}{=}x_1^{i_1}\cdots x_n^{i_n}$, $|X|\overset{\text{def}}{=}\max\{|x_1|,\cdots,|x_n|\}$. Если $m, n\in Z$, то $[m:n]\overset{\text{def}}{=}\{j\in Z|\ m\leqslant j\leqslant n\}$. Если $m, n\in Z$, то $C_n^m\overset{\text{def}}{=}n!/(m!\,(n-m)!$, если $n\geqslant m\geqslant 0$ и $C_n^m\overset{\text{def}}{=}1$ в остальных случаях. Если $m_0>m_1$, то $\sum\limits_{m=m_0}^{m_1}a_m\overset{\text{def}}{=}0$, $\prod\limits_{m=m_0}^{m_1}a_m\overset{\text{def}}{=}1$. Если f — функция аргумента t, то $d^0f/dt^0\overset{\text{def}}{=}f$. Если $\tau\in C$, $\rho\in[0,+\infty)$, то $V_\rho(\tau)\overset{\text{def}}{=}\{t\in C|\,|t-\tau|<\rho\}$.

Кроме векторов и матриц конечной размерности используются бесконечные векторы и матрицы (бесконечно число компонент). Рассматриваются только матрицы с конечными строками и столбцами (каждые строка и столбец содержат конечное число ненулевых элементов). Для бесконечных векторов и матриц используются формальные понятия суммы, произведения на число, произведения матриц и т. п., определяемые как в конечномерном случае — через соответствующие понятия для их компонент (см. [1], 5. 6, с. 22—24).

2°. **Введение.** Рассмотрим систему

$$dx_j/dt=\sum_{m=1}^{L+1}\sum_{i\in I_n(m)}(a_j^1[i]+\varepsilon a_j^2[i])X^i, \tag{1}$$

где $X\overset{\text{def}}{=}(x_1,\cdots,x_n)$; $j\in[1:n]$; $t,\varepsilon\in C$; $L\in[0:+\infty)$,

$$I_n(m)\overset{\text{def}}{=}\{i=(i_1,\cdots,i_n)\in Z^n|\ i_1\geqslant 0,\cdots,i_n\geqslant 0;\ |i|=m\},$$

$a_j^\nu[i]$ — комплекснозначные функции аргумента t. Ее решение рассмотрим как функцию $X = X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ аргументов $t, t_0, \varepsilon \in C$; $X_0 \overset{\text{def}}{=} (x_{10}, \cdots, x_{n0}) \in C^n$, удовлетворяющую начальному условию

$$X(t_0, t_0, X_0, \varepsilon) = X_0. \tag{2}$$

Относительно коэффициентов $a_j^\nu[i]$ в системе (1) предположим, что они удовлетворяют неравенствам

$$|d^l a_j^\nu[i] / dt^l|_{t=t_0} \leqslant \varphi(l) M_j^\nu[i], \ l = 0, 1, \cdots, \tag{3}$$

где $M_j^\nu[i] > 0$ — постоянные, а функция φ такова, что ряд

$$\sum_{l=0}^{\infty} t^l \varphi(l) / l! \tag{4}$$

имеет ненулевой радиус сходимости. Сказанное есть не что иное, как специальным образом представленное предположение о голоморфности коэффициентов $a_j^\nu[i]$ в точке $t = t_0$.

При сделанных предположениях ставится задача: оценить область голоморфности решения $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ по (t, ε) и остаточные члены его тейлоровских разложений по t и по ε.

Решение ее дается теоремой 1 в п. 3°. Для доказательства используется метод сведения уравнений (1) к счетной линейной дифференциальной системе, примененный в работах [1, 2] (см., например, предложение 4 из [2]). Этот метод позволяет получать простые оценки для производных решения X по t и ε произвольного порядка.

В п. 4° вместо уравнений (1) рассматриваются уравнения (29), отличающиеся от (1) наличием свободных членов, и, как следствие теоремы 1, доказывается теорема 2, содержащая аналогичные, но более сильные при малых $|X_0|$, $|\varepsilon|$ результаты. В п. 5° показывается, что проверка условий теорем 1, 2 не представляет затруднений.

3°. Первая теорема о голоморфном решении. При $\gamma \in (0, +\infty)$ введем обозначение

$$s(\gamma) \overset{\text{def}}{=} \max_{\nu=1,2} \max_{j \in [1:n]} \sum_{m=1}^{L+1} \gamma^m \sum_{i \in I_n(m)} M_j^\nu[i] \cdot \gamma^{-1}. \tag{5}$$

В условиях теорем 1, 2 используется уравнение

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} (\varphi(l) / (L\sigma s)^l) / l! \tag{6}$$

относительно σ. Для понимания этих условий полезно иметь в виду следующий результат.

Лемма 1. *Пусть* $R \in (0, +\infty]$ — *радиус сходимости ряда* (4) *и* $s > 0$. *Тогда уравнение* (6) *имеет единственное на промежутке* $(0, +\infty)$ *решение* σ, *а величина*

$$\theta = \theta(s) \overset{\text{def}}{=} \sigma s \tag{7}$$

есть возрастающая функция от $s \in (0, +\infty)$, *удовлетворяющая условиям*

$$\Theta(s) > (\mathbf{R}L)^{-1}, \ \lim_{s \to +0} \Theta(s) = (\mathbf{R}L)^{-1}.$$

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in (0, +\infty)$, *выполнены условия* (3), *величины* $s \overset{\text{def}}{=} s(|X_0|)$ *и* Θ *вычисляются по формулам* (5), (7) *и используется обозначение* $r_0 \overset{\text{def}}{=} (L(1+\alpha)\Theta)^{-1}$. *Тогда решение* $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ *задачи* (1), (2) *является голоморфной по* (t, ε) *функцией в области* $\mathbf{V}_{r_0}(t_0) \times \mathbf{V}_\alpha(0)$ *и удовлетворяет там неравенствам*

$$|X(t, t_0, X_0, 0) - \sum_{l=0}^{N} X_{0l}(t-t_0)^l / l!| \leqslant \mathbf{K}_0 |X_0| (|t-t_0|/r_0)^{N+1}, \quad (8)$$

$$|X(t, t_0, X_0, \varepsilon) - \sum_{l=0}^{N} X_{\varepsilon l}\varepsilon^l / l!| \leqslant \mathbf{K} |X_0| |\varepsilon/\alpha|^{N+1} (|t-t_0|/r_0)^{N+1}, \quad (9)$$

где $\mathbf{K}_0 \overset{\text{def}}{=} (1-|t-t_0|/r_0)^{-1/L}$, $\mathbf{K} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{K}_0 \alpha r_0 / (\alpha r_0 - |\varepsilon(t-t_0)|)$,

$$\begin{aligned} X_{0l} &\overset{\text{def}}{=} (d^l X(t, t_0, X_0, 0)/dt^l)_{t=t_0}, \\ X_{\varepsilon l} &\overset{\text{def}}{=} (d^l X(t, t_0, X_0, \varepsilon)/d\varepsilon^l)_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \quad (10)$$

Замечание. Из леммы 1 следует, что

$$\lim_{\substack{\alpha > \varepsilon \\ \alpha \to 0}} \lim_{s \to 0} r_0 = \mathbf{R}.$$

Доказательство. Шаг 1. Следуя [1, 2] сведем систему (1) к счетной линейной системе. Для этого введем счетное множество переменных $x[i] \overset{\text{def}}{=} X^i$ при $i \in \bigcup_{m=1}^{\infty} I_n(m)$. Условимся полагать $a_j^\nu[i] \overset{\text{def}}{=} 0$, если хотя бы одна из компонент мультииндекса i отрицательна или $|i| > L$. Тогда введенные переменные $x[k]$ $(k = k_1, \cdots, k_n))$ удовлетворяют следующим уравнениям ([1], стр. 14):

$$dx[k]/dt = \sum_{m=0}^{L} \sum_{i \in J(m)} (\alpha^1[k; i] + \varepsilon\alpha^2[k; i])\, x[k+i], \quad (11)$$

где

$$k \in \bigcup_{m=1}^{\infty} I_n(m), \ \alpha^\nu[k; i] \overset{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{n} k_j a_j^\nu[i_1, \cdots, i_j+1, \cdots, i_n], \ \nu = 1, 2,$$

$$\mathbf{J}(m) \overset{\text{def}}{=} \{i = (i_1, \cdots, i_n) \in \mathbf{Z}^n \,|\, i_1 \geqslant -1, \cdots, i_n \geqslant -1;\ |i| = m\}. \quad (12)$$

Множества $\chi_m \overset{\text{def}}{=} \{x[i]\}, i \in I_n(m)\}$ упорядочим слева направо в порядке $\chi_1, \chi_2, \cdots$, элементы каждого из этих множеств упорядочим так, чтобы из $i_1 = k_1, \cdots, i_j = k_j$, $i_{j+1} > k_{j+1}$ следовало, что $x[i_1, \cdots, i_n]$, предшествует $x[k_1, \cdots, k_n]$, и обозначим все введенные переменные слева направо символами $x_1, x_2, \cdots$. Первые n из этих переменных совпадают с неизвестными $x_1, \cdots, x_n$ системы (1). Вектор-функция $x \overset{\text{def}}{=} (x_1, x_2, \cdots)$ удовлетворяет уравнению

$$dx/dt = (\mathbf{A}_1 + \varepsilon \mathbf{A}_2)\, x, \tag{13}$$

где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ — бесконечные матрицы с конечными строками и столбцами.

Будем рассматривать x как функцию $x\,(t,\ t_0,\ x_0,\ \varepsilon)$ четырех аргументов t, t_0, $x_0 \overset{\text{def}}{=} (x_{10}, \cdots, x_{n0},\ x_{10}^2,\ x_{10}\cdot x_{20}, \cdots,\ x_{n0}^2,\ x_{10}^3, \cdots)$, ε, удовлетворяющую начальному условию $x\,(t_0,\ t_0,\ x_0,\ \varepsilon) = x_0$.

Шаг 2. Согласно теореме Коши—Пуанкаре каждая из компонент x_j решения X задачи (1), (2) голоморфна по $(t,\ \varepsilon)$ в окрестности точки $(t_0,\ 0)$ и может быть представлена там степенным рядом по ε, $t - t_0$. С другой стороны, все компоненты x_j вектора x есть произведения степеней компонент $x_1, \cdots, x_n$ вектора X. Поэтому величину x можно представить в виде

$$x\,(t,\ t_0,\ x_0,\ \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} x^r\,(t,\ t_0,\ x_0)\, \varepsilon^r, \tag{14}$$

где

$$x^0\,(t_0,\ t_0,\ x_0) = x_0,\ \ x^r\,(t_0, t_0,\ x_0) = 0,\ \ r = 1,\ 2, \cdots. \tag{15}$$

Для удобства положим $x^r \overset{\text{def}}{=} 0$, если $r < 0$. Подставляя (14) в (13) и приравнивая коэффициенты при ε^r получаем

$$dx^r\,/\,dt = \mathbf{A}_1\, x^r + \mathbf{A}_2\, x^{r-1},\ \ r=0,\ 1, \cdots. \tag{16}$$

Искомые оценки (8), (9) будут получены из представления (14). Для этого при помощи (16) мы оценим величины $x^r\,(t,\ t_0,\ x_0)$ (шаги 3—9).

Шаг 3. При $r \geqslant 0$, $l \geqslant 0$ символом x_{0p}^{rl} обозначим p-ую компоненту вектора $x_0^{rl} \overset{\text{def}}{=} (d^l\, x^r \diagdown dt^l\,)_{t=t_0}$. Из формул (16), (15) несложно вывести, что $x_0^{rl} = 0$ при $l < r$. Поэтому в некоторой окрестности точки t_0 истинно представление

$$x^r\,(t,\ t_0,\ x_0) = \sum_{l=r}^{\infty} x_0^{rl}\,(t - t_0)^l\,/\,l!,\ \ r = 0,\ 1, \cdots. \tag{17}$$

Шаг 4. Введем ряд обозначений. Символом y_0^{rl} обозначим вектор с компонентами $y_{0p}^{rl} \overset{\text{def}}{=} |x_{0p}^{rl}|$, $p = 1,\ 2, \cdots$. Если $\mathbf{A}$ — матрица, а x — вектор, то символом $(\mathbf{A}x)_p$ обозначим p-ую компоненту $\mathbf{A}x$.

Пусть $\{a_j^1\,[i]\}$, $\{a_j^2\,[i]\}$ — как-то упорядоченные наборы из коэффициентов системы (1). Из формулы (12) видно, что каждая величина $a^\nu\ [k;\ i]$ есть линейная форма с целочисленными неотрицательными коэффициентами от величин $a_j^\nu\,[i]$, то есть таковой является каждый элемент матриц $\mathbf{A}_\nu = \mathbf{A}_\nu\ (|a_j^\nu\,[i]|)$. Поэтому получаем равенства

$$\mathbf{A}_{\nu 0}^{(w)} \overset{\text{def}}{=} [d^w\, \mathbf{A}_\nu\,/\,dt^w)_{t=t_0} = \mathbf{A}_\nu\ (|(d^w\ \ a_j^\nu\,[i]\,/\,dt^w)_{t=t_0}|),\ \ w = 0,\ 1, \cdots. \tag{18}$$

Из формул (18), (3) следует, что если y — вектор с неотрицательными вещественными компонентами, то

$$|(\mathrm{A}^{(w)}_{\nu 0}\, y)_p| \leqslant \varphi(w)(\mathrm{B}_\nu\, y)_p, \quad w=0, 1, \cdots, \tag{19}$$

где $\mathrm{B}_\nu \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{A}_\nu\ (|M_j^\nu[i]|)$.

Шаг 5. Дифференцируя при $l \geqslant 1$ формулу (16) $l-1$ раз, полагая затем $t=t_0$ и учитывая (15) при $l \geqslant r$, $l \geqslant 1$, $r \geqslant 0$ получаем:

$$x_0^{rl} = \sum_{v=r}^{l-1} C_{l-1}^v\, \mathrm{A}_{10}^{(l-1-v)}\, x_0^{rv} + \sum_{v=r-1}^{l-1} C_{l-1}^v\, \mathrm{A}_{20}^{(l-1-v)} \cdot x_0^{r-1,\, v}.$$

Учитывая (19) приходим к неравенствам

$$y_{pp}^{rl} \leqslant \sum_{v=r}^{l-1} C_{l-1}^v\, \varphi(l-1-v)(\mathrm{B}_1\, y_0^{rv})_p + \sum_{v=r-1}^{l-1} C_{l-1}^v\, \varphi(l-1-v)(\mathrm{B}_2\, y_0^{r-1,\, v})_p. \tag{20}$$

при $l \geqslant r$, $l \geqslant 1$, $r \geqslant 0$.

Шаг 6. Вычислим величину $(\mathrm{B}_\nu\, y_0^{rv})_p$. В начале доказательства введя счетное множество переменных $x[i]$ и вектор $x=(x_1, x_2, \cdots)$ мы определили тем самым взаимно-однозначное отображение множества мультииндексов $i=(i_1, \cdots, i_n)$ на множество натуральных чисел p — порядковых номеров компонент вектора x. Символами $i(p)$ и $p(i)$ будем обозначать значения i и p при этом отображении. Если y—вектор с компонентами $y_1, y_2, \cdots$, то символом $y[i(p)]$ или просто $y[i]$ будем обозначать величину y_p.

Из формул (11), (12) следует, что при $k(p)=(k_1, \cdots, k_n)$; $\nu=1, 2$; $v > r \geqslant 0$ истинны равенства

$$(\mathrm{B}_\nu\, y_0^{rv})_p = \sum_{j=1}^{n} \sum_{m=0}^{L} \sum_{l \in J(m)} k_j\, M_j^\nu[i_1, \cdots, i_j+1, \cdots, i_n]\, y_0^{rv}[k+i]. \tag{21}$$

Шаг 7. Лемма 2. *При любых целых $l \geqslant r > 0$ истинны неравенства*

$$y_0^{rl}[k] \leqslant \Pi(l, k)\ \psi(r, l)\ |X_0|^{|k|}, \tag{22}$$

где

$$\Pi(l, k) \overset{\mathrm{def}}{=} \prod_{\mu=1}^{l-1} (|k|+\mu L), \quad k \in \bigcup_{m=1}^{\infty} I_n(m),$$

а ψ — любая вещественнозначная функция аргументов r, l, удовлетворяющая условиям

$$\psi(0, 0)=1, \ \psi(-1, l)=0, \ (l > r > 0),$$

$$\psi(r, l) \geqslant s(|X_0|) \left(\sum_{u=0}^{l-1-r} \varphi(u)\, \psi(r, l-1-u)\, L^{-u}/u! + \right.$$

$$\left. + \sum_{u=0}^{l-r} \varphi(u)\, \psi(r-1, l-1-u)\, L^{-u}/u! \right) \ ((r, l) \neq (0, 0)). \tag{23}$$

Доказательство. Из равенства (21) получаем, что при любых $l \geqslant r = 0, 1, \cdots,$ если y_0^{rl} удовлетворяет (22) и $k = k(p) = (k_1, \cdots, k_n)$, то

$$(B_v y_0^{rl})_p < s(|X_0|)\, \psi(r, l)\, \Pi(l+1, k)\, |X_0|^{|k|}. \tag{24}$$

Очевидно y_0^{00} удовлетворяет неравенству (22). Пусть ему удовлетворяет величина y_0^{0v} при $v = 0, \cdots, l-1$. Тогда из неравенств (20), (24) и оценки

$$C_{l-1}^{v}\, \Pi(v+1, k) / \Pi(l, k) \leqslant L^{v+1-l} / (l-1-v)!$$

получаем

$$y_{0p}^{0l} < \left(\sum_{v=0}^{l-1} C_{l-1}^{v} \varphi(l-1-v)\psi(0, v)\, s(|X_0|)\, \Pi(v+1, k) / \Pi(l, k)\right) \times$$
$$\times\, \Pi(l, k)\, |X_0|^{|k|} \leqslant \psi(0, l)\, \Pi(l, k)\, |X_0|^{|k|},$$

то есть y_0^{0l} также удовлетворяет неравенству (22). Таким образом неравенство (22) доказано по индукции при $r=0$; $l=0, 1, \cdots$. Аналогично оно доказывается при $r=l=1, 2, \cdots$, а затем в предположении, что $g \geqslant 0$ и это неравенство истинно при $r=g$; $l=g, g+1, \cdots,$ тем же способом доказывается, что оно истинно при $r=g+1$; $l=g+1, g+2, \cdots$.

Шаг 8. Для получения оценок величин $y_0^{rl}[k]$ из неравенства (22) осталось найти функцию ψ, удовлетворяющую условиям (23). Индукцией можно показать, что в качестве таковой подходит функция

$$\psi(r, l) = C_l^r\, \Theta^l, \tag{25}$$

где Θ определяется формулой (7).

Шаг 9. Неравенство

$$C_l^r (1+\alpha)^{-l} \leqslant \alpha^{-r} \tag{26}$$

при $\alpha > 0$; $0 < r \leqslant l$ следует из биномиальной формулы $(1+\alpha)^l = = \cdots + C_l^r \alpha^r + \cdots$.

Пользуясь (22) при $|k| = 1$, (25) и (26) замечаем, что при любых $p \in [1:n]$ и $M \geqslant N+1 > r \geqslant 0$ истинны неравенства

$$\left|\sum_{l=N+1}^{M} x_{0p}^{rl} (t-t_0)^l / l!\right| \leqslant |X_0|\, \alpha^{-r} (|t-t_0|/r_0)^{N+1} \times$$
$$\times \sum_{l=0}^{M-N-1} [((1+\alpha)\,|t-t_0|\,\Theta)^l / l!] \prod_{\mu=0}^{l-1} (1+\mu L). \tag{27}$$

Полагая $N+1=r$ и устремляя M к $+\infty$ из (17), (27) получаем (см. (34) в [2]), что при $t \in \mathrm{V}_{r_0}$; $p \in [1:n]$; $r = 0, 1, \cdots,$ величины $x_p^r(t, t_0, x_0)$ голоморфны по t и удовлетворяют неравенствам

$$|x_p^r(t, t_0, x_0)| \leqslant \mathrm{K}_0\, |X_0|\, (|t-t_0|/(r_0\, \alpha))^r. \tag{28}$$

Таким же способом при $r=0$ получаем неравенства

$$\left| x_p^0(t, t_0, x_0) - \sum_{l=0}^{N} x_{op}^{0l}(t-t_0)^l / l! \right| \leqslant K_0 |X_0| \, (|t-t_0|/r_0)^{N+1},$$

совпадающие с (8) с точностью до обозначений.

Шаг 10. Применяя (28) для оценки правой части равенства (см. (14))

$$\left| x_p(t, t_0, x_0, \varepsilon) - \sum_{r=0}^{N} x_p^r(t, t_0, x_0)\, \varepsilon^r \right| = \left| \sum_{r=N+1}^{\infty} x_p^r(t, t_0, x_0)\, \varepsilon^r \right|$$

завершаем доказательство теоремы.

4°. Вторая теорема о голоморфном решении. Перейдем к рассмотрению системы

$$dx_j/dt = \sum_{k=1}^{n+1} b_{jk} x_k + \nu \sum_{m=2}^{L+1} \sum_{l \in I_n(m)} b_j^1[i] X^l +$$

$$+ \varepsilon \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{l \in I_n(m)} b_j^2[i] X^l, \; j \in [1:n]; \; dx_{n+1}/dt = 0 \tag{29}$$

при обозначениях, аналогичных (1). Предположим, что $x_{n+1} \in C$; $\nu \in R$ — фиксированные постоянные, величины $b_j^k[i]$, b_{jk} — голоморфные функции аргумента t, а решение X удовлетворяет условию (2).

Задача (29), (2) есть частный случай задачи (1), (2). С другой стороны, если подставить постоянную x_{n+1} в первые n уравнений (29), то получится система более общая, чем (1) (в (1) отсутствуют свободные члены $x_{n+1}\, b_{j,n+1}(t)$).

Величина r_0 в теореме 1 тем больше, чем меньше $s(|X_0|)$. В свою очередь, $s(|X_0|)$ монотонно убывает вместе с $|X_0|$, причем $s(|X_0|) \to 0$ при $|X_0| \to 0$ только в том случае, если в системе (1) отсутствуют линейные члены. Поэтому займемся сведением системы (29) к системе без линейных членов в невозмущенной части (остальные линейные члены можно, вообще говоря, сделать малыми за счет ε) с тем, чтобы применив к ней теорему 1 получить для задачи (29), (2) более сильный при малых $|X_0|$, $|\varepsilon|$ результат—теорему 2.

Введем в рассмотрение $(n+1) \times (n+1)$ — матрицу U такую, что ее компоненты голоморфны в некоторой области $D \subset C$, причем $t_0 \in D$ и удовлетворяют условиям:

(u1) при любых $t \in D$; $W \in C^{n+1}$ истинны неравенства $|UW| \leqslant u^* W$, $|U_0^{-1} W| \leqslant u_* W$, где u_*, $u^* \in R$ — постоянные, $U_0^{-1} \overset{\text{def}}{=} U^{-1}|_{t=t_0}$;

(u2) система относительно $W = (w_1, \cdots, w_{n+1})$, в которую переходит (29) при замене

$$(X, x_{n+1}) = UW, \tag{30}$$

имеет вид

$$dW/dt = \sum_{m=2}^{L+1} \sum_{l \in I_{n+1}(m)} a_j^1[i] W^l + \varepsilon \sum_{m=1}^{L+1} \sum_{l \in I_{n+1}(m)} a_j^2[i] W^l, \tag{31}$$

причем $a_j^s[i]$ голоморфны по t при $t = t_0$.

Эти условия выполнены, если U — фундаментальная матрица системы (29) при $\nu = \varepsilon = 0$, голоморфная в области $D_1 \supset D$.

Из (2) следует, что W удовлетворяет условию

$$W(t_0, t_0, W_0, \varepsilon) = W_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} U_0^{-1}(X_0, x_{n+1}). \tag{32}$$

Теорема 2. *Пусть U удовлетворяет условиям (u 1), (u 2) и не зависит от ε. Пусть $\alpha \in (0, +\infty)$ и выполнены условия* (3) *относительно коэффициентов $a_j^{\nu}[i]$ системы* (31). *Пусть величина W_0 определяется формулой* (32), *величины $s \stackrel{\mathrm{def}}{=} s(|W_0|)$, Θ — формулами* (5), (7) *(в* (5) *n следует заменить на $n+1$), а $r_0 \stackrel{\mathrm{def}}{=} (L(1+\alpha)\Theta)^{-1}$. Пусть, наконец, область D удовлетворяет условию $D \supset V_{r_0}(t_0)$.*

Тогда решение $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ системы (29) *голоморфно по (t, ε) в области $V_{r_0}(t_0) \times V_\alpha(0)$ и удовлетворяет там неравенству* (8) *при $N=0$ и неравенству* (9) *при любом N, если в них заменить K_0 на $H_0 = u_* u^* K_0 |(X_0, x_{n+1})|/|X_0|$.*

Доказательство. Применяя теорему 1 к задаче (31), (32) получаем, что ее решение W голоморфно по (t, ε) в области $V_{r_0}(t_0) \times V_\alpha(0)$ и удовлетворяет там неравенствам

$$|W(t, t_0, W_0, 0) - W_0| \leqslant K_0 |W_0| |t - t_0| / r_0, \tag{33}$$

$$\left| W(t, t_0, W_0, \varepsilon) - \sum_{l=0}^{N} W_{l} \varepsilon^l / l! \right| \leqslant K |W_0| \, |\varepsilon/\alpha|^{N+1} |(t - t_0)/r_0|^{N+1}, \tag{34}$$

где использованы обозначения, аналогичные (10). Так как матрица U голоморфна в $V_{r_0}(t_0)$, то из (30) следует, что решение $X(t, t_0, X_0, \varepsilon)$ голоморфно по $(t, \varepsilon) \in V_{r_0}(t_0) \times V_\alpha(0)$. Используя (30), ($u$ 1), (32) из неравенств (33), (34) получаем доказываемые.

5°. О проверке условий теорем. Покажем, что проверка условий теорем 1, 2 достаточно проста.

(а) О вычислении $\varphi(l)$, $M_j^{\nu}[i]$ в условиях (3). Если все $a_j^{\nu}[i]$ в (1) постоянны, то можно положить

$$\varphi(0) = 1, \ \varphi(l) = 0, \ l = 1, 2, \cdots, \ M_j^{\nu}[i] = |a_j^{\nu}[i]|. \tag{35}$$

В случае переменных $a_j^{\nu}[i]$ лучше всего получить $\varphi(l)$, $M_j^{\nu}[i]$, опираясь на конкретный вид $a_j^{\nu}[i]$. Если это сделать не удается, то в предположении, что все $a_j^{\nu}[i]$ голоморфны в круге $V_r(t_0)$, можно использовать неравенства Коши

$$|d^l a_j^{\nu}[i]/dt^l|_{t=t_0} \leqslant l! \rho^{-l} \max_{|t-t_0|=\rho} |a_j^{\nu}[i]|, \ \rho < r,$$

то есть положить

$$\varphi(l) = l! \rho^{-l}, \ M_j^{\nu}[i] = \max_{|t-t_0|=\rho} |a_j^{\nu}[i]|. \tag{36}$$

(в) О вычислении s, σ. Вычисление $s = s(|X_0|)$ по формуле (5) не представляет затруднений. Если $a_j^{\nu}[i]$ постоянны, то из (35), (6), (7)

следует, что $\sigma = 1$, $\Theta = s = s\,(|X_0|)$. В случае переменных $a_j^*[i]$ из (36), (6), (7) следует, что $\sigma = 1 + (\rho L s)^{-1}$, $\Theta = s + 1/(\rho L)$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступила 5.I.1981

Լ. Կ. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆՑ, Փ. Հ. ՄՀՈՅԱՆ. Սովորական դիֆերենցիալ հավասարումների հոլոմորֆ լուծումների գնահատումը *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է առաջին կարգի n *սովորական դիֆֆերենցիալ հավասարումների համակարգը։ Աջ մասերը գծային են ըստ պարամետրի և հանդիսանում են հանրահաշվական պոլինոմներ անհայտներից, որոնց գործակիցները հոլոմորֆ են արգումենտից։ Առաջարկվում են գնահատականներ ըստ արգումենտի ու պարամետրի լոկալ լուծումների հոլոմորֆության տիրույթի համար և համապատասխան գնահատականներ Թեյլորյին վերլուծության մնացորդային անդամների համար։ Դրանց ապացույցները հիմնվում է վերջավոր թվով ոչ գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի հաշվելի թվով գծային դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի բերման վրա։*

L. K. BABADZANJANZ, P. B. MGOJAN. *The estimation of the golomophic solution of ordinary differential equations* (summary)

The article deals with a system of n ordinary differential equations of the first order with the right-hand sides linear with respect to a parameter ε and polynomial with respect to all dependent variables. The coefficients of the polynomials are golomorphic functions of the independent variable t.

The purpose of this paper is to give estimates of the (t, ε)-region where the local solution is golomorphic as well as to estimate the remainders terms of the corresponding Taylor formulae.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. К. Бабаджанянц*. Продолжаемость и представление решений в задачах небесной механики, Труды ИТА АН СССР, XVII, 1978, 3—45.
2. *L. K. Babadzanjanz*. Existence of the continuations in the N-body problem, Celestial Mechanics 20, 1979, 43—57.