ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 1, 1982 Математика

М. З. ДВЕЙРИН

О ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

В работе [1] В. И. Белым получена следующая теорема, являющаяся значительным продвижением в распространении теоремы Джексона на более широкий класс множеств комплексной плоскости.

Теорема. *Пусть G — конечная область комплексной плоскости, ограниченная квазиконформной кривой Γ (т. е. Γ — образ окружности при квазиконформном отражении плоскости на себя). Если $f(z)$ регулярна в G и непрерывна на $\overline{G}$, то при каждом натуральном n существует алгебраический многочлен $P_n(z)$ порядка не выше n, для которого при всех $z \in \Gamma$ имеет место неравенство*

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant M\omega\left[\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)\right],$$

где M — константа, не зависящая от n и z, ω — модуль непрерывности функции f на $\overline{G}$, $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$ — расстояние от точки $z \in \Gamma$ до линии уровня $\Gamma_{1+\frac{1}{n}} = \left\{z\colon |\Phi(z)| = 1 + \frac{1}{n}\right\}$.

Цель настоящей статьи — получение аналогичного результата в случае приближения в многосвязных областях аналитических функций рациональными. При этом будут широко использоваться результаты и методы работ В. И. Белого [1, 2].

1°. Пусть G — конечная d-связная область, у которой каждая связная компонента дополнения B_k, $k = 1, 2, \cdots, p$ является областью с квазиконформной границей; $\infty \in B_1$, $\Gamma_k = \partial B_k$. Рассмотрим функцию $w = \Phi_1(z)$, конформно и однолистно отображающую B_1 на внешность единичного круга $K_1' = \{w\colon |w| > 1\}$ и нормированную условиями $\Phi_1(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} z^{-1}\Phi_1(z) > 0$. Обозначим $y_1(z)$ квазиконформное отражение плоскости относительно Γ_1, переводящее B_1 в $G \cup \left(\bigcup\limits_{k=2}^{p} \overline{B}_k\right)$ и наоборот, причем точки Γ_1 остаются неподвижными. Это отображение можно построить в виде $y_1(z) = \Psi_1\left(\dfrac{1}{\overline{\Phi_1(z)}}\right)$, где Φ_1 — ранее введенная функция, продолженная до квазиконформного отображения плоскости на себя (существование такого гомеоморфизма см. в [3]), Ψ_1 — обратный к Φ_1 гомеоморфизм, причем $\Phi_1(a) = 0$, $\Psi_1(0) = a$, где $a \in G$ — произвольно фиксированная точка.

Аналогично для каждой области B_k, $2 \leqslant k \leqslant p$, обозначим через $\Phi_k(z)$ функцию, конформно и однолистно отображающую B_k на единичный круг $K_1 = \{w: |w| < 1\}$, нормированную условиями $\Phi_k(a_k) = 0$, $\Phi'_k(a_k) > 0$ ($a_k \in B_k$—произвольно фиксированная внутренняя точка). Введем также отражения плоскости относительно кривых Γ_k вида $y_k(z) = \Psi_k\left(\frac{1}{\overline{\Phi_k(z)}}\right)$, где Φ_k и Ψ_k— квазиконформные продолжения ранее определенных в B_k функций $\Phi_k(z)$ и обратных к ним функций $\Psi_k(w)$ на всю плоскость таким образом, что $\Phi_k(\infty) = \Psi_k(\infty) = \infty$. Для всякой функции, непрерывной на $\overline{G}$, построим непрерывное продолжение в некоторую область, содержащую $\overline{G}$ следующим образом:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \overline{G}, \\ (f \circ y_k)(z), & z \in B_k \cap y_k[G], \quad k = 1, 2, \cdots, p, \end{cases}$$

где $y_k[G]$ — образ области G при отражении $y_k(z)$. Такое продолжение впервые введено В. И. Белым в [1]и называется QC-продолжением. Выберем положительные числа $r_1 > 1$, $r_k < 1$, $k=2, 3, \cdots, p$ так,чтобы замыкание p-связной области $G\{r_k\}$, ограниченной линиями уровня $\Gamma_1, r_1, \Gamma_2, r_2, \cdots, \Gamma_p, r_p$ ($\Gamma_{k,\rho} = \{z \in B_k : |\Phi_k(z)| = \rho\}$) принадлежало области определения $\tilde{f}(z)$. Будем говорить, что $f(z) \in A(\overline{G})$, если $f(z)$ регулярна во внутренних точках G и непрерывна на $\overline{G}$. Следующая теорема дает интегральное представление функций класса $A(\overline{G})$.

Теорема 1. *Пусть G — конечная p-связная область с квазиконформной границей $\partial G = \bigcup_{k=1}^{p} \Gamma_k$, $f(z) \in A(\overline{G})$ и*

$$\int_C f(z)\, dz = 0 \tag{1}$$

для любого спрямляемого контура C, лежащего в G. Тогда при всех $z \in G$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_1, r_1} \frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta - \sum_{k=2}^{p} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_k, r_k} \frac{\tilde{F}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta -$$

$$- \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{\pi} \iint\limits_{B_k \cap G\{r_k\}} \frac{(f \circ y_k)(\zeta)\, y_{k\bar{\zeta}}}{(\zeta - z)^2}\, dx dy, \tag{2}$$

где $\tilde{F}(\zeta)$ — QC— продолжение первообразной $F(z)$ функции $\tilde{f}$.

Доказательство. В силу условия (1) функция $F(z)$, определяемая соотношением

$$F(z) = \int\limits_{\overset{\frown}{az}} f(t)\, dt,$$

где $\overset{\frown}{az}$ — произвольная спрямляемая дуга, соединяющая в G точки a и z, однозначно определена в G, аналитична и $F'(z) = f(z)$. Ее

QC-продолжение $\tilde{F}(z)$ непрерывно на $G\{r_k\}$. Повторяя рассуждения, проведенные в [1], нетрудно убедиться, что функция $\tilde{F}_{\bar{z}}$,

$$\tilde{F}_{\bar{z}}(z)=\begin{cases}0, & z\in G,\\ (f\circ y_k)(z)\,\overline{y_{kz}}, & z\in B_k\cap G\{r_k\}\end{cases}$$

суммируема с квадратом в $G\{r_k\}$.

Поскольку $\tilde{F}_{\bar{z}}$ принадлежит L_2 и в бóльшей области (в силу свободы в выборе $\{r_k\}$), к функции $\tilde{F}(z)$ при любом $z\in G\{r_k\}$ применима формула Помпейю [4], согласно которой

$$\tilde{F}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1, r_1}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\sum_{k=2}^{p}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{k}, r_k}\frac{\tilde{F}(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G\{r_k\}}\frac{\tilde{F}_{\bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta-z}\,dxdy. \quad (3)$$

Если $z\in G$, то из (3) дифференцированием по z получаем утверждение теоремы.

Замечание 1. Пусть $f(z)\in A(\overline{G})$. Положим

$$\beta_k=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} f(t)\,dt,\quad k=2, 3,\cdots, p,$$

где γ_k — произвольный определяемый контур, лежащий в G и такой, что конечная односвязная область $\hat{B}_k$ с границей γ_k содержит B_k и $\hat{B}_k\cap B_i=\varnothing$ при $i\neq k$. Тогда функция

$$f_1(z)=f(z)-\sum_{k=2}^{p}\frac{\beta_k}{z-a_k}$$

удовлетворяет условию теоремы 1, и, следовательно, для $f(z)$ справедливо представление

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=2}^{p}\frac{\beta_k}{z-a_k}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1, r_1}\frac{\tilde{F}_1(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-\sum_{k=2}^{p}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_k, r_k}\frac{\tilde{F}_1(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta-$$

$$-\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{\pi}\iint\limits_{B_k\cap G\{r_k\}}\frac{(f_1\circ y_k)(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,\overline{y_{k\zeta}}\,dxdy. \quad (4)$$

Замечание 2. Нетрудно видеть, что $\omega(f, h)\asymp\omega(f_1, h)$ при $h\to 0$ ввиду аналитичности дробей $(z-a_k)^{-1}$ на $\overline{G}$ (символ $a\asymp b$ означает существование константы C такой, что $C^{-1}\leqslant\frac{a}{b}\leqslant C$).

Замечание 3. При доказательстве теоремы 1 не использовалось то, что кривые Γ_{k, r_k} являются линиями уровня. Для справедливости представления (2) достаточно в качестве контуров интегрирования использовать любые спрямляемые кривые $L_k\subset B_k$, лежащие в области определения функции $\tilde{f}(z)$.

Изучим некоторые свойства полученного интегрального представления (2).

Лемма 1. *Пусть B_2 — область с квазиконформной границей Γ_2, $\hat{B}_2$ — подобласть B_2, $\hat{B}_2 \subset B_2$, ограниченная жордановой спрямляемой кривой L_2, $y_2(\zeta)$ — квазиконформное отражение плоскости относительно Γ_2, причем $y_2(\infty) = a_2 \in \hat{B}_2$. Тогда для любого целого $m \geqslant 0$ и $z \in C\overline{B}_2$*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{y_2^{m+1}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta + \frac{m+1}{\pi}\iint\limits_{B_2 \setminus \hat{B}_2} \frac{y_2^m(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, y_{2\bar\zeta}\, dxdy = 0.$$

Доказательство. Пусть G — двусвязная область с квазиконформной границей, у которой ограниченная компонента CG совпадает с B_2, а неограниченная представляет собой внешность круга $\overline{K}_R$ где R достаточно большое. Для функции $f(z) = z^m$ запишем интегральное представление (2) при $z \in G$:

$$z^m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=2R} \frac{\widetilde{F}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{R<|\zeta|<2R} \frac{y_1^m(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, y_{1\bar\zeta}\, dxdy -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{\widetilde{F}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{B_2 \setminus \hat{B}_2} \frac{y_2^m(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, y_{2\bar\zeta}\, dxdy.$$

Учитывая, что $y_1(\zeta) = \dfrac{R^2}{\bar\zeta}$, $\widetilde{F}(\zeta) = \dfrac{y_1^{m+1}(\zeta)}{m+1} - c$ при $|\zeta| = 2R$ и $\widetilde{F}(\zeta) = \dfrac{y_2^{m+1}(\zeta)}{m+1} - c$ на L_2, нетрудно установить, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta|=2R} \frac{\widetilde{F}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = z^m 2^{-2(m+1)},$$

$$\frac{-1}{\pi}\iint\limits_{R<|\zeta|<2R} \frac{y_1^m(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, y_{1\bar\zeta}\, dxdy = z^m\,(1 - 2^{-2(m+1)}),$$

откуда следует утверждение леммы.

Следствие.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} y_2^{m+1}(\zeta)\,\zeta^k\, d\zeta + \frac{m+1}{\pi}\iint\limits_{B_2 \setminus \hat{B}_2} y_2^m(\zeta)\, y_{2\bar\zeta}\,\zeta^k\, dxdy = 0, \qquad (5)$$

$$k = 0, 1, \cdots, \qquad m = 0, 1, \cdots.$$

Теорема 2. *В условиях леммы 1 для всякой функции $\chi(z) \in A(\overline{B}_2)$ справедливо равенство*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \chi(\zeta)\, y_2^{m+1}(\zeta)\, d\zeta + \frac{m+1}{\pi}\iint\limits_{B_2 \setminus \hat{B}_2} \chi(\zeta)\, y_2^m(\zeta)\, y_{2\bar\zeta}\, dxdy = 0. \qquad (6)$$

Доказательство получается с помощью леммы 1 повторением рассуждений, примененных в [1] при доказательстве теоремы 8.

2°. В дальнейшем нам потребуются геометрические свойства квазиконформных отображений, свойства полиномиальных ядер В. К. Дзядыка и другие факты, справедливые для областей с квазиконформной границей (доказательства можно найти в [1, 2, 5]).

Пусть G — конечная область с квазиконформной границей L, $\Phi(z)$ — функция, конформно и однолистно отображающая $\Omega = C\overline{G}$ на внешность K_1, продолженная до квазиконформного гомеоморфизма плоскости на себя, причем $\Phi(0) = 0$, $\lim\limits_{z\to\infty} z^{-1}\Phi(z) > 0$, $\Psi(w)$ — обратный гомеоморфизм. Введем обозначения:

$$\tilde{\zeta}_t = \Psi\left[\Phi(\zeta)\, e^{-it}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right], \tilde{\zeta}_0 = \tilde{\zeta};\ G_R = \{z : |\Phi(z)| < R\};$$

$$u[z; r] = \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant r\},$$

$$B_n^{(\rho)} = \bigcup_{\zeta\in L} u[\zeta; \rho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)];\ B_n^{(d)} = \bigcup_{\zeta\in L}\{z : d(\zeta, z) \leqslant \rho_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)\},$$

$$d(z, \zeta) = \inf_{\gamma}\int_{\gamma} |d\zeta|,$$

где γ — дуга в $\overline{\Omega}$, соединяющая ζ и z; z^* — ближайшая к z точка границы L,

$$G_\rho(z) = G \cap u[z^*; \rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*)],\ G'_\rho(z) = CG \cap u[z^*; \rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*)],$$

$$\Omega_n(\varphi, z) = \omega[\varphi, \rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*)]\ \frac{\rho^m_{1+\frac{1}{n}}(z^*)}{[|z - z^*| + \rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*)]^m}.$$

Будем писать $A \preceq B$, если существует $C > 0$, не зависящее от аргументов A и B и такое, что $A \leqslant C \cdot B$.

Справедливы следующие утверждения:

а) для любых точек $z_1 \in L$, $z_2 \in L$ существует дуга $\overset{\frown}{z_1 z_2} \subset \overline{G}$, длина которой $s(\overset{\frown}{z_1 z_2})$ удовлетворяет неравенству

$$S(\overset{\frown}{z_1 z_2}) \leqslant M_1 |z_1 - z_2|;$$

любые две точки $z_1 \in G$, $z_2 \in G$ можно соединить дугой $\overset{\frown}{z_1 z_2} \subset G$ так, что $S(\overset{\frown}{z_1 z_2}) \leqslant M_2 |z_1 - z_2|$;

б) для любых простых концов $z_0 \subset L$, $Z \subset L$, z_0 — произвольной точки тела Z_0

$$\left|\frac{\tilde{\zeta}_t - z_0}{\tilde{\zeta} - z_0}\right| \leqslant A\,(1 + n\,|t|)^4,\ A \leqslant \exp(24\pi + 4\ln\pi); \tag{8}$$

в) существует натуральное $j = j(G) > 2$ такое, что для произвольных $z_0 \in L$, $\zeta \in \Omega \cap G_2 \cap \{z: |z - z_0| \geqslant \rho_{1+\frac{1}{n}}(z_0)\}$ и $k > j$

$$\left|\frac{\tilde{\zeta} - z_0}{\tilde{\zeta} - \zeta}\right| \geqslant M_3 \left|\frac{\zeta - z_0}{\tilde{z}_0 - z_0}\right|^{1/k}; \tag{9}$$

г) для $z \in L$

$$\rho_{1+\frac{1}{n}}(z) \asymp |\tilde{z} - z|. \tag{10}$$

Здесь константы M_1, M_2, M_3 могут зависеть лишь от области G. Учитывая, что доказательство утверждений а)—г) в [1] основано на использовании конформных инвариантов и применяя инверсию, можно проверить, что в случае аналитичности гомеоморфизма $\Phi(z)$ внутри области $\left(\text{при этом } \tilde{\zeta}_t = \Psi\left[\Phi(Z)\, e^{-it}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right],\ \tilde{\zeta} = \Psi\left[\Phi(Z)\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]\right)$ справедливость утверждений а)—г) сохраняется.

Определим ядра $K_{r,m,k,n}(\zeta, z)$ формулой

$$K_{r,m,k,n}(\zeta, z) = \frac{1 - [1 - (\zeta - z)\,\pi_{l,n}(\zeta, z)]^{km}}{\zeta - z}, \quad l = k + 2 + \left[\frac{kr}{2}\right],$$

в которой $\pi_{l,n}(\zeta, z)$ — многочлен по z степени $(l+1)(n-1) - 1$, построенный по формуле

$$\pi_{l,n}(\zeta, z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} J_{l,n}(t)\,\frac{dt}{\tilde{\zeta}_t - z} \quad (z \in G),$$

где $J_{l,n}(t)$ — обобщенное ядро Джексона

$$J_{l,n}(t) = \frac{1}{b_{n,l}}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2(l+1)}, \quad b_{n,l} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^{2(l+1)} dt.$$

Ядра $K_{r,m,k,n}(\zeta, z)$ впервые введены В. К. Дзядыком и представляют собой многочлены степени $(l+1)(n-1)\,km - 1$ по z. В дальнейшем будут использоваться следующие свойства этих ядер:

а) $$\gamma_n^{\cdot} = \frac{-1}{\pi}\iint_{C\bar{G}} y_{\bar{\zeta}}\,\frac{\partial}{\partial \bar{z}} K_{r,m,k,n}(\zeta, z)\, dx\,dy = 1 + O(n^{-k(m+2)}); \tag{11}$$

б) при всех $z \in B_n^{d/2} \cup G$, $\zeta \in \bar{\Omega}$ и $k \geqslant \max[j(G); 4]$, $j = 0, 1, \cdots, r$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial z^j}\left[\frac{1}{\zeta - z} - K_{r,m,k,n}(\zeta, z)\right]\right| \asymp \begin{cases} \dfrac{\rho^m_{1+\frac{1}{n}}(z^*)}{|\zeta - z|^{1+j}\,(|\zeta - z| + |\tilde{\zeta} - \zeta|)^m}, & \zeta \in \bar{G}_2 \cap \bar{\Omega}, \\[2ex] \dfrac{\rho^m_{1+\frac{1}{n}}(z^*)}{|\zeta - z|^{1+j}}, & \zeta \in C\bar{G}_2. \end{cases} \tag{12}$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z} K_{r,m,k,n}(\zeta, z)\right| \asymp \left[|\zeta - z| + \rho_{1+\frac{1}{n}}(z)^*\right]^{-2} \tag{13}$$

и соотношение

$$\frac{-1}{\pi}\iint\limits_{CG} \frac{y_{\bar\zeta}}{(\zeta - z)^2}\, dxdy = 1, \tag{14}$$

справедливое при всех $z \in G$.

Следующее утверждение является аналогом известной теоремы В. К. Дзядыка (см., например, [5]) о приближения интегралов типа Коши, дополненным оценкой скорости приближения внутри области.

Теорема 3. *Пусть $\varphi(z)$ непрерывна на замыкании конечной области G с квазиконформной границей L, функция $f(z)$ определяется равенством*

$$f(z) = \frac{-1}{\pi}\iint\limits_{CG} \frac{(\varphi\circ y)(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, y_{\bar\zeta}\, dxdy, \quad \zeta = x + iy, \tag{15}$$

где $y(\zeta)$ — ранее введенное квазиконформное отражение. Для всякого фиксированного натурального m и произвольного натурального n существует многочлен $P_n(z)$ степени не выше n такой, что

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \left|\dfrac{1}{\pi}\iint\limits_{O_{2\rho}(z)} \dfrac{(\varphi\circ y)(\zeta) - \varphi(z)}{(\zeta - z)^2}\, y_{\bar\zeta}\, dxdy\right| + M\Omega_n(\varphi, z), & z \in G \cap B_n^{(\rho)}, \\ M\Omega_n(\varphi, z), & z \in G \setminus B_n^{(\rho)}, \end{cases} \tag{16}$$

где постоянная M не завит от z и n.

Доказательство. Повторяя рассуждения, приведенные в [2], можно показать, что интеграл

$$P(\varphi, z) = \frac{-1}{\pi}\iint\limits_{CG} (\varphi\circ y)(\zeta)\, y_{\bar\zeta} \frac{\partial}{\partial z} K_{n'}(\zeta, z)\, dxdy,$$

$$K_{n'}(\zeta, z) = K_{2, m+2, k, n}(\zeta, z) \tag{17}$$

при $z \in G$ представляет собой полином степени $(2k+3)(n-1)k(m+2)-2 \asymp n$. Используя последовательно состношения (15), (17), (11) и (14), преобразуем разность $f(z) - P(\varphi, z)$:

$$f(z) - P(\varphi, z) = \frac{1}{\pi}\iint\limits_{CG} (\varphi\circ y)(\zeta)\, y_{\bar\zeta} \frac{\partial}{\partial z}\left[K_{n'}(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z}\right] dxdy =$$

$$= \varphi(z)(\gamma_n' - 1) + \frac{1}{\pi}\iint\limits_{CG} [(\varphi\circ y)(\zeta) - \varphi(z)]\, y_{\bar\zeta} \frac{\partial}{\partial z}\left[K_{n'}(\zeta, z) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\zeta - z}\right] dxdy = J + O\left(n^{-k(m+2)}\right). \tag{18}$$

Положим $\Omega_1 = {}^*G'_{2\rho}(z)$, если $z \in B_n^{(\rho)}$ и $\Omega_1 = \varnothing$ — в противном случае; $\Omega_2 = (CG \setminus \Omega_1) \cap \overline{G}_2$, где G_2 — конечная область, ограниченная линией уровня L_2, $\Omega_3 = CG \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2) = C\overline{G}_2 \setminus \Omega_1$ и представим интеграл в (18) в виде суммы

$$J = J_1 + J_2 + J_3, \tag{19}$$

где

$$J_\nu = \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_\nu} [(\varphi \circ y)(\zeta) - \varphi(z)]\, y_{\bar\zeta} \frac{\partial}{\partial z}\left[K_{n'}(\zeta, z) - \frac{1}{\zeta - z}\right] dx\,dy, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

Будем считать, что параметр ядра $K_{n'}(\zeta, z)$ $k \geqslant j(G)$. Оценка J_3 наиболее проста и сразу следует из (12):

$$|J_3| \preceq \iint_{\Omega_3} \frac{\rho^{m+2}_{1+\frac{1}{n}}(z^*)}{|\zeta - z|^2} |y_{\bar\zeta}|\, dx\,dy \preceq \rho^{m+2}_{1+\frac{1}{n}}(z^*) \left(\iint_{\Omega_3} \frac{dx\,dy}{|\zeta - z|^4}\right)^{1/2} \left(\iint_{y[\Omega_3]} dx\,dy\right)^{1/2} \preceq$$

$$\preceq \rho^{m+2}_{1+\frac{1}{n}}(z^*) \preceq \Omega_n(\varphi, z). \tag{20}$$

Для оценки J_2 обозначим $2r = |z - z^*| + \rho^{2}_{1+\frac{1}{n}}(z^*)$ и проведем окружности O_s радиусов $2^s r$, $s = 0, 1, \cdots, N$ с центром в точке z, где N выберем так, чтобы $O_{N-1} \cap \Omega_2 \neq \varnothing$, $O_N \cap \Omega_2 = \varnothing$. Часть множества Ω_2, содержащуюся между O_s и O_{s+1} обозначим ω_s, $s = 0, 1, \cdots, N - 1$. Используя (12), получим

$$|J_2| \preceq \sum_{s=0}^{N-1} \frac{1}{2^{2s} r^2} \left(\frac{\rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*)}{2^s r}\right)^{m+2} \iint_{\omega_s} |(\varphi \circ y)(\zeta) - \varphi(z)|\, |y_{\bar\zeta}|\, dx\,dy. \tag{21}$$

В силу D-свойства отражения $y(z)$ (см. [3]) при $\zeta \in \omega_s$

$$|z - y(\zeta)| \asymp |z - \zeta| \leqslant \sup_{\zeta \in \omega_s} |\zeta - z| = 2^{s+1} r \tag{22}$$

поэтому

$$|\varphi(z) - (\varphi \circ y)(\zeta)| \leqslant \omega(\varphi, |z - y(\zeta)|) \preceq \omega(\varphi, 2^{s+1} r) \leqslant 2^{s+1} \omega(\varphi, r)$$

и

$$\iint_{\omega_s} |y_{\bar\zeta}|\, dx\,dy \leqslant \left(\iint_{\omega_s} dx\,dy\right)^{1/2} \left(\iint_{\omega_s} |y_{\bar\zeta}|^2\, dx\,dy\right)^{1/2} \preceq (\mathrm{mes}\, \omega_s)^{1/2} \times$$

$$\times (\mathrm{mes}\, y[\omega_s])^{1/2} \preceq 2^s r \cdot \pi [\max_{\zeta \in \omega_s} |z - y(\zeta)|]^2 \preceq 2^{2s} r^2. \tag{23}$$

Подставляя в (21) оценки (22) и (23), получим

$$|J_2| \preceq \sum_{s=0}^{N-1} \frac{\omega(\varphi, r)}{2^{2s} r^2} \cdot 2^{s+1} \cdot 2^{2s} r^2 \left(\frac{\rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*)}{2^s r}\right)^{m+2} \leqslant$$

$$\leqslant 2\omega(\varphi, r) \left(\frac{\rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*)}{r}\right)^{m+2} \leqslant 2\Omega_n(\varphi, z). \tag{24}$$

Представим J_1 в виде

$$J_1=\frac{-1}{\pi}\iint\limits_{\Omega_1}\frac{(\varphi\circ y)(\zeta)-\varphi(z)}{(\zeta-z)^2}\,y_{\bar\zeta}\,dxdy+\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega_1}[(\varphi\circ y)(\zeta)-\varphi(z)]\,y_{\bar\zeta}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial z}\,K_{n'}(\zeta,z)\,dxdy=J_1'+J_1'' \qquad (25)$$

и оценим J_1', используя (13), в предположении, что $\Omega_1\neq\varnothing$.

$$|J_1'|\precsim\omega(\varphi,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*))\,\rho^{-2}_{1+\frac{1}{n}}(z^*)\Big(\iint\limits_{\Omega_1}dxdy\Big)^{1/2}\cdot\Big(\iint\limits_{y[\Omega_1]}dxdy\Big)^{1/2}\precsim$$

$$\precsim\omega(\varphi,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*))\precsim\Omega_n(\varphi,z). \qquad (26)$$

Из (18), (19), (20), (24), (25) и (26) получаем утверждение теоремы.

Следствие. Пусть функция $\varphi(z)$ непрерывна на замыкании области G с квазиконформной границей и аналитична внутри G за исключением некоторого замкнутого множества $K\subset G$. Для всякого фиксированного натурального m и произвольного натурального n существует многочлен $P_n(z)$ степени не выше n такой, что при всех $z\in G$

$$|f(z)-P_n(z)|\precsim\omega(\varphi,\rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*))\frac{\rho^m_{1+\frac{1}{n}}(z^*)}{[|z-z^*|+\rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*)]^m}.$$

Доказательство. Из равномерного стремления к нулю $\rho_{1+\frac{1}{n}}(z)$ и D-свойства отражения $y(z)$ следует существование $N>0$ такого, что при $n\geqslant N$ функция $\varphi(z)$ будет аналитична во внутренних точках множества $y[G'_{4\rho}(z)]$, где $\rho=\rho_{1+\frac{1}{n}}(z^*)$. В этом случае, как показано в [2], при $z\in B_n^{(\rho)}$ и $n\geqslant N$ справедлива оценка

$$|J_1|=\left|\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_{2\rho}(z)}[(\varphi\circ y)(\zeta)-\varphi(z)]\,y_{\bar\zeta}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\zeta-z}-K_{n'}(\zeta,z)\right]dxdy\right|\precsim$$

$$\precsim\Omega_n(\varphi,z),$$

откуда вытекает доказываемое утверждение.

Замечание. Отметим, что при доказательстве теоремы использовалась непрерывность $\varphi(z)$ не на всем множестве $\overline{G}$, а лишь в окрестности границы L, т. е. вне произвольного замкнутого множества $K\subset G$, на котором от функции $\varphi(z)$ требуется ограниченность.

3°. Следующая теорема дает оценку скорости рациональной аппроксимации в областях, содержащих бесконечно удаленную точку.

Теорема 4. *Пусть G — двусвязная область, B_1 и B_2 — соответственно бесконечная и конечная компоненты дополнения, $B_1\cup B_2=C\overline{G}$, $\Gamma_1=\partial B_1$ — квазиконформная кривая, $\Gamma_2=\partial B_2$ — спрям-*

ляемая кривая, $y(z) = \Psi\left(\frac{1}{\overline{\Phi(z)}}\right)$ — *квазиконформное отражение плоскости относительно* Γ_1, *причем* $\Phi(z)$ *конформно отображает* $G \cup B_2$ *на* K_1 *так, что* $\Phi(a_2) = 0$ *для некоторой точки* $a_2 \in B_2$. *Для функции* $f(z)$, *определяемой представлением*

$$f(z) = \frac{-1}{\pi} \iint_{G} \frac{(\varphi \circ y)(\zeta)}{(\zeta - z)^2} y_{\bar\zeta}\, dxdy,\quad \zeta = x + iy, \tag{27}$$

где $\varphi(z)$ — *непрерывная на* $y[G]$ *функция, при любых натуральных* m *(фиксированном) и* n *существует рациональная функция* $R_n(z)$ *порядка не выше* n *такая, что при всех* $z \in B_1$

$$|f(z) - R_n(z)| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \left|\dfrac{1}{\pi} \displaystyle\iint_{G_{2\rho}(z)} \dfrac{(\varphi \circ y)(\zeta) - \varphi(z)}{(\zeta - z)^2} y_{\bar\zeta}\, dxdy \right| + M\Omega_n(\varphi, z), & z \in B_1 \cap B_n^{(\rho)}, \\ M\Omega_n(\varphi, z), & z \in B_1 \setminus B_n^{(\rho)}, \end{cases}$$

где постоянная M *не зависит от* z *и* n, $B_n^{(\rho)} = \bigcup_{z \in \Gamma_1} \{\zeta : |\zeta - z| \leqslant \rho_{1-\frac{1}{n}}(z)\}$.

Предварительно докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. *В условиях теоремы 4 интегралы*

$$R_1(\varphi, z) = \frac{-1}{\pi} \iint_{CG} (\varphi \circ y)(\zeta)\, y_{\bar\zeta} \frac{\partial}{\partial z} K_{r,m,k,n}(\zeta, z)\, dxdy, \tag{28}$$

$$R_2(\varphi, z) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} (\varphi \circ y)(\zeta)\, y(\zeta) \frac{\partial}{\partial z} K_{r,m,k,n}(\zeta, z)\, d\zeta, \tag{29}$$

при $z \in B_1$ *представляют собой рациональные функции порядка* $O(n)$.

Доказательство. Разложим дробь $(\tilde\zeta_t - z)^{-1}$ при $\zeta \in G$, $|z - a_2| > \operatorname{diam} G$ в ряд по степеням $z - a_2$

$$\frac{1}{\tilde\zeta_t - z} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tilde\zeta_t - a_2)^k}{(z - a_2)^k}$$

и подставим полученное разложение в интегральное представление $\pi_{l,n}(\zeta, z)$:

$$\pi_{l,n}(\zeta, z) = -\sum_{r=0}^{\infty} (z - a_2)^{-r} \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{l,n}(t)\, (\tilde\zeta_t - a_2)^r\, dt.$$

Разность $(\tilde\zeta_t - a_2)^r = \left\{\Psi\left[\Phi(\zeta)\, e^{-it}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] - a_2\right\}^r$, как функция от $\tilde W_t = \Phi(\zeta)\, e^{-it}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, аналитична в $K_{1+\frac{1}{n-1}}$ и в нуле равна нулю, поэтому при всех $\zeta \in G$ разлагается в равномерно сходящийся ряд

$$(\tilde{\zeta}_t - a_2)^r = \sum_{s=r}^{\infty} C_{sr} \tilde{W}_t^s = \sum_{s=r}^{\infty} C_{sr} \Phi^s(\zeta) e^{-ist} \left(1-\frac{1}{n}\right)^s.$$

Отсюда

$$\pi_{l,n}(\zeta, z) = -\sum_{r=0}^{\infty} (z-a_2)^{-r} \sum_{s=r}^{\infty} C_{sr} \Phi^s(\zeta) \left(1-\frac{1}{n}\right)^s \cdot \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} J_{l,n}(t) e^{-ist} dt =$$

$$= -\sum_{r=0}^{(l+1)(n-1)} (z-a_2)^{-r} \sum_{s=r}^{(l+1)(n-1)} \cdot C_{sr} l_s \Phi^s(\zeta) \left(1-\frac{1}{\pi}\right)^s, \tag{30}$$

где l_s — коэффициенты ядра $J_{l,n}(t)$. Положим для краткости d_{rj} коэффициенты $\pi^j_{l,n}(\zeta, z)$:

$$\pi^j_{l,n}(\zeta, z) = \sum_{r=0}^{(n-1)(l+1)j} d_{rj} (z-a_2)^{-r}$$

и подставим полученное выражение ядра $\pi^j_{l,n}(\zeta, z)$ в ядро

$$K_{r,m,k,n}(\zeta, z) = \frac{1-[1-(\zeta-z)\pi_{l,n}(\zeta, z)]^{km}}{\zeta - z} = \sum_{j=1}^{km} (-1)^{j-1} \binom{km}{j} (\zeta-z)^{j-1} \times$$

$$\times \pi^j_{l,n}(\zeta, z) = \sum_{j=1}^{km} (-1)^{j-1} \binom{km}{j} \sum_{r=0}^{(n-1)(l+1)j} d_{rj} [(\zeta-a_2)-(z-a_2)]^{j-1} (z-a_2)^{-r}. \tag{31}$$

Из (31) видим, что $K_{r,m,k,n}(\zeta, z)$ представляет собой выражение вида

$$K_{r,m,k,n}(\zeta, z) = \sum_{r=km+1}^{(n-1)(l+1)km} d_r(\zeta)(z-a_2)^{-r}, \tag{32}$$

коэффициенты которого — функции от ζ класса $A(\overline{G} \cup B_2)$. Следовательно, интегралы (28) и (29) имеют аналогичный вид и являются рациональными функциями порядка не выше $(n-1)(l+1)km+km-1 \asymp n$.

С л е д с т в и е. В условиях теоремы 4

$$R_1(1, z) + R_2(1, z) = 0. \tag{33}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя представление (32) для $K_{r,m,k,n}(\xi, z)$, имеем

$$R_1(1, z) + R_2(1, z) = \sum_{r=km+1}^{(n-1)(l+1)km} \frac{\partial}{\partial z} (z-a_2)^{-r} \left[\frac{-1}{\pi} \iint_{CG} d_r(\zeta) y_{\bar{\zeta}} \, dxdy - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} d_r(\zeta) y(\zeta) d\zeta \right].$$

Применяя теорему 2 (соотношение (6)) при $m = 0$, получим соотношение (33).

Лемма 3. *В условиях теоремы* 4 *существует натуральное* $k=k(G)\geqslant 2$ *такое, что при всех* $z\in\overline{\Omega}$, $\zeta\in\overline{G}\cup B_2$, $j=0, 1, \cdots, r$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial z^j}\left[\frac{1}{\zeta-z}-K_{r,m,k,n}(\zeta, z)\right]\right|\preceq$$

$$\preceq\begin{cases}\dfrac{\rho^m_{1-\frac{1}{n}}(z^*)}{|\zeta-z|^{1+j}(|\zeta-z|+|\zeta-\tilde{\zeta}|)^m}, & \zeta\in\overline{G}\setminus G_{1/2},\\[2ex] \dfrac{\rho^m_{1-\frac{1}{n}}(z^*)}{|\zeta-z|^{1+j}}, & \zeta\in G_{1/2},\end{cases}$$

$$|K_{r,m,k,n}(\zeta, z)|\preceq\frac{1}{|\zeta-z|+\rho_{1-\frac{1}{n}}(z^*)},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}K_{r,m,k,n}(\zeta, z)\right|\preceq\frac{1}{[|\zeta-z|+\rho_{1-\frac{1}{n}}(z^*)]^2}.$$

Доказательство леммы аналогично доказательству подобных утверждений в [2, 5] с тем отличием, что здесь вместо порядкового равенства справедливо неравенство $|\tilde{\zeta}-z|\succeq|\zeta-z^*|$, что, впрочем, не влияет на последующие рассуждения.

Доказательство теоремы 4. Введем вспомогательную функцию

$$g(z)=\frac{-1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}(\varphi\circ y)(\zeta)\,y(\zeta)\frac{d\zeta}{(\zeta-z)^2}$$

и, пользуясь леммой 1 и следствием леммы 2, представим разность $[f(z)+g(z)]-R_1(\varphi, z)-R_2(\varphi, z)$ следующим образом:

$$[f(z)+g(z)]-R_1(\varphi, z)-R_2(\varphi, z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G}(\varphi\circ y)(\zeta)\,y_{\bar{\zeta}}'\frac{\partial}{\partial z}\times$$

$$\times\left[K_{n'}(\zeta, z)-\frac{1}{\zeta-z}\right]dxdy+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}(\varphi\circ y)(\zeta)\,y(\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\left[K_{n'}(\zeta, z)-\frac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G}[(\varphi\circ y)(\zeta)-\varphi(z)]\,y_{\bar{\zeta}}\frac{\partial}{\partial z}\left[K_{n'}(\zeta, z)-\frac{1}{\zeta-z}\right]dxdy+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_2}[(\varphi\circ y)(\zeta)-\varphi(z)]\,y(\zeta)\frac{\partial}{\partial z}\left[K_{n'}(\zeta, z)-\frac{1}{\zeta-z}\right]d\zeta=J_1+J_2,$$

где $K_{n'}(\zeta, z)=K_{2,m+2,k,n}(\zeta, z)$. Пользуясь леммой 3 и оценивая отдельно J_1 и J_2 как при доказательстве теоремы 3, придем к оценкам

$$|J_1|<\begin{cases}\left|\dfrac{1}{\pi}\iint\limits_{G_{2\rho}(z)}\dfrac{(\varphi\circ y)(\zeta)-\varphi(z)}{(\zeta-z)^2}\,y_{\bar{\zeta}}\,dxdy\right|+M_1\Omega_n(\varphi, z), & z\in B_1\cap B_n^{(\rho)},\\[2ex] M_1\Omega_n(\varphi, z), & z\in B_1\setminus B_n^{(\rho)},\end{cases}$$

$$|J_2|\leqslant M_1\Omega_n(\varphi, z).$$

Отсюда, учитывая, что согласно лемме 2, $R_l(\varphi, z)$ — рациональные функции порядка $O(n)$, получим утверждение теоремы.

Следствие. Пусть $\varphi(z)$ непрерывна на $y[G]$ и аналитична в $y[G]$. Тогда для любого $n \geqslant 0$ существует рациональная функция порядка не выше n такая, что при всех $z \in \overline{B}_1$

$$|f(z) - R(\varphi, z)| \preceq \Omega_n(\varphi, z).$$

4°. Из теорем 1, 3, 4 и их следствий сразу получаем следующую теорему о приближении аналитических функций в многосвязных областях.

Теорема 5. *Пусть G — конечная p-связная область с квазиконформной границей $\Gamma = \bigcup_{l=1}^{p} \Gamma_l$, $f(z) \in A(\overline{G})$. Тогда для любого натурального n существует рациональная функция $R(f, z)$ порядка не выше n с полюсами вне G такая, что при всех $z \in \overline{G}$*

$$|f(z) - R(f, z)| \preceq \sum_{l=1}^{p} \Omega_n^{(l)}(f, z)$$

и

$$|f(z) - R(f, z)| \preceq \omega\left[f, \rho^{(l)}_{1\pm\frac{1}{n}}(z)\right], \text{ для } z \in \Gamma_l, \ i = 1, 2, \cdots, p,$$

где

$$\Omega_n^{(l)}(f, z) = \omega\left[f, \rho^{(l)}_{1\pm\frac{1}{n}}(z_l^*)\right]\left[\frac{\rho^{(l)}_{1\pm\frac{1}{n}}(z_l^*)}{(z - z_l^*) + \rho^{(l)}_{1\pm\frac{1}{n}}(z_l^*)}\right]^m,$$

z_l^* — ближайшая к z точка на Γ_l, $\rho^{(l)}_{1\pm\frac{1}{n}}(z_l^*)$ — расстояние до линии уровня $\Gamma_{l, 1\pm\frac{1}{n}}$, причем знак „+" в этих выражениях ставится только при $i = 1$.

С помощью обратных теорем теории приближения [6] и теоремы 5 получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть G — конечная p-связная область с квазиконформной границей $\Gamma = \bigcup_{l=1}^{p} \Gamma_l$. Тогда для того чтобы $f(z) \in A(\overline{G})$ и $\omega(f, h) \asymp h^\alpha$ $(0 < \alpha < 1)$, необходимо и достаточно существование последовательности рациональных функций $R_n(z)$ порядка не выше n с полюсами вне G удовлетворяющих неравенствам*

$$|f(z) - R_n(z)| \preceq \left[\rho^{(l)}_{1\pm\frac{1}{n}}(z)\right]^\alpha, \ z \in \Gamma_l, \ i = 1, 2, \cdots, p.$$

В заключение считаю своим долгом выразить признательность В. И. Белому за постановку задачи, а также ему и В. В. Андриевскому за полезные замечания.

Научно-исследовательский и проектно-конструкторский институт
ЮжНИИГипрогаз

Поступила 19.VII.1979

Մ. Զ. ԴՎԵՅՐԻՆ. *Անալիտիկ ֆունկցիաների մոտարկումը բազմակապ տիրույթներում (ամփոփում)*

Հոդվածում ստացված է թեորեմ ֆունկցիաների ռացիոնալ մոտարկման արագության վերաբերյալ, որոնք անալիտիկ են կվազիկոնֆորմ եզրով վերջավոր կապանի տիրույթում և անընդհատ են փակ տիրույթներում։

M. Z. DVEIRIN. *On approximation of analytical functions in multiconnected domains* (summary)

For functions holomorphic in a finite connected region G and continuous in the lousure $\overline{G}$ the speed of rational approximation is found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. И. Белый*. Конформные отображения и приближение функций в областях с квазиконформной границей, Матем. сб., 104, (144), № 3, 1977, 163—193.
2. *В. И. Белый*. Приближение функций классов $A^r(\overline{G})$ в конечных областях с квазиконформной границей, в кн. «Метрические вопросы теории функций и отображений», К., «Наукова думка», 1980.
3. *Л. Альфорс*. Лекции по квазиконформным отображениям, М., «Мир», 1969.
4. *И. Н. Векуа*. Обобщенные аналитические функции, М., Гос. Изд. физ.-мат. лит., 1959.
5. *В. К. Дзядык*. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, М., «Наука», 1977.
6. *Н. А. Лебедев, П. М. Тамразов*. Обратные теоремы приближения на регулярных компактах комплексной плоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 6, 1970, 1340—1390.