ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVII, № 1, 1982 Математика

С. Г. РУБАНОВИЧ

О НЕКОТОРЫХ СИСТЕМАХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Введение

Пусть Z^+ — конечная односвязная область в комплексной плоскости, ограниченная C^∞-гладким контуром Γ, а Z^- — область, дополняющая $Z^+ \cup \Gamma$ до полной плоскости. Положительным направлением на Γ будем считать направление, оставляющее Z^+ слева. Рассмотрим на Γ систему сингулярных интегральных уравнений

$$Iu(t_0) \equiv A(t_0)\,u + \frac{B(t_0)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{u(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{a(t_0)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma u(t)\times$$

$$\times \ln(1-t_0/t)\,dt + \frac{b(t_0)}{2\pi i}\int\limits_\Gamma u(t)\ln(1-t/t_0)\,dt = f(t_0), \tag{1}$$

где $u=(u_1(t),\cdots,u_n(t))$ — искомая вектор-функция; $f=(f_1(t),\cdots,f_n(t))$ — заданная вектор-функция; A, B, a, b — $n\times n$ матрицы-функции на Γ; под $\ln(1-t/t_0)$ (соответственно под $\ln(1-t_0/t)$) при заданном $t_0\in\Gamma$ подразумевается ветвь логарифма, непрерывная по $t\in Z^+$ (соответственно по $t\in Z^-$) и обращающаяся в нуль при $t=0$ (соответственно при $t=\infty$). Предполагается, что $O\in Z^+$. Введем обозначения

$$A+B=P(t),\quad A-B=Q(t),\quad iat'_s=p(t);\ ibt'_s=q(t), \tag{2}$$

где t'_s есть производная от точки контура t по длине s дуги. Уравнение (1) называется уравнением нормального типа, если $\det P$, $\det Q\neq 0$ всюду на Γ. Уравнения нормального типа изучены достаточно хорошо [1, 2, 3, 4 и др.). Мы рассмотрим случай, когда P, Q, p, q имеют разрывы первого рода в точках $t_1,\cdots,t_N$, а на интервалах $l_1,\cdots,l_N$ между точками разрыва бесконечно дифференцируемы (гладкие). Причем матрицы P и Q могут вырождаться, но на каждом интервале l_m сохраняют постоянные ранги $r_P^{(m)}$ и $r_Q^{(m)}$ соответственно. В случае гладких коэффициентов такие уравнения впервые были рассмотрены Н. Е. Товмасяном в [10]. Мы будем предполагать, что

1) $\det(\xi P+p)=p^{(0)}(t)\,\xi^{r_P}+O(\xi^{r_P-1})$; $\det(\xi Q+q)=q^{(0)}(t)\,\xi^{r_Q}+O(\xi^{r_Q-1})$ при $|\xi|\to\infty$, где r_P и r_Q на каждом интервале l_m совпадают с $r_P^{(m)}$ и $r_Q^{(m)}$ соответственно, а скалярные функции $p^{(0)}$ и $q^{(0)}$ на Γ не обращаются в нуль.

2) Для каждого $m=1,\cdots,N$ существует окрестность Δ_m точки t_m на контуре Γ, совпадающая с отрезком прямой линии.

3) Коэффициенты P, p, Q, q кусочно постоянны на Δ_m, $m=1,\cdots, N$.

4) Матрицы $[P(t_m+0), Q(t_m+0)]$ и $[P(t_m-0), Q(t_m-0)]$ имеют ранг n.

Обсуждение. Условие 1) является необходимым для введенной ниже нетеровости уравнения (1). Условие 2) не является ограничением, так как на такой контур всегда можно перейти путем замены независимой переменной. Ограничением является условие 3). От него мы избавимся в нашей последующей публикации, что нетривиально, так как к условиям нетеровости добавится условие на производные от P и Q слева и справа в точках разрыва, а член, зависящий от этих производных, добавится к формуле индекса.

Уравнение (1) будет рассмотрено в соболевском пространстве $H_\alpha(\Gamma)$ [5], $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$. На действительной оси H_α определяется как класс функций, для которых преобразования Фурье $\tilde{u}(\xi)$ таковы, что $(1+|\xi|^2)^{\alpha/2}\tilde{u}(\xi)\in L_2(-\infty, \infty)$. Обычным образом (например, 5, стр. 196) это определение переносится на контур Γ, являющийся одномерным многообразием. Отметим, что $H_0(\Gamma)=L_2(\Gamma)$. При $-\frac{1}{2}<\alpha<0$ в $H_\alpha(\Gamma)$ входят и обобщенные функции, но мы все равно будем называть их функциями. При этом интегралы в (1) будут пониматься как непрерывные продолжения соответствующих интегральных операторов с $C^\infty(\Gamma)$ на $H_\alpha(\Gamma)$ (непрерывные по норме в H_α). От правой части f потребуем, чтобы на каждом интервале l_m, $m=1,\cdots, N$ производная $f'(t)\in H_\alpha$, а в точках $t_1,\cdots, t_N$ функция $f(t)$ имела разрывы первого рода. Пространство таких функций f обозначим через F и введем на нем норму:

$$\|f\|_F=\sup_{t\in\Gamma}|f(t)|+\sum_{m=1}^{N}\|f'\|_{H_\alpha(l_m)}. \tag{3}$$

Уравнение (1) назовем нетеровым в пространстве H_α, если однородное уравнение $Lu=0$ имеет $k_1<\infty$ линейно независимых решений в H_α, а неоднородное $Lu=f\in F$ имеет решение $u\in H_\alpha(\Gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi_1(f)=\varphi_2(f)=\cdots=\varphi_{k_2}(f)=0, \tag{4}$$

где $\varphi_1,\cdots,\varphi_{k_2}$ — некоторые ограниченные линейно независимые функционалы в F. Индексом уравнения (1) назовем: $\operatorname{ind} L=k_1-k_2$.

Классы H_α выбраны нами потому, что получение условий нетеровости уравнения (1) в них наиболее просто. Основываясь на результатах в этих классах в наших дальнейших публикациях будет изучена нетеровость уравнения (1) в весовых пространствах Гельдера. Настоящая статья является развернутым изложением результатов, касающихся условий нетеровости, анонсированных в [6[. В [6] имеется также формула индекса, которую мы здесь не выводим из-за ограниченности объема.

Сформулируем наши результаты о нетеровости. Зафиксируем точку разрыва t_m и введем матрицы: $P_\pm = P(t_m \pm 0)$. Аналогично введем $Q_\pm$, $p_\pm$ и $q_\pm$. В нормальном случае в теории нетеровости важную роль играет жорданова форма матрицы: $Q_+^{-1} P_+ P_-^{-1} Q_-$ [2]. В нашем случае вместо этой матрицы рассматриваются матрицы-функции:

$$R_m(\xi) = (\xi Q_+ + q_+)^{-1} (\xi P_+ + p_+)(\xi P_- + p_-)^{-1} (\xi Q_- + q_-), \tag{5}$$

$$S_m(\xi) = (\xi P_- + p_-)^{-1} (\xi Q_- + q_-)(\xi Q_+ + q_+)^{-1} (\xi P_+ + p_+). \tag{6}$$

Вместо приведения их к жордановой форме приводим их к виду:

$$V_m^{-1}(\xi) R_m(\xi) V_m(\xi) = \operatorname{diag} \{(M_{mj} + O(\xi^{-1}))\, \xi^{2-j}\}_{j=0}^{4} + O(\xi^{-3}), \tag{7}$$

$$W_m^{-1}(\xi) S_m(\xi) W_m(\xi) = \operatorname{diag} (\{\mu_{mj} + O(\xi^{-1}))\, \xi^{2-j}\}_{j=0}^{4} + O(\xi^{-3}) \tag{8}$$

при $|\xi| \to \infty$, где $V_m(\xi) = v_m + O(\xi^{-1})$ и $W_m(\xi) = w_m + O(\xi^{-1})$ — $n \times n$ матрицы-функции с невырожденными постоянными матрицами v_m и w_m, а $\operatorname{diag}\{\cdots\}$ означает квадратную блочно-диагональную матрицу, на главной диагонали которой стоят блоки, указанные в фигурных скобках: M_{mj} и μ_{mj} — невырожденные квадратные блоки размером n_{mj} и ν_{mj} соответственно, приведенные к жордановой форме.

Возможность приведения к виду (7) и (8) и алгоритм такого приведения обсуждаются в § 1. Там же выясняется, что размеры, собственные числа и кратность собственных чисел матриц M_{mj} и μ_{mj} совпадают. § 3 посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1)—4) *и имеют место представления* (7) *и* (8). *Пусть каждое собственное число* λ *матрицы* M_{mj}, $m = 1, \cdots, N$; $j = 0, \cdots, 4$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\arg \lambda \neq 2\pi\alpha + (g + 1)\pi,$$

где $g = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ *при* $j = 1, 3$ *и* $g = 0, \pm 2, \pm 4, \cdots$, *при* $j = 0, 2, 4$. *Тогда уравнение* (1) *нетерово в* H_α, $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$.

При доказательстве этой теоремы используются результаты для уравнений на оси, получаемые в § 2.

§ 1. О представлениях (7) и (8)

Будем считать, что все матрицы-функции, встречающиеся в этом параграфе, определены при достаточно больших $|\xi|$ и при $|\xi| \to \infty$ имеют асимптотическое разложение

$$R(\xi) = \sum_{j=-\infty}^{\rho} r_j \xi^j, \text{ где } r_j \text{ — постоянные матрицы.} \tag{9}$$

Лемма 1. *Пусть в* (9) $R(\xi)$ — *квадратная матрица, а матрица* r_ρ *вырождена. Тогда существуют квадратные матрицы-функции* $U_k(\xi) = u_k + O(\xi^{-1})$, $k = 1, 2$ *порядка* n (*как и* R) *с невырожденными матрицами* u_1 *и* u_2, *такие, что*

$$U_1(\xi) R(\xi) U_2(\xi) = \operatorname{diag} \{(B_j + O(\xi^{-1}))\, \xi^{\rho-j}\}_{j=0}^{\rho}, \tag{10}$$

где B_j *есть* $n_j\times n_j$*-блок,* $j=0,\cdots,\rho$, *причем* $\det B_j\neq 0$ *при* $j=0,\cdots,\rho-1$. *Не исключается, что* $n_j=0$ *для какого-нибудь* j, *в этом случае соответствующий блок отсутствует.*

Доказательство. Положим $n_0=\operatorname{rang} r_\rho$. Существуют невырожденные матрицы α и β, такие, что в матрице $\alpha r_\rho\beta$ отличны от нуля лишь элементы, стоящие на пересечении первых n_0 строк и первых n_0 столбцов (т. е. элементы главного минора порядка n_0). Матрицу этих элементов обозначим через B_0. Тогда $\alpha R(\xi)\beta$ примет вид

$$\left(\begin{array}{c|c}\xi^\rho B_0+e_{11}(\xi) & e_{12}(\xi)\\ \hline e_{21}(\xi) & e_{22}(\xi)\end{array}\right), \tag{11}$$

где $e_{ij}=O(\xi^{\rho-1})$. Ясно, что при достаточно больших $|\xi|$ матрица $B_0\xi^\rho+e_{11}(\xi)$ обратима и

$$(B_0\xi^\rho+e_{11}(\xi))^{-1}e_{12}(\xi)=O(\xi^{-1});\ e_{21}(\xi)(B_0\xi^\rho+e_{11})^{-1}=O(\xi^{-1}).$$

Положим

$$\varkappa=\left(\begin{array}{c|c}I_{n_0} & -(B_0\xi^\rho+e_{11})^{-1}e_{12}\\ \hline 0 & I_{n-n_0}\end{array}\right);\ \theta=\left(\begin{array}{c|c}I_{n_0} & 0\\ \hline -e_{21}(B_0\xi^\rho+e_{11})^{-1} & I_{n-n_0}\end{array}\right), \tag{12}$$

где I_n — единичная матрица размером $n\times n$. Тогда

$$\theta\alpha R\beta\varkappa=\operatorname{diag}\{(B_0+O(\xi^{-1}))\xi^\rho,\ R_1(\xi)\}. \tag{13}$$

Те же рассуждения можно применить и к $R_1(\xi)$ и найти квадратные матрицы-функции $\gamma(\xi)=\gamma_0+O(\xi^{-1})$ и $\delta(\xi)=\delta_0+O(\xi^{-1})$ порядка $n-n_0$ с невырожденными γ_0 и δ_0, такие, что

$$\gamma R_1\delta=\operatorname{diag}\{B_1+O(\xi^{-1}))\xi^{\rho-1},\quad R_2(\xi)\},$$

где $R_2=O(\xi^{\rho-2})$. Легко видеть, что умножая правую часть равенства (13) слева на $\operatorname{diag}\{I_{n_0},\gamma\}$, а справа на $\operatorname{diag}\{I_{n_0},\delta\}$, получим

$$\operatorname{diag}\{(B_0+O(\xi^{-1}))\xi^\rho,\ (B_1+O(\xi^{-1}))\xi^{\rho-1},\ R_2\}.$$

Повторяя эти рассуждения $\rho-1$ раз, приходим к (10).

Из доказательства леммы 1 легко усмотреть, что справедлива

Лемма 2. *В условии леммы* 1 *числа* $n_0,\cdots,n_\rho$ *определяются однозначно.*

Замечание. Очевидно, всегда можно добиться того, чтобы в (10) блоки $B_j+O(\xi^{-1})$ равнялись I_{n_j} при $j=0,\cdots,\rho-1$. Если B_ρ также невырождена, то и последний блок можно считать равным I_{n_j}

Следующая лемма 3 дает ответ на вопрос о возможности представления (7). При ее доказательстве мы используем следующий алгоритм:

Предложение 1. *Пусть* $n\times n$*-матрица* $R(\xi)$ *имеет вид* (11), *где* B_0 *— невырожденная* $n_0\times n_0$*-матрица* $(n_0<n)$ *и* e_{11}, $e_{22}=O(\xi^{\rho-1})$. *Пусть* $e_{12}=O(\xi^{\rho-a})$, *а* $e_{21}=O(\xi^{\rho-b})$, *где целые* $a,b\geqslant 1$. *Матрицы-функции* $\varkappa(\xi)$ *и* $\theta(\xi)$ *определим по формулам* (12). *Тогда* $\varkappa^{-1}R\varkappa$ *также будет иметь вид* (11), *причем равенства:* e_{11}, $e_{22}=O(\xi^{\rho-1})$ *и* $e_{21}=O(\xi^{\rho-b})$ *сохранятся, а степень по* ξ *блока* e_{12} *уменьшится на единицу. Аналогично,* $\theta R\theta^{-1}$ *примет вид* (11) *с умень-*

шением на единицу степени e_{21} и сохранением степени блоков e_{11}, e_{12}, e_{22}.

Это предложение проверяется непосредственным вычислением.

Лемма 3. *Пусть $R(\xi)$ та же, что и в лемме 1, и пусть $\sigma>0$. Для того чтобы существовала $n\times n$-матрица-функция $V=v+O\times\times(\xi^{-1})$ с невырожденной матрицей v, такая, что*

$$V^{-1}RV=\operatorname{diag}\{(M_j+O(\xi^{-1})\ \xi^{\rho-j}\}_{j=0}^{\rho}+O(\xi^{-\sigma});\ \det M_j\neq 0,\qquad (14)$$
$$j=0,\cdots,\rho-1$$

необходимо и достаточно, чтобы главные части u_1 и u_2 матриц $U_1(\xi)$ и $U_2(\xi)$ из (10) удовлетворяли условию:

M). Главные миноры матрицы $(u_1u_2)^{-1}$ порядков n_0, $n_0+n_1,\cdots$, $\sum_{j=0}^{\rho-1} n_j$ не обращаются в нуль.

Доказательство. Первый пункт посвятим доказательству инвариантности условия M) относительно выбора матриц u_1 и u_2, если только выполнено равенство (10).

1°. Пусть имеются матрицы $U_j'(\xi)=u_j'+O(\xi^{-1})$, $j=1,2$, с невырожденными u_1' и u_2', такие, что

$$U_1'(\xi)R(\xi)U_2'(\xi)=\operatorname{diag}\{(B_j'+O(\xi^{-1}))\ \xi^{\rho-j}\}_{j=0}^{\rho},\qquad (15)$$

где B_j' — невырожденная $n_j\times n_j$-матрица при $j=0,\cdots,\rho-1$. Напомним, что числа n_j определяются однозначно. Пусть $(u_1'u_2')^{-1}$ удовлетворяет условию M). Покажем, что тогда $(u_1u_2)^{-1}$ из (10) также удовлетворяет условию M). Имеем

$$(u_1u_2)^{-1}=(u_2^{-1}u_2')(u_1'u_2')^{-1}(u_1'u_1^{-1}).$$

С другой стороны, согласно (10) и (15)

$$\operatorname{diag}\{(B_j+O(\xi^{-1}))\ \xi^{\rho-j}\}_{j=0}^{\rho}\ (u_2^{-1}u_2'+O(\xi^{-1}))=$$
$$=(u_1(u_1')^{-1}+O(\xi^{-1}))\operatorname{diag}\{(B_j'+O(\xi^{-1}))\ \xi^{\rho-j}\}_{j=0}^{\rho}.$$

Приравнивая коэффициенты при старших степенях ξ, находим, что

$$u_2^{-1}u_2'=\|s_{ij}\|_{i,j=0}^{\rho};\ u_1(u_1')^{-1}=\|r_{ij}\|_{i,j=0}^{\rho},$$

где s_{ij} и r_{ij} есть $n_i\times n_j$-блоки, причем $s_{ij}=0$ при $i<j$, а $r_{ij}=0$ при $i>j$. Так как $u_2^{-1}u_2'$ и $u_1(u_1')^{-1}$ невырождены, то и блоки s_{ii} и r_{ii} невырождены. Мало того, $u_1'u_1^{-1}=[u_1(u_1')^{-1}]^{-1}$ — тоже верхняя блочно-треугольная матрица. Теперь нетрудно заключить, что для любого $\theta=0,\cdots,\rho-1$ главный минор порядка $\sum_{j=0}^{\theta} n_j$ матрицы $(u_1u_2)^{-1}$ является произведением главных миноров того же порядка матриц $u_2^{-1}u_2'$, $(u_1'u_2')^{-1}$, $u_1'u_1^{-1}$ и потому невырожден.

2°. Построение матрицы $V(\xi)$. Из (10) имеем

$$U_2^{-1} RU_2 = (T + O(\xi^{-1}))\, \mathrm{diag}\, \{(B_j + O(\xi^{-1}))\, \xi^{\rho-j}\}_{j=0}^{\rho}, \tag{16}$$

где $T = (u_1\ u_2)^{-1}$. Можно считать, что $R(\xi)$ совпадает с правой частью (16). Тогда у матрицы r_ρ (см. формулу (9)) отличны от нуля лишь первые n_0 столбцов, а главный минор порядка n_0 не равен нулю (не вырожден). Поэтому существует невырожденная матрица α такая, что в матрице $\alpha^{-1} r_\rho \alpha$ отличны от нуля лишь элементы главного минора порядка n_0, то есть

$$\alpha^{-1} R\alpha = \left(\begin{array}{c|c} M_0 \xi^\rho + e_{11}(\xi) & e_{12}(\xi) \\ \hline e_{21}(\xi) & e_{22}(\xi) \end{array}\right); \quad e_{ij} = O(\xi^{\rho-1}).$$

Несколько раз понижая степени блоков e_{12} и e_{21} по алгоритму предложения 1, приводим эту матрицу к виду

$$\mathrm{diag}\, \{(M_0 + O(\xi^{-1}))\, \xi^\rho,\ R_1(\xi)\} + O(\xi^{-\sigma}). \tag{17}$$

Условие M) не зависит от выбора матриц u_1 и u_2. Поэтому, приводя первое слагаемое (17) к виду (10) с помощью матриц вида $U_j(\xi) = \mathrm{diag}\, \{I_{n_0}, U_j^{(1)}(\xi)\}$, $j = 1, 2$, находим, что $R_1(\xi)$ опять удовлетворяет условию леммы 3. Следовательно, указанную выше процедуру можно повторить (см. окончание доказательства леммы 1). Повторяя так $\rho - 1$ раз, приходим к представлению (14). Необходимость условия M) следует из п. 1°. Лемма 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Умножая обе части представлений (7) и (8) на ξ^2, получим представления вида (14), так что лемма 3 полностью решает вопрос о возможности представлений (7) и (8). Из этой леммы следует также, что если возможны представления (7) и (8), то возможны представления того же вида, с заменой $O(\xi^{-3})$ на $O(\xi^{-\sigma})$ для любого $\sigma > 3$. При этом, вообще говоря, $V_m(\xi)$ изменятся, однако, как видно из алгоритма, приведенного в доказательстве леммы 3, матрицы M_{mj} останутся без изменения.

Лемма 4 указывает на связь между представлениями (7) и (8).

Л е м м а 4. *Пусть заданы $n \times n$-матрицы-функции $U_i(\xi) = O(\xi)$, $i = 1, 2$, такие, что $U_i^{-1}(\xi) = O(\xi)$, $i = 1, 2$. Предположим, что*

$$U_1 U_2 = \mathrm{diag}\, \{(M_j + O(\xi^{-1}))\, \xi^{2-j}\}_{j=0}^{4} + O(\xi^{-5}),$$

$$U_2 U_1 = \mathrm{diag}\, \{(\mu_j + O(\xi^{-1}))\, \xi^{2-j}\}_{j=0}^{4} + O(\xi^{-5}),$$

где M_j и μ_j — невырожденные матрицы размером $n_j \times n_j$ и $\nu_j \times \nu_j$ соответственно, $j = 0, \cdots, 4$. Тогда для каждого $j = 0, \cdots, 4$ размеры n_j и ν_j равны, причем совпадают собственные числа и их кратности матриц M_j и μ_j. Мало того, имеют место равенства

$$U_i = \mathrm{diag}\, \{U_{ij}(\xi)\}_{j=0}^{4} + O(\xi^{-3}), \quad i = 1, 2, \tag{18}$$

где U_{ij} есть $n_j \times n_j$-блок, $i = 1, 2$; $j = 0, \cdots, 4$. При этом

$$U_{1j}^{-1} = O(\xi^{\min(j-1,\, 1)}); \quad U_{2j} = O(\xi^{\min(3-j,\, 1)}), \quad j = 0, \cdots, 4. \tag{18'}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вначале докажем равенство (18). Представим $U_1 = \{u_{l,j}\}_{l,j=0}^{4}$, где $u_{l,j}$ есть $\nu_l \times n_j$-блок. Учитывая очевидное равенство: $(U_1 U_2)\, U_1 = U_1\, (U_2 U_1)$, имеем

$$\xi^{2-l}(\mu_l+O(\xi^{-1}))\,u_{l,\,j}=u_{l,\,j}\,(M_j+O(\xi^{-1}))\,\xi^{2-j}+O(\xi^{-1}).$$

При $l\neq j$ для равенства порядков роста по ξ левой и правой частей необходимо, чтобы $u_{l,\,j}=O(\xi^{-3})$. Так как $U_1^{-1}=O(\xi)$, то блоки $u_{l,\,j}$ должны быть квадратными (т. е. $\nu_j=n_j$). Для U_2 представление (18) получается аналогично.

Остается связать собственные числа. Имеем

$$U_{1,\,j}\,U_{2,\,j}=\xi^{2-j}(M_j+O(\xi^{-1})).$$

Проведем доказательство, например, для $j=2$. Применяя лемму 1 и учитывая замечание после леммы 2, представим $U_{1,\,2}$ в виде:

$$\xi U_{1,\,2}=A_1(\xi)\;JA_2(\xi);\quad J=\operatorname{diag}\,\{I_{\alpha_k}\xi^k\}_{k=0}^2,$$

где $A_l=a_l+O(\xi^{-1})\,(\det a_l\neq 0)$, $l=1,\,2$. Тогда, из равенства $U_1(U_2U_1)=(U_1U_2)\,U_1$ получим

$$JA_2(\mu_2+O(\xi^{-1}))\,A_2^{-1}=A_1^{-1}(M_2+O(\xi^{-1}))\,A_1J. \tag{19}$$

Матрицы $a_2\mu_2a_2^{-1}$ и $a_1^{-1}M_2a_1$ представим в блочном виде

$$a_2\mu_2a_2^{-1}=\{\mu_{ij}\}_{i,\,j=0}^2;\quad a_1^{-1}M_2a_1=\{M_{ij}\}_{ij=0}^2$$

с $\alpha_i\times\alpha_j$-блоками μ_{ij} и M_{ij}. Приравнивая коэффициенты при старших степенях в (19), находим: $\mu_{ij}=0$ при $i>j$; $M_{ij}=0$ при $i<j$. Отсюда следует совпадение характеристических уравнений матриц $a_2\mu_2a_2^{-1}$ и $a_1^{-1}M_2a_1$. Равенства (18′) очевидны. Лемма 4 доказана.

Замечание. Лемма 4 следующим образом применяется к представлениям (7) и (8). Нужно в них $O(\xi^{-3})$ заменить на $O(\xi^{-5})$ (см. замечание к лемме 3), а затем положить

$$U_1=V_m^{-1}(\xi Q_++q_+)^{-1}(\xi P_++p_+)\,W_m;\;U_2=W_m^{-1}(\xi P_-+$$
$$+p_-)^{-1}(\xi Q_-+q_-)\,V_m.$$

§ 2. Система уравнений на оси

На ориентированном контуре Γ (Γ может быть и осью) введем операторы

$$\Pi^{\pm}u(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(t)\,dt}{t-t_0}\pm\frac{1}{2}u(t_0). \tag{20}$$

Эти операторы непрерывны в $H_\alpha(\Gamma)$ и обладают свойствами

$$(\Pi^+)^2=\Pi^+;\;(\Pi^-)^2=-\Pi^-;\;\Pi^+\Pi^-=\Pi^-\Pi^+=0. \tag{21}$$

Пусть на оси $(-\infty,\,\infty)$ задана ограниченная измеримая функция $\varphi(\xi)$. Через $\varphi(D)$ обозначим оператор $\varphi(D)\,u(t)=F^{-1}(\varphi(\xi)\,\tilde{u}(\xi))$, где $\tilde{u}(\xi)$ есть образ Фурье функции $u(t)$, а через F^{-1} обозначено обратное преобразование Фурье. На прямой $-\infty<s<\infty$ рассмотрим оператор:

$$Ku(s)=\begin{cases}K_+u(s), & s>0\\ K_-u(s), & s<0,\end{cases}$$

где $K_\pm=D(P_\pm\Pi^+-Q_\pm\Pi^-)+p_\pm\Pi^+-q_\pm\Pi^-+\varphi_\pm(D)$; $D=-i\,d/ds$, $u(s)=(u_1(s),\cdots,u_n(s))$; все коэффициенты — постоянные $n\times n$-матрицы, $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\zeta)$—некоторые измеримые ограниченные $n\times n$-матрицы-функции. Областью определения оператора K будем считать множество функций $u\in H_\alpha$, для которых существует $f\in H_\alpha$, такая, что K_+u и f совпадают при $s>0$ как обобщенные функции, а K_-u и f совпадают при $s<0$. Очевидно, $f\in H_\alpha$ однозначно определяется по u при $-\frac{1}{2}<$ $<\alpha<\frac{1}{2}$. При этих условиях определен оператор $Ku=f$. Будем считать, что выполнены условия:

а)

$$\det(\xi P_\pm+p_\pm)=p_\pm^{(0)}\xi^{r_\pm}+O(\xi^{r_\pm-1});\ \det(\xi Q_\pm+q_\pm)=q_\pm^{(0)}\xi^{\rho_\pm}+O(\xi^{\rho_\pm-1}),$$

где $r_\pm$ и $\rho_\pm$ — ранги $P_\pm$ и $Q_\pm$ соответственно, а числа $p_\pm^{(0)}$ и $q_\pm^{(0)}$—ненулевые.

б) Обозначим

$$R_+(\xi)=(\xi Q_++q_+)^{-1}(\xi P_++p_+)(\xi P_-+p_-)^{-1}(\xi Q_-+q_-),$$

$$R_-(\xi)=(\xi P_-+p_-)^{-1}(\xi Q_-+q_-)(\xi Q_++q_+)^{-1}(\xi P_++p_+).$$

Имеют место представления

$$V_\pm^{-1}(\xi)\,R_\pm(\xi)\,V_\pm(\xi)=\operatorname{diag}\{(M_\pm+O(\xi^{-1}))\,\xi^{2-j}\}_{j=0}^{4}+O(\xi^{-\sigma}),\tag{22}$$

где $V_\pm(\xi)=v_\pm+O(\xi^{-1})$ и $\det v_\pm\neq0$; $M_{\pm j}$ — невырожденные $n_j\times n_j$-матрицы, $j=0,\cdots,4$. Согласно замечанию к лемме 3, если $\sigma\geqslant3$, то σ можно взять сколь угодно большим. Это обстоятельство позволяет нам не интересоваться изменением порядка этого члена в следующих ниже преобразованиях и опять записывать его в виде: $O(\xi^{-\sigma})$.

в) Ранг обеих $n\times2n$-матриц $\{P_\pm,\ Q_\pm\}$ равен n.

Теорема 2. *Существуют такие финитные ограниченные измеримые матрицы-функции $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\zeta)$, что ядро оператора K в H_α конечномерно и существует ограниченный в $H_\alpha(-\infty,\infty)$ правый обратный K' оператора K при условии, что каждое собственное число λ матрицы M_{+j} удовлетворяет условиям, указанным в теореме 1.*

Доказательство. Будем решать уравнение: $Ku=f$ обычным способом, каким решаются парные уравнения [7]. Обозначим

$$f_\pm(s)=\begin{cases}f(s), & \pm s>0\\ 0, & \pm s<0\end{cases};\quad A_\pm(\xi)=\begin{cases}\xi P_\pm+p_\pm+\varphi_\pm(\xi), & \xi<0\\ \xi Q_\pm+q_\pm+\varphi_\pm(\xi), & \xi>0.\end{cases}$$

Всегда можно подобрать матрицы-функции $\varphi_\pm(\xi)$, так, что $\det A_\pm(\xi)\neq0$ при всех ξ. Применяя преобразование Фурье получим

$$A_+(\xi)\,\tilde{u}(\xi)=\tilde{f}_+(\xi)+\Psi^-(\xi);\quad A_-(\xi)=\tilde{f}_-(\xi)+\Psi^+(\xi), \tag{23}$$

где $\Psi^+(\xi)$ — аналитическая функция в верхней полуплоскости (комплексной), а $\Psi^-(\xi)$ — в нижней, причем для некоторого действительного θ [5, стр. 47]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(\xi+i\tau)(1+|\xi|+|\tau|)^{\theta}|^2\, d\xi \leqslant c = \mathrm{const} \tag{23'}$$

равномерно по $\tau\in(-\infty,\infty)$ (в данном случае $\theta=+\alpha-1$), где $\Psi(z)=\Psi^+(z)$ при $\operatorname{Im} z>0$ и $\Psi(z)=\Psi^-(z)$ при $\operatorname{Im} z<0$. Пусть $g_q(z)$ — кусочно аналитическая (с разрывом по действительной оси) невырожденная матрица-функция, такая, что при $|z|\to\infty$ верхней полуплоскости

$$g_q(z)=zQ_-+q_-+O(z^{-\sigma}) \text{ и } g_q(z)=zQ_++q_++O(z^{-\sigma}) \tag{24}$$

при $|z|\to\infty$ в нижней полуплоскости. Аналогично определяем $g_p(z)$ (с заменой Q_+, q_+, на P_+, p_+ соответственно). Положим $\Psi=g_p\Phi_1=$ $=g_q\Phi_2$ и исключим из (23) $\tilde{u}$. Получим два эквивалентных уравнения (ниже они оба нам понадобятся):

$$G(\xi)\tilde{f}_-(\xi)+\Phi_1^+(\xi)=B_-(\xi)(G_+(\xi)\tilde{f}_+(\xi)+\Phi_1^-(\xi)), \tag{25}$$

$$F_+(\xi)\tilde{f}_+(\xi)+\Phi_2^-(\xi)=B_+|\xi|(F_-(\xi)\tilde{f}_-(\xi)+\Phi_2^+(\xi)), \tag{26}$$

где матрицы $B_\pm$, $G_\pm$ и $F_\pm$ имеют вид:

$$B_\pm(\xi)=R_\pm(\xi)+O(\xi^{-\sigma}),\ \text{при } \xi\to\pm\infty \text{ и } B_\pm(\xi)=I+O(\xi^{-\sigma}),$$
$$\text{при } \xi\to\mp\infty;$$
$$G_\pm(\xi)=(\xi P_\pm+p_\pm)^{-1}+O(\xi^{-\sigma}),\ \text{а } F_\pm(\xi)=(\xi Q_\pm+q_\pm)^{-1}+O(\xi^{-\sigma}),$$
$$\text{при } |\xi|\to\infty.$$

Образ Фурье решения $\tilde{u}$ выражается через Φ_1 и через Φ_2:

$$\tilde{u}=A_+^{-1}(\xi)\tilde{f}_-(\xi)+T_1(\xi)\,\Phi_1^+(\xi)=A_-^{-1}(\xi)\tilde{f}_+(\xi)+T_2(\xi)\,\Phi_2^-(\xi), \tag{27}$$

где матрицы T_1 и T_2 имеют вид:

$$T_1(\xi)=\begin{cases}(\xi P_++p_+)^{-1}(\xi Q_++q_+)+O(\xi^{-\sigma}), & \xi\to\infty\\ I+O(\xi^{-\sigma}) & ,\ \xi\to-\infty,\end{cases}$$

$$T_2(\xi)=\begin{cases}I+O(\xi^{-\sigma}) & ,\ \xi\to\infty\\ (\xi Q_-+q_-)^{-1}(\xi P_-+p_-)+O(\xi^{-\sigma}) & ,\ \xi\to-\infty.\end{cases}$$

1°. **Факторизация матрицы-функции** $B_-(\xi)$. Нужно получить представление $B_-=\Phi_0^+(\xi)(\Phi_0^-(\xi))^{-1}$, где матрица-функция $\Phi_0(z)$ невырождена и кусочно аналитична с разрывом по действительной оси, не более, чем полиномиального роста по z. Отметим, что равенства (22) не нарушатся при изменении членов разложения $V_\pm(\xi)$

порядка не выше $-\sigma-2$. Поэтому, можно считать, что $V_-(\xi)$ есть рациональная матрица-функция с полюсами в верхней полуплоскости, невырожденная в нижней. Мало того, равенство (22) для $R_-(\xi)$ можно переписать в виде:

$$V_1^{-1}(\xi)\,R_-(\xi)\,V_-(\xi)=\operatorname{diag}\{(M_{-j}+O(\xi^{-1}))\,\xi^{2-j}\}_{j=0}^{4}+O(\xi^{-\sigma}),$$

где V_1 — рациональная матрица-функция с полюсами в нижней полуплоскости, невырожденная в верхней, такая, что $V_1^{-1}V_-=I+O(\xi^{-\sigma-2})$ на действительной оси. Остается факторизовать $V_1^{-1}B_-V_-$. С этой целью решим скалярную задачу факторизации:

$$\begin{cases}(\xi^2+1)^{(2-j)/2}\theta_j^-(\xi)=\theta_j^+(\xi), & \xi<0\\ \theta_j^-(\xi)=\theta_j^+(\xi), & \xi>0.\end{cases}\tag{28}$$

Ее решение представим в виде

$$\theta_j^{\pm}(\xi)=\mu_j^{\pm}(\xi)\exp\left[(2-j)\frac{\ln^2(\xi\pm i)}{4\pi i}\right],$$

где мнимая часть $\ln(\xi\pm i)$ берется в пределах от $-\pi$ до π, а

$$\mu_j^{\pm}(\xi)=\exp\left[\frac{2-j}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\xi_0}\right)\frac{\ln(\xi_0^2+1)}{\xi_0-(\xi\pm i0)}\,d\xi_0\right].$$

Здесь значение $\operatorname{arctg}\xi_0^{-1}$ берется в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а $\ln(\xi_0^2+1)>0$. Оценивая последний интеграл, находим, что

$$\frac{d^n}{dz^n}(1-\mu_j(z))=O(|z|^{-n-1}\ln^{n+1}|z|),\quad n=0,1,\cdots\tag{29}$$

при $|z|\to\infty$. Теперь введем матрицы-функции $S^{\pm}(\xi)=\operatorname{diag}\{I_{n_j}\theta_j^{\pm}\}_{j=0}^{4}$. Нетрудно видеть, что

$$(S^+)^{-1}V_1^{-1}R_-V_-S^-=\begin{cases}I+O(\xi^{-\sigma}), & \xi\to\infty\\ \operatorname{diag}\{(M_j+O(\xi^{-1}))\}_{j=0}^{4} & \xi\to-\infty.\end{cases}\tag{30}$$

Факторизация таких матриц хорошо известна [2, 5]. Проведем нужную нам факторизацию. Для $j=0,\cdots,4$ определим матрицу $\ln M_j$ по ее собственным числам $\psi_{jp}=\ln|\lambda_p|+i\arg\lambda_p$, где $\lambda_1,\cdots,\lambda_{n_j}$ — собственные числа матрицы M_j (с учетом кратности). Положим

$$2\pi\alpha-\pi<\operatorname{Im}\psi_{jp}<2\pi\alpha+\pi,\ j=0,4;\ 2\pi\alpha-2\pi<\operatorname{Im}\psi_{jp}<2\pi\alpha,$$
$$j=1,3;\ 2\pi\alpha-3\pi<\operatorname{Im}\psi_{jp}<2\pi\alpha-\pi,\ j=2.\tag{31}$$

Обозначим $\gamma_j^{\pm}=(\xi\pm i)^{\ln M_j/2\pi i}$, где ветви матриц-функций $\gamma_j^{\pm}(\xi)$ выбираются так, чтобы $\gamma_j^+(\xi)(\gamma_j^-(\xi))^{-1}\to I$ при $\xi\to\infty$.

Пусть $\gamma^{\pm}=\operatorname{diag}\{\gamma_j^{\pm}(\xi)\}_{j=0}^{4}$. Через $U(\xi)$ обозначим матрицу (30) и рассмотрим матрицу $T(\xi)=(\gamma^+)^{-1}U\gamma^-$. Отметим, что в (30) матрицу $\zeta_j=M_j+O(\xi^{-1})$ можно считать аналитической деформацией матрицы M_j в окрестности бесконечности параметра ξ [8]. Представим $M_j = \operatorname{diag}\{\theta_1, \theta_2, \cdots\}$, где каждый блок $\theta_1, \theta_2, \cdots$, составлен из всех жордановых клеток матрицы M_j (можно считать M_j, $j = 0, \cdots, 4$ приведенными к жордановой форме) с одним и тем же собственным числом. Из теоремы о версальной деформации [8, стр. 217] следует, что $\zeta_j(\xi)$ можно считать блочно-диагональной матрицей с блоками, соответствующими $\theta_1, \theta_2, \cdots$. Но тогда из вида скалярных функций $\gamma_j^{\pm}$ от жордановой матрицы M_j [9] нетрудно заключить, что $T(\xi) = I + O(\xi^{-1}\ln^k|\xi|)$ при $|\xi| \to \infty$ для некоторого $k \geqslant 0$. Подберем теперь матрицы $\varphi_+(\xi)$ и $\varphi_-(\xi)$ (см. формулировку теоремы) так, чтобы частные индексы матрицы $T(\xi)$ оказались нулями. Тогда существует факторизация $T = T^+(T^-)^{-1}$, причем для $\varepsilon > 0$ сколь угодно малого $T^{\pm}(z) = I + O(|z|^{\varepsilon-1})$ при $|z| \to \infty$ в соответствующей полуплоскости. Искомая факторизация примет вид

$$\Phi_0^+ = V_1 S^+ \gamma^+ T^+, \quad \Phi_0^- = V_- S^- \gamma^- T^-.$$

2°. Построение оператора K'. Однородное уравнение (25) (т. е. когда $f = 0$) переписывается в виде

$$(\Phi_0^+(\xi))^{-1}\Phi_1^+(\xi) = (\Phi_0^-(\xi))^{-1}\Phi_1^-(\xi).$$

Применяя теорему Палея—Винера [5, стр. 47], найдем, что прообраз Фурье функции $(\Phi_0^+)^{-1}\Phi_1^+$ сосредоточен в нуле, т. е. является суммой производных от δ-функции. Таким образом, $\Phi_1^+(\xi) = \Phi_0^+(\xi)\,P(\xi)$, где $P(\xi)$ есть n-мерный вектор с полиномиальными компонентами. В силу оценок (29) и (30) лишь для конечного числа линейно независимых вектор-функций такого вида функция $u(s)$, определяемая из первого равенства (27), принадлежит H_α. Следовательно, ядро оператора K конечномерно. Одним из решений уравнения (25) будет:

$$\Phi_1^+(\xi) = \frac{1}{2\pi i}\Phi_0^+(\xi)\,\Pi^+\left((\Phi_0^-)^{-1}G_+\tilde{f}_+ - (\Phi_0^+)^{-1}G_-\tilde{f}_-\right). \tag{32}$$

Это выражение вместе с первым равенством (27) определяет правый обратный K_1' оператора K. Однако, K_1' не является ограниченным в H_α. Приходится использовать уравнение (26). Решая его точно так же, как уравнение (25), строим правый обратный K_2' оператора K. Отметим, что $(\xi P_\pm + p_\pm)^{-1}P_\pm = O(\xi^{-1})$, т. е.

$$G_\pm P_\pm = O(\xi^{-1}) \text{ и аналогично } F_\pm Q_\pm = O(\xi^{-1}) \text{ при } \xi \to \infty \tag{33}$$

Из условия в), сформулированного в начале § 2, следует, что существуют $n \times n$-матрицы $X_\pm$ и $Y_\pm$, такие, что $P_\pm X_\pm + Q_\pm Y_\pm = I$. Положим

$$K'f = K_1'(P_+X_+f_+ + P_-X_-f_-) + K_2'(Q_+Y_+f_+ + Q_-Y_-f_-). \tag{34}$$

Очевидно, это правый обратный оператора K и нужно только проверить его ограниченность в H_α. Мы это сделаем для первого слагаемого, для второго слагаемого проверка аналогична. Из построения $\Phi_0^{\pm}(\xi)$ видно, что

$$\Phi_0^+(\xi_0)(\Phi_0^-(\xi))^{-1} = V_-^{-1}(\xi_0)\operatorname{diag}\{E_j\}_{j=0}^4 V(\xi) + O(\xi_0^{-\sigma})(\Phi_0^-(\xi))^{-1} + \\ + \Phi_0^+(\xi_0)\, O(\xi^{-\sigma}),$$

где $E_j(\xi_0\,\xi)$ есть $n_j \times n_j$-блок, элементы которого есть линейные комбинации функций вида

$$l(\xi_0, \xi) = r(\xi_0)\,\rho(\xi)\left|\frac{\xi_0+i}{\xi+i}\right|^{-\frac{\operatorname{Im}\Phi_j\,p}{2\pi}}\left(\ln^k\left|\frac{\xi_0+i}{\xi+i}\right|\right)|\xi+i|^{\frac{|2-l|}{2}} c_j(\xi_0),$$

где r, ρ — ограниченные функции; $k \geqslant 0$ — целое число, а функция $c_j(\xi_0)$ ограничена на отрицательной полуоси и $c_j(\xi_0) = O(\xi_0^{2-l/2})$ при $\xi_0 \to \infty$. Теперь достаточно учесть (31) и (33), а также, положив в лемме 4

$$U_1 = V_-(\xi P_- + p_-)^{-1}(\xi Q_- + q_-)\,V_+^{-1};$$
$$U_2 = V_+(\xi Q_+ + q_+)^{-1}(\xi P_+ + p_+)\,V_-^{-1},$$

учесть указанный там порядок по ξ матриц U_{1j}^{-1}, чтобы свести задачу об ограниченности в H_α первого слагаемого в (34) к ограниченности в L_2 сингулярного интеграла вида

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\xi_0+i}{\xi+i}\right|^{\delta}\ln^k\left|\frac{\xi_0+i}{\xi+i}\right|\frac{u(\xi)}{\xi-\xi_0}\,d\xi\left(-\frac{1}{2}<\delta<\frac{1}{2}\right),$$

доказанной в [5]. Теорема 2 доказана.

§ 3. Нетеровость уравнения (1)

В этом параграфе нам удобно будет пользоваться терминологией и методами псевдодифференциальных операторов (п.д.о.) на контуре Г или его открытом подмножестве [5]. Символы п.д.о. мы будем считать записанными в локальной системе координат — длина дуги. Положим $D = -i\dfrac{d}{ds}$, где ds — дифференциал дуги. Для п.д.о. $P(D)$ будем писать $P(D) = O(D^m)$, если символ $P(t, \xi)$ удовлетворяет оценке $|P(t, \xi)| \leqslant \mathrm{const}\,|\xi|^m$ равномерно по $t \in \Gamma$. Если $P(D) = O(D^m)$ для любого m, то будем писать: $P(D) = O(D^{-\infty})$. Будем считать, что все символы имеют асимптотическое разложение типа (9). Если $P(D)\,Q(D) = I + O(D^{-\infty})$, где I — тождественный оператор, то будем писать: $Q(D) = P^{-1}(D)$. Такой оператор определен неоднозначно (с точностью до $O(D^{-\infty})$). В дополнение к свойствам (21) п.д.о. $\Pi^{\pm}$, укажем также

$$\Pi^{\pm} P(D) = P(D)\,\Pi^{\pm} + O(D^{-\infty});\ P(D) \text{ — п.д.о. на Г.} \tag{35}$$

Мы будем писать $P: B_1 \to B_2$ если оператор P действует из пространства B_1 в пространство B_2. Оператор L из (1) можно переписать в виде

$$L = (P + pD^{-1})\,\Pi^+ - (Q + qD^{-1})\,\Pi^- + O(D^{-\infty}). \tag{36}$$

Очевидно, нетеровость уравнения (1), определенная во введении, эквивалентна тому, что неограниченный оператор $L: H_\alpha \to F$ (пространство F определено нормой (3)) является Ф-оператором [9].

Пусть вначале число точек разрыва $N = 0$.

Теорема 3. *Пусть все коэффициенты уравнения* (1) *являются гладкими на* Г. *Тогда, при выполнении условия* 1) *введения, уравнение* (1) *нетерово в* H_α *и* $\operatorname{ind} L = \frac{1}{2\pi}\,[\arg q^{(0)} - \arg p^{(0)}]_\Gamma$.

Доказательство. В условии теоремы $F = H_{\alpha+1}$. Изучим оператор $(P + pD^{-1})$: $H_\alpha \to H_{\alpha+1}$. Так как $r_p = \operatorname{rang} P$ постоянен на Г, то существуют гладкие невырожденные на Г матрицы $X_p(t)$ и $Y_p(t)$, такие, что матрица $X_p P Y_p$ диагональна и первые r_p элементов главной диагонали—единицы, остальные—нули. Тогда
$$X_p(P + pD^{-1})\,Y_p = (I + O(D^{-1}))\operatorname{diag}[I_{r_p}, \gamma D^{-1}]\,(I + O(D^{-1})) + O(D^{-\infty}),$$
где $\gamma(t)$ — квадратный блок размером $n - r_p$. С другой стороны
$$X_p\,(P\xi + p)\,Y_p = (I + O(\xi^{-1}))\operatorname{diag}\{I_{r_p}\xi, \gamma\}\,(I + O(\xi^{-1})).$$
Поэтому
$$\det(P\xi + p) = \xi^{r_p}\det(X_p Y_p)^{-1}\det\gamma + O(\xi^{r_p - 1}).$$

По условию, коэффициент при ξ^{r_p} есть $p^{(0)}(t) \neq 0$. Значит $\gamma(t)$ не вырождена. Можно считать, что $\gamma = I_{n - r_p}$. Тогда существует п.д.о. $(P + pD^{-1})^{-1} = O(D)$. Аналогично, для $Q + qD^{-1}$ находим матрицы-функции X_Q и Y_Q, такие, что
$$X_Q\,(Q + qD^{-1})\,Y_Q = (I + O(D^{-1}))\operatorname{diag}[I_{r_Q}, I_{n - r_Q} D^{-1}] \times$$
$$\times (I + O(D^{-1})) + O(D^{-\infty}),$$
причем $q^{(0)} = \det(X_Q Y_Q)^{-1}$. Следовательно, существует $(Q + qD^{-1})^{-1} = O(D)$. Тогда
$$L^{-1} = (P + pD^{-1})^{-1}\,\Pi^+ - (Q + qD^{-1})^{-1}\,\Pi^-.$$

Очевидно, $L^{-1}: H_{\alpha+1} \to H_\alpha$ ограничен, что и доказывает нетеровость.

Подсчитаем индекс. Представим L в виде: $L = L_x L_1 L_y + O(D^{-\infty})$, где $L_x = (X_p + O(D^{-1}))^{-1}\Pi^+ - (X_Q + O(D^{-1}))^{-1}\Pi^-$ и аналогично задается L_y;
$$L_1 = \operatorname{diag}\{I_{r_p}, I_{n - r_p} D^{-1}\}\Pi^+ - \operatorname{diag}[I_{r_Q}, I_{n - r_Q} D^{-1}]\,\Pi^-,$$
причем считается, что $L_x, L_y: H_\alpha \to H_\alpha$, а $L_1: H_\alpha \to H_{\alpha+1}$. Тогда $\operatorname{ind} L = \operatorname{ind} L_x + \operatorname{ind} L_1 + \operatorname{ind} L_y$. По формулам Мусхелишвили
$$\operatorname{ind} L_y = \frac{1}{2\pi}\,[\arg\det Y_p - \arg\det Y_Q]_\Gamma.$$

Аналогичная формула получается и для L_x. Оператор L_1 распадается на скалярные операторы вида: $D^{-}\,\Pi^+ - \Pi^-$; $\Pi^+ - D^{-1}\,\Pi^-$; I; D^{-1}. Индексы последних двух из них, очевидно, равны нулю. Так как $\operatorname{ind} D = 0$, то

$$\operatorname{ind}(D^{-1}\Pi^+ - \Pi^- : H_\alpha \to H_{\alpha+1}) = \operatorname{ind}(\Pi^+ - D\Pi^- : H_\alpha \to H_\alpha).$$

Вспоминая, что $D = -id/ds$, где ds — элемент дуги, находим

$$\Pi^+ - D\Pi^- = \left(\Pi^+ + i\frac{dt}{ds}\Pi^-\right)\left(\Pi^+ - \frac{d}{dt}\Pi^-\right) + O(D^{-\infty})$$

или

$$\operatorname{ind}(\Pi^+ - D\Pi^-) - \operatorname{ind}\left(\Pi^+ + i\frac{dt}{ds}\Pi^-\right) + \operatorname{ind}\left(\Pi^+ - \frac{d}{dt}\Pi^-\right),$$

где t — точка дуги. По формуле Мусхелишвили первое слагаемое в правой части равно 1. Операторы d/dt и $\Pi^\pm$ коммутируют. Следовательно, равенство $(\Pi^+ - d/dt\,\Pi^-)\,u = v$ эквивалентно системе

$$\Pi^+ u = \Pi^+ v; \quad \frac{d}{dt}\Pi^- u = \Pi^- v.$$

Для ее разрешимости необходимо, чтобы

$$\int\limits_\Gamma \Pi^+ v\, dt \left(= \int\limits_\Gamma v dt\right) = 0$$

и тогда система разрешима однозначно. Значит

$$\operatorname{ind}\left(\Pi^+ - \frac{d}{dt}\Pi^-\right) = -1, \text{ а } \operatorname{ind}(D^{-1}\Pi^+ - \Pi^-) = 0.$$

Аналогично $\operatorname{ind}(\Pi^+ - D^{-1}\Pi^-) = 0$, т.е. $\operatorname{ind} L_1 = 0$. Теорема доказана.

Замечание. Результат, эквивалентный теореме 3, был ранее получен Н. Е. Товмасяном в [10]. Этот результат был сформулирован в терминах некоторых матричных преобразований матриц P, p, Q, q (а не в терминах функций $p^{(0)}$ и $q^{(0)}$).

Доказательство теоремы 1. Мы построим ограниченные правый $L'\colon F \to H_\alpha$ и левый $L''\colon F \to H_\alpha$ регуляризаторы оператора L (т. е. такие операторы, что $L''L - I$ вполне непрерывен в H_α, а $LL' - I$ вполне непрерывен в F, где пространство F определяется нормой (3)). Отсюда будет следовать также существование ограниченного двустороннего регуляризатора [9]. Зададим на Γ функции $\alpha_m(t)$, $\alpha_m(t) \in C^\infty(\Gamma)$, $m = 0, 1, \cdots, N$, так, чтобы $\alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$ (т. е. это разбиение единицы); $\bar\alpha_m = 1$ в окрестности носителя $\operatorname{supp} \alpha_m$; $\operatorname{supp} \bar\alpha_0$ не содержит точек $t_1, \cdots, t_N$, а при $m = 1, \cdots, N$ носитель $\operatorname{supp} \bar\alpha_m \subset$ $\subset$ внутри Δ_m, где Δ_m — прямолинейная окрестность точки t_m (см. условие 2) введения). Пусть Γ_m — прямая, содержащая Δ_m и также ориентированная. На этой прямой введем координату s — отклонение от t_m, благодаря чему Γ_m можно считать действительной осью. Определим оператор $K_m\colon H_\alpha(\Gamma_m) \to H_\alpha(\Gamma_m)$, совпадающий с оператором K из формулировки теоремы 2, при условии, что $P_\pm = P(t_m \pm 0)$ и аналогично определяются $p_\pm$, $Q_\pm$ и $q_\pm$. Матрицы-функции φ_+ и φ_- выберем так, чтобы, согласно теореме 2, существовал правый обратный K'_m оператора K_m. Кроме того, определим ограниченный оператор $D_F: F \to H_\alpha(\Gamma)$, состоящий в дифференцировании функций из F на каждом интервале $l_1, \cdots, l_N$ (так, чтобы не возникали δ-функции в точках разрыва $t_1, \cdots, t_N$). Этот оператор непрерывен при $-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$. Положим

$$L' = \bar{\alpha}_0 \left[(P + pD^{-1})^{-1} \Pi^+ - (Q + qD^{-1})^{-1} \Pi^-\right] \alpha_0 + \sum_{m=1}^{N} \bar{\alpha}_m K'_m D_F \alpha_m. \quad (37)$$

Первое слагаемое имеет смысл, так как в окрестности $\operatorname{supp} \alpha_0$ коэффициенты P, p, Q, q—гладкие. Проверим, что это действительно правый регуляризатор.

Для удобства введем пространство C_F^∞ кусочно гладких функций на Γ, все производные которых терпят разрывы первого рода в точках $t_1, \cdots, t_N$. Будем говорить, что оператор $S: B \to C_F^\infty$ непрерывен, если ограничены все операторы $D_F^k S: F \to L_\infty(\Gamma)$, $k = 0, 1, \cdots$. Нетрудно видеть, что

$$\bar{\alpha}_m D_F L \bar{\alpha}_m = \bar{\alpha}_m K_m \bar{\alpha}_m + S,$$

где оператор $S: H_\alpha \to C_F^\infty$ непрерывен. Поэтому рассмотрим оператор $D_F L L' = \sum \alpha_m D_F L L'$. Так как у первого слагаемого в (37) коэффициенты гладкие, то применяя к нему $D_F L$, получим $D_F \alpha_0 + S_1$, где оператор $S_1: F \to C_F^\infty$ непрерывен. Нам нужно изучить оператор $\rho_m = \alpha_0 D_F L \bar{\alpha}_m K'_m D_F \alpha_m$. Для этого получим представление K'_m в окрестности носителя $\operatorname{supp} \alpha_0 \bar{\alpha}_m$ $(m > 1)$.

Пусть μ, ν, $\theta \in C_0^\infty(\Gamma_m)$ отличны от нуля лишь при $s > 0$ и равны единице в окрестности той компоненты $\operatorname{supp} \alpha_0 \bar{\alpha}_m$, которая лежит на положительной полуоси, причем $\mu\nu = \mu$; $\nu\theta = \theta$. Имеем

$$\nu K_m \theta K'_m = \nu K_m K'_m - \nu K_m (1 - \theta) K'_m. \quad (38)$$

Первое слагаемое есть νI, а второе переводит H_α в $C_0^\infty(\Gamma_m)$. Применяя к обеим частям (38) оператор

$$\tau_m = \mu \left[(P_+ D + p_+)^{-1} \Pi^+ - (Q_+ D + q_+)^{-1} \Pi^-\right]$$

находим, что $\mu K'_m = \mu\tau_m + S_2$, где S_2 переводит H_α в $C_0^\infty(\Gamma_m)$. После проведения тех же рассуждений на отрицательной полуоси, без труда найдем, что $\rho_m = \alpha_0 D_F \alpha_m + S_3$, где $S_3: F \to C_F^\infty$ непрерывен. Далее

$$\alpha_m D_F L \bar{\alpha}_m K'_m D_F \alpha_m = \alpha_m K_m K'_m D_F \alpha_m + \alpha_m K_m (1 - \bar{\alpha}_m) K'_m D_F \alpha_m.$$

Первое слагаемое есть $\alpha_m D_F \alpha_m$, а второе: $F \to C_F^\infty$ непрерывно. Учитывая, что при разных $m \geqslant 1$ носители $\bar{\alpha}_m$ не пересекаются, получаем: $D_F L L' - D_F: F \to C_F^\infty$ непрерывен. Итак $LL' - I: F \to C_F^\infty$ непрерывен.

Меняя местами в (37) α_m с $\bar{\alpha}_m$, получим L''. Проверка, что это левый обратный, аналогична. Теорема 1 доказана.

Ереванский государственный
политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 25.II.1981

Ս. Գ. ՌՈՒԲԱՆՈՎԻՉ. Որոշ սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմների մասին *(ամփոփում)*

Ողորկ փակ Γ կոնտուրի վրա դիտարկվում է ցածր կարգի անդամներով սինգուլյար ինտեգրալ հավասարումների սիստեմը։ Ամբողջ Γ կոնտուրի կամ նրա մասերի վրա թույլ է տրվում գլխավոր անդամի նորմալության պայմանների խախտումը և գործակիցների խզումը։ Եթե գործակիցները բավարարում են որոշ պայմանների, ապացուցված է սիստեմի նյոթերությունը սոբոլևյան H_α տարածություններում։

S. G. RUBANOVICH. *On some systems of singular integral equations* (summary)

On a smooth simple contour Γ a system of singular integral equations with low order terms is considered. The normality of the main term may fail on Γ, the coefficients may be discontinuous. Conditions for the system to be of Neother type are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. И. Мусхелишвили*. Сингулярные интегральные уравнения, М., «Наука», 1968.
2. *Н. П. Векуа*. Системы сингулярных интегральных уравнений, М., «Наука», 1970.
3. *Ф. Д. Гахов*. Краевые задачи, М., «Наука», 1977.
4. *И. Ц. Гохберг, Н. Я. Крупник*. Сингулярные интегральные операторы с кусочно непрерывными коэффициентами и их символы, Изв. АН СССР, сер. матем. 35, № 4. 1971, 940—964.
5. *Г. И. Эскин*. Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений, М., «Наука», 1973.
6. *С. Г. Рубановиц*. О сингулярных интегральных уравнениях с разрывными коэффициентами, ДАН АрмССР, 67, № 5, 1978, 275—280.
7. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн*. Парное интегральное уравнение и его транспонированное, Теор. и прикл. математика, Львов, № 1, 1958, 58—81.
8. *В. И. Арнольд*. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений, М., «Наука», 1978.
9. *С. Г. Крейн*. Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., «Наука», 1971.
10. *Н. Е. Товмасян*. К теории сингулярных интегральных уравнений, Диф. уравнения, 3, № 1, 1967, 69—80.