

А. Е. АВЕТИСЯН

КЛАССЫ ФУНКЦИЙ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ И ИХ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

В в е д е н и е

В 1910 г. М. Планшерель впервые показал, что теория интегралов Фурье имеет более законченный вид, если рассмотреть оператор Фурье в пространстве функций $L_2(-\infty, \infty)$. Классическая теорема Планшереля утверждает следующее (см., напр., [1] или [2]).

Теорема А. Пусть $f(x)$ — произвольная функция из класса $L_2(-\infty, +\infty)$. Тогда

1. Формула

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iut} - 1}{-it} f(t) dt \quad (1)$$

почти всюду на всей оси $(-\infty, +\infty)$ определяет функцию $F(u) \in L_2(-\infty, +\infty)$. Двойственная формула

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu} - 1}{iu} F(u) du \quad (2)$$

также справедлива почти всюду.

2. Преобразование Фурье $F(u)$ и его обращение $f(x)$, задаваемые соответственно формулами (1) и (2), могут быть определены также предельными соотношениями

$$F(u) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-iut} f(t) dt, \quad (3)$$

$$f(x) = \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{ixu} F(u) du. \quad (4)$$

3. Для пары функций $f(x)$ и $F(u)$ имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (5)$$

Теорема Планшереля может быть перенесена с показателя 2 на общий показатель p . Именно, Титчмаршем доказана следующая теорема (см. [1]).

Теорема Б. Пусть $f(x)$ принадлежит $L^p(-\infty, \infty)$, где $1 < p \leq 2$. Тогда

$$F(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{ixt} f(t) dt \quad (6)$$

при $a \rightarrow +\infty$ сходится в среднем с показателем $q = \frac{p}{p-1}$. Предел в среднем $F(x)$, называемый трансформацией Фурье функции $f(x)$, удовлетворяет неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x)|^q dx \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{q}-1}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (7)$$

Имеют место двойственные соотношения в том смысле, что почти для всех x

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt} - 1}{it} f(t) dt, \quad (8)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-itx} - 1}{-it} F(t) dt. \quad (9)$$

В своей работе [3] М. М. Джрбашян заложил основы большого цикла исследований по теории гармонического анализа в собственной комплексной области, построив стройный аппарат интегральных преобразований, ассоциированных с функциями e^z и $E_p(z; \mu)$ в классе L_2 , где

$$E_p(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma\left(\mu + \frac{k}{p}\right)} \quad (10)$$

—целая функция Миттаг—Леффлера порядка p и типа 1. Результаты этих исследований до 1965 г. были подытожены в его известной монографии [2]. Одним из его основных результатов указанного цикла работ является следующая теорема ([3], теорема 1, см. также [2], теорема 4.2)

Теорема В. Пусть $p \geq \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$. Для любой функции $g(y)$ из класса $g(y) y^{\mu-1} \in L_2(0, \infty)$ формула

$$f^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi p}} \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \frac{e^{\pm ixy} - 1}{\pm iy} g(y) y^{\mu-1} dy \quad (11)$$

определяет почти всюду функции $f^{(+)}(x)$ и $f^{(-)}(x)$, принадлежащие классу $L_2(0, +\infty)$.

Двойственная формула

$$\begin{aligned}
 g(y) y^{\mu-1} = \frac{1}{V 2\pi\rho} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \left[y^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho}(x^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu+1) \times \right. \right. \\
 \times x^{\mu-1} f^{(-)}(x) dx \Big] + e^{i\frac{\pi}{2}(1-\mu)} \frac{d}{dy} \left[y^{\mu} \int_0^{\infty} E_{\rho}(x^{1/\rho} y^{1/\rho} e^{-i\frac{\pi}{2\rho}}; \mu+1) \times \right. \\
 \left. \left. \times x^{\mu-1} f^{(+)}(x) dx \right] \right\} \quad (12)
 \end{aligned}$$

также имеет место почти всюду на $(0, +\infty)$: при этом имеет место формула Парсеваля

$$\int_0^{\infty} |g(y)|^2 y^{2\mu-2} dy = \rho \int_0^{\infty} |f^{(+)}(x)|^2 dx + \rho \int_0^{\infty} |f^{(-)}(x)|^2 dx.$$

Рассматривая поведение преобразований типа (12) в комплексной плоскости, М. М. Джрбашян построил интегральный аппарат, являющийся естественным обобщением интеграла Фурье для представления функций, принадлежащих классу L_2 на произвольной конечной системе лучей, исходящих из начала координат.

Эти исследования по гармоническому анализу позволили ему установить результаты завершенного характера о представлении целых функций, интегрируемых с квадратом модуля по лучам, исходящим из одной точки комплексной плоскости. Таким образом, был получен ряд теорем о параметрическом представлении широких классов целых функций конечного порядка $\rho > \frac{1}{2}$ и нормального типа. Эти теоремы

М. М. Джрбашяна явились существенно новыми и глубокими аналогами известной теоремы Винера-Пэли о параметрическом представлении целых функций экспоненциального типа, принадлежащих классу $L_2(-\infty, +\infty)$. Приведем одну из этих теорем, которая, в частности, содержит вышеуказанную теорему Винера-Пэли ([3], теорема 12, [2], теорема 6.13).

Обозначим через $W_{\rho, \sigma}^{2, \infty}$ класс целых функций порядка ρ и типа σ удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^2 r^{\sigma} dr < +\infty,$$

где

$$\theta_{1,2} = \pm \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\rho}\right), \quad \theta_{3,4} = \pm \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right).$$

Через $L^{2, \omega}(a, b)$ обозначим класс функций $\varphi(v)$, для которых

$$\int_a^b |\varphi(v)|^2 v^\omega dv < +\infty.$$

Теорема Г. Пусть $1 \leq \rho < 2$, $0 < \sigma < +\infty$ и $-1 < \omega < 1$. Тогда класс $W_{\rho, \sigma}^{2, \omega}$ совпадает с множеством целых функций $f(z)$, допускающих представление вида

$$f(z) = \int_{-\sigma^{1/\rho}}^{\sigma^{1/\rho}} E_\rho(izv; \mu) \varphi(v) dv, \quad (13)$$

где

$$\mu = \frac{1 + \omega + \rho}{2\rho}, \quad \varphi(v) \in L^{2, -\omega}(-\sigma^{1/\rho}, \sigma^{1/\rho}).$$

В дальнейшем в совместной работе М. М. Джрбашяна и автора ([4], см. также [2], глава VII) был установлен ряд теорем об интегральном представлении различных классов аналитических функций в угловых областях. В частности, был введен класс функций $H_2^\omega \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right]$. Это — совокупность функций $F(z)$, голоморфных в угловой области

$$\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) = \left\{ z; -\frac{\pi}{2\alpha} < \arg z < \frac{\pi}{2\alpha}, 0 < |z| < +\infty \right\}$$

и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|z| < \frac{\pi}{2\alpha}} \left\{ \int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega dr \right\} < +\infty. \quad (14)$$

Следующие две теоремы из указанной работы затем другим методом были установлены М. М. Джрбашяном в монографии [2]. Мы приведем эти теоремы именно в формулировке, предложенной в [2].

Теорема Д. Если $F(z) \in H_2^\omega \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right]$, то для любого $\rho > \frac{\alpha}{2\alpha-1}$, $\mu = \frac{1 + \rho + \omega}{2\rho}$ справедливо интегральное представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma E_\rho(z\zeta; \mu) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta, \quad (15)$$

где Γ — граница области $\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} \right)$, пробегаемая в отрицательном направлении относительно этой области, а

$$G_{\rho, \mu}(\zeta; F) \in H_2^{-\omega} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} \right) \right].$$

Теорема Е. Если $U(\zeta) \in L_2^{-\omega}(\Gamma)$, т. е.

$$\int_{\Gamma} |U(\zeta)|^2 |\zeta|^{-\omega} |d\zeta| < +\infty$$

и

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_p(z\zeta; \mu) U(\zeta) d\zeta, \quad (16)$$

то

$$F(z) \in H_2^{\omega} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right].$$

Таким образом, (16) — это параметрическое представление класса $H_2^{\omega} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$. Отсюда при $a = \rho = \mu = 1$, $\omega = 0$ следует другая известная теорема Пэли-Винера о том, что класс H_2 функций, аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$, для которых

$$\sup_{0 < x < +\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x + iy)|^2 dy \right\} < +\infty,$$

совпадает с множеством функций, допускающих представление

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \varphi(t) dt, \quad \operatorname{Re} z > 0,$$

где

$$\varphi(t) \in L_2(0, +\infty).$$

При этом выявляется возможность нового эквивалентного определения класса H_2 ($H_2 \equiv H_2^0 \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right]$).

Более общий класс $H_p^{\omega} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$ рассмотрел В. М. Мартиросян [5]. При

$$\frac{1}{2} < a < +\infty, \quad p > 1, \quad -1 < \omega < p-1$$

класс $H_p^{\omega} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$

определяется как множество функций $F(z)$, голоморфных в угловой области $\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right)$ и удовлетворяющих условию

$$\sup_{|z| < \frac{1}{2a}} \left\{ \int_0^{\infty} |F(re^{i\theta})|^p r^{\omega} dr \right\} < +\infty.$$

Им были исследованы вопросы полноты некоторых биортогональных систем функций, описания замыкания этих систем, базисности, а также решена задача кратной интерполяции в классе $H_p^{\omega} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$.

Этот класс является обобщением класса $H_2^\infty \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$ и известного класса H_p в полуплоскости (см. [6]), и поэтому обладает многими свойствами, которыми обладают указанные классы. В частности, справедливо утверждение ([2], [5]):

Теорема Ж. Для любой функции $F(z) \in H_p^\infty \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$) справедливы утверждения:

1. Почти всюду на $\partial\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right)$ (то есть на границе области $\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right)$) функция $F(z)$ имеет угловые граничные значения $F(\zeta) \in L_p^\omega \left(\partial\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right)$, т. е.

$$\int_{\partial\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right)} |F(\zeta)|^p |\zeta|^\omega |d\zeta| < +\infty,$$

причем

$$\lim_{\varphi \rightarrow \pm \frac{\pi}{2a}} \int_0^\infty |F(re^{i\varphi}) - F(re^{\pm i \frac{\pi}{2a}})|^p r^\omega dr = 0.$$

2. Имеет место интегральная формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} F(z), & z \in \Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \\ 0, & z \in \Delta^* \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \end{cases}$$

($\Delta^* \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right)$ — дополнительная к $\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right)$ угловая область).

Для любого $\varphi_0 \left(0 < \varphi_0 < \frac{\pi}{2a} \right)$

$$\max_{|\varphi| < \varphi_0} |F(re^{i\varphi})| = o \left(r^{-\frac{1+\omega}{p}} \right) \text{ при } r \rightarrow \infty \text{ и } r \rightarrow 0.$$

Настоящая работа посвящена обобщению и распространению вышеприведенных теорем на классы $H_p^\infty \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$ или на классы L_p^ω для значений $1 < p \leq 2$. При этом ряд основных трудностей удалось преодолеть другими, ранее не примененными методами.

Работа состоит из четырех параграфов.

В § 1 исследуются свойства преобразования типа Бореля—Лапласа функций класса $H_p^\infty \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$ и устанавливается интегральное представление для этого класса функций.

В § 2 аналогичный результат доказывается для функций, заданных на конечном числе угловых областей с общей вершиной и принадлежащих там соответствующим классам H_p^ω .

В § 3, на основании предыдущих результатов, другим способом вновь устанавливаются теоремы типа Винера—Пэли об интегральном представлении некоторых классов целых функций, доказанные ранее М. М. Джрбашьяном и И. О. Хачатрянном*.

В § 4 строится теория интегральных преобразований с ядрами e^{-z^p} и $E_p(z; p)$ в классах L_p^ω . Доказанная здесь основная теорема 4.2 является распространением теоремы В. М. М. Джрбашьяна на классы L_p^ω . Она в частном случае содержит утверждение теоремы Б. Титчмарша. При доказательстве этой теоремы применен новый подход, заключающийся в том, что интегральное преобразование функции из класса L_p^ω рассматривается как некоторого рода „предельная форма“ интегрального представления функции из класса $H_p^\omega \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$.

§ 1. Интегральное представление функций класса

$$H_p^\omega \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right]$$

1°. Предварительно докажем несколько простых предложений. Пусть при $1 < p \leq 2$, $f(x) \in L_p(0, +\infty)$, т. е.

$$\int_0^\infty |f(x)|^p dx = M < +\infty.$$

Рассмотрим преобразование Бореля—Лапласа функции $f(t)$

$$g(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt. \quad (1.1)$$

При $\operatorname{Re} z > 0$ интеграл абсолютно сходится и представляет аналитическую функцию. Полагая $z = re^{i\varphi} = x + iy$, имеем

$$g(x + iy) = \int_0^\infty e^{-iyt} e^{-xt} f(t) dt.$$

Ясно, что при $x > 0$, $e^{-xt} f(t) \in L_p(0, \infty)$ и по теореме Б. будем иметь

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x + iy)|^q dy \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}-1}} \left(\int_0^\infty e^{-pxt} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p-1}} \leq$$

* Эти результаты пока не опубликованы.

$$\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{q}{2}-1}} \left\{ \int_0^{\infty} |f(t)|^p dt \right\}^{\frac{1}{p-1}} = M_1 < +\infty,$$

где $q = \frac{p}{p-1}$ (т. е. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

Таким образом, функция $g(z)$ принадлежит классу H_q при $\operatorname{Re} z > 0$, т. е. аналитична в правой полуплоскости и удовлетворяет условию

$$\sup_{0 < x < +\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |g(x + iy)|^q dy \right\} < +\infty.$$

Но из одного результата С. А. Акопяна [7] следует, что тогда

$$g(z) \in H_p \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right] \equiv H_p^n \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right].$$

Таким образом, доказана

Теорема 1.1. Если $f(x) \in L_p(0, +\infty)$, то определенная формулой (1.1) функция $g(z)$ принадлежит классу $H_q \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right]$ ($q = \frac{p}{p-1}$).

2°. Предположим теперь, что $F(x) \in L_p^\omega(0, \infty)$, т. е.

$$\int_0^{\infty} |F(x)|^p x^\omega dx < \infty,$$

где $-1 < \omega < p-1$.

При $\rho > \frac{1}{2}$ и $\mu = \frac{p\rho - \rho + 1 + \omega}{p\rho}$ рассмотрим функцию

$$g_{\rho, \mu}(z) = \rho z^{\mu\rho-1} \int_0^{\infty} F(t) e^{-t^\rho z^\rho} t^{\mu\rho-1} dt. \quad (1.2)$$

При этом рассматриваются те ветви функций $z^{\mu\rho-1}$ и z^ρ , которые на луче $\arg z = 0$ принимают положительные значения. Функция $g_{\rho, \mu}(z)$ голоморфна в области $\operatorname{Re} z^\rho > 0$, т. е. при $z \in \Delta \left(-\frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\rho} \right)$. После замены переменной получим

$$g_{\rho, \mu}(z) = z^{\mu\rho-1} \int_0^{\infty} F(t^{1/\rho}) e^{-tz^\rho} t^{\mu-1} dt.$$

Обозначим $\omega = z^\rho$. Тогда будем иметь

$$g_{p, \mu}(w^{1/p}) w^{1/p-\mu} = \int_0^{\infty} e^{-tw} F(t^{1/p}) t^{\mu-1} dt.$$

По предположению $F(x) \in L_p^{\infty}(0, +\infty)$. Имея в виду также выбор числа μ , получаем $F(t^{1/p}) t^{\mu-1} \in L_p(0, +\infty)$. Но тогда из теоремы 1.1. следует, что $g_{p, \mu}(w^{1/p}) w^{1/p-\mu} \in H_q \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \right]$, т. е.

$$\sup_{|\theta| < \frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} |g_{p, \mu}[(re^{i\theta})^{1/p}](re^{i\theta})^{1/p-\mu}|^q dr \right\} < +\infty.$$

Это равносильно утверждению

$$\sup_{|\theta| < \frac{\pi}{2p}} \left\{ \int_0^{\infty} |g_{p, \mu}(te^{i\theta})|^q t^{-\frac{\omega}{p-1}} dt \right\} < +\infty.$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.2. Если $F(x) \in L_p^{\infty}(0, \infty)$, где $-1 < \omega < p-1$, то

$$g_{p, \mu}(z) \in H_q^{\frac{\omega}{p-1}} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{2p} \right) \right] \quad \left(q = \frac{p}{p-1}, \text{ а } g_{p, \mu}(z) \right.$$

определяется формулой (1.2).

3°. Пусть теперь

$$F(z) \in H_p^{\infty} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right) \right] \quad \left(a > \frac{1}{2}, -1 < \omega < p-1 \right).$$

Рассмотрим функцию

$$g_{p, \mu}^{(\theta)}(z) = z^{p\mu-1} \int_0^{\infty} F(te^{-i\theta}) e^{-(te^{-i\theta})^{p/p} z^p} (te^{-i\theta})^{\mu p-1} dt e^{-i\theta}, \quad (1.3)$$

где

$$p > \frac{a}{2a-1}, \quad \mu = \frac{pp + \omega - p + 1}{pp}.$$

Для каждого $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a} \right]$ $g_{p, \mu}^{(\theta)}(z)$ голоморфна в области

$\Delta \left(\theta - \frac{\pi}{2p}, \theta + \frac{\pi}{2p} \right)$ и принадлежит там классу $H_q^{\frac{\omega}{p-1}} \left[\Delta \left(\theta - \frac{\pi}{2p}, \theta + \frac{\pi}{2p} \right) \right]$ (см. теорему 1.2). Обычным способом поворота пути интегрирования функция $g_{p, \mu}^{(\theta)}(z)$ аналитически продолжается на всю область

$$\Delta \left(-\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2p} \right) = U_{|\theta| < \frac{\pi}{2a}} \Delta \left(\theta - \frac{\pi}{2p}, \theta + \frac{\pi}{2p} \right).$$

Полученную функцию обозначим через $G_{p, \mu}(z; F)$. Очевидно,

$$G_{p,\mu}(z; F) \in H_q^{-\frac{\omega}{p-1}} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} \right) \right].$$

Таким образом, доказана

Теорема 1.3. Если

$$F(z) \in H_p^{\omega} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right] \quad \left(\alpha > \frac{1}{2}, \right.$$

$$\left. 1 < p < 2, \quad -1 < \omega < p-1 \right),$$

то

$$G_{p,\mu}(z; F) \in H_q^{-\frac{\omega}{p-1}} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} \right) \right],$$

где

$$\rho \geq \frac{\alpha}{2\alpha-1}, \quad \mu = \frac{p\rho + \omega - \rho + 1}{p\rho},$$

а $G_{p,\mu}(z; F)$ в каждой области

$$\Delta \left(\theta - \frac{\pi}{2\rho}, \theta + \frac{\pi}{2\rho} \right) \quad \left(|\theta| \leq \frac{\pi}{2\alpha} \right)$$

определяется формулой (1.3).

4°. Перейдем теперь к доказательству основной теоремы этого параграфа. Она является перенесением теоремы Д, приведенной во введении, с показателя $p=2$ на общий показатель p , $1 < p \leq 2$.

Теорема 1.4. Если $F(z) \in H_p^{\omega} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right]$, $\alpha > \frac{1}{2}$

$$\rho \geq \frac{\alpha}{2\alpha-1}, \quad 1 < p \leq 2, \quad \mu = \frac{p\rho + \omega - \rho + 1}{p\rho},$$

$-1 < \omega < p-1$, то для всех $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ справедливо интегральное представление

$$F(r^{1/p} e^{i\varphi}) r^{p-1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^{\mu} \int_{\Gamma} E_p(\zeta r^{1/p} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{p,\mu}(\zeta; F) d\zeta. \quad (1.4)$$

При этом, если $|\varphi| = \frac{\pi}{2\alpha}$ (1.4) имеет место для почти всех $r \in (0, \infty)$,

а при $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ формула (1.4) принимает более простой вид:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_p(\zeta z; \mu) G_{p,\mu}(\zeta; F) d\zeta, \quad (1.5)$$

где

$$G_{p,\mu}(\zeta; F) \in H_q^{-\frac{\omega}{p-1}} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} \right) \right]$$

(в (1.4) и (1.5) участвуют граничные значения этой функции), а Γ — граница области $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho}\right)$, пробегаемая в отрицательном направлении.

Доказательство. По теореме Ж $F(z)$ в области $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ представима своими граничными значениями интегралом Коши

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{F(te^{-i\frac{\pi}{2\alpha}})}{te^{-i\frac{\pi}{2\alpha}} - x} d(te^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}) -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{F(te^{i\frac{\pi}{2\alpha}})}{te^{i\frac{\pi}{2\alpha}} - x} d(te^{i\frac{\pi}{2\alpha}}) \equiv J_1(x) - J_2(x).$$

Преобразуем $J_1(x)$. Заметим, что согласно формуле М. М. Джрбашяна (см. [2], стр. 149) при

$$\zeta \in \bar{\Delta}\left(\theta - \frac{\pi}{2\rho}, \theta + \frac{\pi}{2\rho}\right), \quad z \in \Delta^*\left(\theta - \frac{\pi}{2\rho}, \theta + \frac{\pi}{2\rho}\right)$$

справедливо следующее важное представление ядра Коши:

$$\frac{1}{\zeta - z} = e^{i\mu\rho\theta} \zeta^{\mu\rho-1} \int_0^{\infty} e^{-(e^{-i\theta}\zeta)^{\rho}t} E_{\rho}(e^{-i\theta}zt^{1/\rho}; \mu) t^{\mu-1} dt.$$

После замены переменной его можно записать в форме

$$\frac{1}{\zeta - z} = \rho \zeta^{\mu\rho-1} \int_0^{\infty} e^{-\zeta^{\rho}(re^{i\theta})^{\rho}} E_{\rho}(zre^{-i\theta}; \mu)(re^{-i\theta})^{\mu\rho-1} dre^{-i\theta}. \quad (1.7)$$

Формула (1.7) верна при $z = x > 0$, $\zeta = te^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}$, $\theta = \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ —

достаточно малое число). Подставляя значение ядра Коши $\frac{1}{te^{-i\frac{\pi}{2\alpha}} - x}$

из (1.7) в выражение для $J_1(x)$ и затем меняя порядок интегрирования (что, допустимо), получаем

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} F(te^{-i\frac{\pi}{2\alpha}}) \left\{ \rho \left(te^{-i\frac{\pi}{2\alpha}} \right)^{\mu\rho-1} \int_0^{\infty} e^{-\left(te^{-i\frac{\pi}{2\alpha}} \right)^{\rho} \left(re^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)} \right)^{\rho}} \times \right. \\ \left. \times E_{\rho} \left[x r e^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)}; \mu \right] \left[re^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)} \right]^{\mu\rho-1} dre^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)} \right\} dt e^{-i\frac{\pi}{2\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} E_p \left[x r e^{i \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)}; \mu \right] \left\{ \rho \left[r e^{i \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)} \right]^{\mu\rho-1} \int_0^{\infty} F \left(t e^{-i \frac{\pi}{2\alpha}} \right) \times \right. \\ \left. \times e^{-\left(t e^{-i \frac{\pi}{2\alpha}} \right)^{\rho} \left[r e^{i \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)} \right]^{\rho} \left(t e^{-i \frac{\pi}{2\alpha}} \right)^{\mu\rho-1} d t e^{-i \frac{\pi}{2\alpha}}} \right\} d \left(r e^{i \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)} \right).$$

Обозначим $\zeta = r e^{i \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)}$, тогда выражение в фигурных скобках равно (см. (1.3)) $g_{\rho, \mu}(\zeta) = G_{\rho, \mu}(\zeta, F)$.

Таким образом

$$J_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{(+)}^{(s)}} E_p(x\zeta; \mu) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta, \quad (1.8)$$

где $\Gamma_{(+)}^{(s)}$ — луч $\zeta = r e^{i \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)}$, $0 < r < +\infty$.

Аналогично получается

$$J_2(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{(-)}^{(s)}} E_p(x\zeta; \mu) G_{\rho, \mu}(\zeta, F) d\zeta, \quad (1.9)$$

где $\Gamma_{(-)}^{(s)}$ — луч $\zeta = r e^{-i \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)}$, $0 < r < +\infty$.

Из (1.6), (1.8), (1.9) имеем

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^{(s)}} E_p(x\zeta; \mu) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta, \quad (1.10)$$

где $\Gamma^{(s)}$ — контур, составленный из лучей $\arg \zeta = \pm \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)$, пробегаемый в отрицательном направлении относительно угловой области $\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon, \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)$. $E_p(x\zeta; \mu)$, как функция от ζ — целая, а

$$G_{\rho, \mu}(\zeta; F) \in H_q^{-\frac{\mu}{\rho-1}} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} \right) \right],$$

и поэтому почти всюду на Γ имеет угловые граничные значения. При этом для всех ψ , $\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \leq |\psi| < \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho}$ ($\zeta = r e^{i\psi}$) и $z \in \Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right)$ (в частности, при $z = x > 0$) в силу выбора числа μ

$$E_p(z; \mu) \zeta^{\frac{\mu}{\rho}} \in L_p(0, +\infty), \quad (1.11)$$

$$G_{\rho, \mu}(\zeta; F) \zeta^{-\frac{\mu}{\rho}} \in L_q(0, +\infty).$$

Поэтому в (1.10) можно перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получим

$$F(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_L E_{\rho}(x\zeta; \mu) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta. \quad (1.12)$$

Но $F(z)$ — аналитическая функция в области $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$. С другой стороны, при $z \in \Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L E_{\rho}(z\zeta; \mu) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta,$$

в силу (1.11) абсолютно сходится и значит также представляет аналитическую функцию в $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$. По принципу аналитического продолжения при всех $z \in \Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L E_{\rho}(z\zeta; \mu) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta,$$

т. е. доказано утверждение теоремы (1.5).

На границе области $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ интеграл справа может и не сходиться. При $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$ имеем

$$F(t^{1/\rho} e^{i\varphi}) t^{\mu-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_L E_{\rho}(\zeta t^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu) t^{\mu-1} G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta.$$

Интегрируя по t в пределах от 0 до r и имея в виду формулу (см. [2], стр. 413)

$$\int_0^r E_{\rho}(\zeta t^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu) t^{\mu-1} dt = r^{\mu} E_{\rho}(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1),$$

получим

$$\int_0^r F(t^{1/\rho} e^{i\varphi}) t^{\mu-1} dt = \frac{1}{2\pi i} r^{\mu} \int_L E_{\rho}(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta.$$

Полученный справа интеграл, в силу асимптотических свойств функции $E_{\rho}(z; \mu)$ и выбора параметра μ , абсолютно сходится для всех $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}$. Таким образом, для таких φ справедливо почти для всех $r > 0$ представление

$$F(r^{1/\rho} e^{i\varphi}) r^{\mu-1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^{\mu} \int_{\Gamma} E_{\rho}(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta.$$

Теорема 1.4 полностью доказана.

Замечание. Граничные значения функции $G_{\rho, \mu}(\zeta; F)$, участвующие в представлении (1.4), (1.5), определяются следующим образом

$$\left(\frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}\right):$$

$$G_{\rho, \mu} \left(r^{1/\rho} e^{\pm i \frac{\pi}{2\gamma}} \right) r^{1/\rho - \mu} = \frac{e^{\pm i \pi \left(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2\gamma} \right)}}{\rho} \frac{d}{dr} \int_0^{\infty} \frac{e^{\pm i \tau r} - 1}{\pm i \tau} F \left(\tau^{1/\rho} e^{\mp i \frac{\pi}{2\alpha}} \right) \tau^{\mu-1} d\tau.$$

Действительно, рассмотрим, например

$$g_{\rho, \mu} \left(-\frac{\pi}{2\alpha} \right) (z) = z^{\mu\rho-1} \int_0^{\infty} F \left(t e^{i \frac{\pi}{2\alpha}} \right) e^{-\left(t e^{i \frac{\pi}{2\alpha}} \right) z^{\rho}} \left(t e^{i \frac{\pi}{2\alpha}} \right)^{\mu\rho-1} dt e^{i \frac{\pi}{2\alpha}}.$$

При $z \in \Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho}, -\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} \right)$ ($z = r e^{i\varphi}$) имеем

$$g_{\rho, \mu} \left(-\frac{\pi}{2\alpha} \right) (r^{1/\rho} e^{i\varphi}) r^{1/\rho - \mu} = \frac{e^{i \left[\frac{\pi\mu\rho}{2\alpha} - \varphi(1-\mu\rho) \right]}}{\rho} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau r e^{i\varphi}} - 1}{- \tau e^{i\varphi}} F \left(t^{1/\rho} e^{i \frac{\pi}{2\alpha}} \right) \tau^{\mu-1} d\tau$$

и после интегрирования по r от 0 до r получим

$$\begin{aligned} \int_0^r g_{\rho, \mu} \left(-\frac{\pi}{2\alpha} \right) (r^{1/\rho} e^{i\varphi}) r^{1/\rho - \mu} dr &= \frac{e^{i \left[\frac{\pi\mu\rho}{2\alpha} - \varphi(1-\mu\rho) \right]}}{\rho} \times \\ &\times \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau r e^{i\varphi}} - 1}{- \tau e^{i\varphi}} F \left(t^{1/\rho} e^{i \frac{\pi}{2\alpha}} \right) \tau^{\mu-1} d\tau. \end{aligned}$$

Здесь можно перейти к пределу под знаком интеграла при $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2\gamma} + 0$, затем дифференцируя по r , получим наше утверждение для

$G_{\rho, \mu} \left(r^{1/\rho} e^{-i \frac{\pi}{2\gamma}}; F \right) r^{1/\rho - \mu}$. Аналогично доказывается утверждение для $G_{\rho, \mu} \left(r^{1/\rho} e^{i \frac{\pi}{2\gamma}}; F \right) r^{1/\rho - \mu}$.

5°. Как следствие доказанной теоремы 1.4 получается следующая теорема об аппроксимации функций из класса $H_{\rho}^* \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right]$ целыми функциями.

Для любых $r > 0$ и $a_1 > a$ обозначим

$$\Delta(r, a_1) = \left\{ z; |\arg z| \leq \frac{\pi}{2a_1}, r \leq |z| < +\infty \right\}.$$

Ясно, что $\Delta(r, a_1) \subset \Delta\left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)$.

Обозначим далее через $F_\sigma(z)$ ($\sigma > 0$) функцию

$$F_\sigma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\sigma} E_p(\zeta; \mu) G_{p, \mu}(\zeta; F) d\zeta,$$

где Γ_σ — часть контура Γ , лежащая в круге $|\zeta| \leq \sigma^{1/p}$. Легко видеть, что $F_\sigma(z)$ — целая функция порядка p и типа $\leq \sigma$.

Справедлива следующая

Теорема 1.5. Пусть $F(z) \in H_p^\infty\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)\right]$, тогда существует постоянная $M = M(F, r, a_1)$ ($a_1 > a$, $r > 0$) такая, что при $\sigma > 0$

$$|F(z) - F_\sigma(z)| \leq \frac{M}{|z|^\sigma \frac{p-1-\sigma}{p}}$$

равномерно в области $\Delta(r, a_1)$ (для малых σ ($0 \leq \sigma < 1$) эта разность просто ограничена).

Доказательство. Действительно

$$\begin{aligned} F(z) - F_\sigma(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma_\sigma^{(+)}} + \int_{\gamma_\sigma^{(-)}} \right) E_p(\zeta; \mu) G_{p, \mu}(\zeta; F) d\zeta = \\ &= J^{(+)}(z) + J^{(-)}(z), \end{aligned}$$

где $\gamma_\sigma^{(\pm)}$ — части контура Γ , лежащие вне круга $|\zeta| > \sigma^{1/p}$,

$$\gamma_\sigma^{(\pm)} = \left\{ \zeta; \arg \zeta = \pm \left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2p} \right), |\zeta| > \sigma^{1/p} \right\}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} J^{(+)}(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma^{1/p}}^{\infty} E_p \left[te^{i\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2p}\right)} z; \mu \right] G_{p, \mu} \left(te^{i\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2p}\right)}; F \right) \times \\ &\quad \times dt e^{i\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2p}\right)}. \end{aligned}$$

При $z \in \Delta(r, a_1)$. $t > \sigma^{1/p}$

$$\left| E_p \left(te^{i\left(\frac{\pi}{2a} + \frac{\pi}{2p}\right)} z; \mu \right) \right| \leq \frac{M_1(r, a_1)}{|z| t},$$



так что

$$|J^{(+)}(z)| \leq \frac{M_1(r, \alpha_1)}{|z|} \int_{\sigma^{1/p}}^{\infty} \frac{1}{t} \left| G_{p, \mu} \left(te^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2p}\right)}; F \right) \right| dt = \\ = \frac{M_1(r, \alpha_1)}{|z|} \int_{\sigma^{1/p}}^{\infty} t^{\frac{\omega}{p}-1} \left| G_{p, \mu} \left(te^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2p}\right)}; F \right) \right| t^{-\frac{\omega}{p}} dt.$$

Применяя неравенство Гёльдера и учитывая, что

$$\left| G_{p, \mu} \left(te^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2p}\right)}; F \right) \right| t^{-\frac{\omega}{p}} \in L_q(0, +\infty)$$

(см. теорему 1.3), получим

$$|J^{(+)}(z)| \leq \frac{M_1(r, \alpha_1)}{|z|} \left\{ \int_{\sigma^{1/p}}^{\infty} t^{\omega-p} dt \right\}^{1/p} \times \\ \times \left\{ \int_{\sigma^{1/p}}^{\infty} \left| G_{p, \mu} \left[te^{i\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2p}\right)}; F \right] \right|^q t^{-\frac{\omega}{p-1}} dt \right\}^{1/q} \leq \frac{M_2(F, r, \alpha_1)}{|z|^{\frac{p-1-\omega}{p}}}.$$

Аналогично оценивается $J^{(-)}(z)$. Эти оценки и доказывают теорему 1.5.

§ 2. Интегральное представление функций, заданных на конечной системе угловых областей с общей вершиной и принадлежащих там классам H_p^{ω}

1°. Как уже было отмечено в представлении (1.4) теоремы 1.4 интеграл в правой части абсолютно сходится для $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2\alpha}$. Но если предположить, что $p > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ (это равносильно неравенству $\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{p} < \pi$), то, как и в случае $p=2$ (см. [2], теорема 7.8, см. также [8], лемма 4), этот интеграл имеет смысл (абсолютно сходится) и в некоторой другой угловой области. Именно, если как всегда $\Delta^* \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{p}, -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{p} \right)$ означает дополнительную к $\Delta \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{p}, -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{p} \right)$ угловую область, то справедливо утверждение.

Теорема 2.1. Если $F(z) \in H_p^{\omega} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right]$, $\alpha > \frac{1}{2}$, $1 < p \leq 2$, $\mu = \frac{p\rho + \omega - p + 1}{p\rho}$, $-1 < \omega < p-1$, то

1. При $\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$, $|\varphi| > \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho}$, $0 < r < +\infty$ справедливо

$$L^*(r^{1/\rho} e^{i\varphi}; F) \equiv \frac{r^{1-\mu}}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^\mu \int_{\Gamma} E_\rho(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta = 0. \quad (2.1)$$

2. При $\rho = \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$, $0 < r < +\infty$

$$L^*(-r^{1/\rho}; F) = 0. \quad (2.2)$$

3. При $\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ и $z = re^{i\varphi} \in \Delta^*\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho}, -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{\rho}\right)$

$$L(z; F) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_\rho(\zeta z; \mu) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta = 0. \quad (2.3)$$

Доказательство. Как при доказательстве теоремы 1.4, рассмотрим сначала интеграл ($\varepsilon > 0$ — достаточно малое)

$$\int_{\Gamma} E_\rho(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta. \quad (2.4)$$

Если $\rho > \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$ и $|\varphi| > \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{\rho}$ (при $\rho = \frac{2\alpha}{2\alpha-1}$, $|\varphi| = \pi$), то для любого $\varepsilon > 0$ во всей замкнутой области $\bar{\Delta}\left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon, -\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon\right)$ функция $E_\rho(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1)$ удовлетворяет неравенству

$$|E_\rho(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1)| < \frac{C_1}{1 + |\zeta|^{\rho\mu}}$$

(при $\rho\mu > 1$ произведение $\rho\mu$ следует заменить единицей). В той же области для $G_{\rho, \mu}(\zeta; F)$ имеем (см. теорему Ж)

$$|G_{\rho, \mu}(\zeta; F)| \leq \frac{C_2}{\frac{\rho-1-\omega}{\rho}} = \frac{C_2}{|\zeta|^\delta} \quad (0 < \delta < 1). \quad (2.5)$$

Так что при $|\zeta| \rightarrow +\infty$

$$|E_\rho(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{\rho, \mu}(\zeta; F)| \leq \frac{C_2}{|\zeta|^{1+\delta}}. \quad (2.6)$$

При $|\zeta| \rightarrow 0$ это же выражение удовлетворяет неравенству типа (2.5). Отсюда по интегральной теореме Коши

$$\int_{\Gamma} E_\rho(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{\rho, \mu}(\zeta; F) d\zeta = 0. \quad (2.7)$$

Учитывая теперь, что при $\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \leq |\psi| \leq \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho}$ ($\arg \zeta = \psi$) равномерно

$$E_p(\zeta r^{1/p} e^{i\varphi}; \mu+1) \zeta^{\frac{\omega}{p}} \in L_p(0, \infty)$$

и

$$G_{p,\mu}(\zeta; F) \zeta^{-\frac{\omega}{p}} \in L_q(0, \infty),$$

можно перейти к пределу в (2.7) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Получим

$$\int_{\Gamma} E_p(\zeta r^{1/p} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{p,\mu}(\zeta; F) d\zeta = 0.$$

Отсюда следуют утверждения (2.1) и (2.2). Что касается (2.3), то оно является простым следствием (2.1). Теорема доказана.

2°. Пусть имеем систему угловых областей

$$\Delta\left(\psi_k - \frac{\pi}{2\alpha_k}, \psi_k + \frac{\pi}{2\alpha_k}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где

$$0 \leq \psi_1 < \psi_2 < \dots < \psi_n < 2\pi, \quad \frac{1}{2} < \alpha_k < +\infty,$$

при этом предполагаем, что эти угловые области не перекрываются. Это эквивалентно следующей цепочке неравенств:

$$\psi_{k+1} - \psi_k > \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\alpha_k} + \frac{1}{\alpha_{k+1}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (\psi_{n+1} = \psi_1 + 2\pi, \alpha_{n+1} = \alpha_1).$$

Пусть

$$f_k(z) \in H_p^\omega \left[\Delta\left(\psi_k - \frac{\pi}{2\alpha_k}, \psi_k + \frac{\pi}{2\alpha_k}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Предположим, что функция $F(z)$ определена на множестве

$$A(\alpha; \psi) = \bigcup_{k=1}^n \left(\psi_k - \frac{\pi}{2\alpha_k}, \psi_k + \frac{\pi}{2\alpha_k} \right)$$

следующим образом:

$$F(z) = f_k(z), \quad \text{если} \quad z \in \Delta\left(\psi_k - \frac{\pi}{2\alpha_k}, \psi_k + \frac{\pi}{2\alpha_k}\right) \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

При этих условиях мы скажем, что

$$F(z) \in H_p^\omega[A(\alpha; \psi)].$$

Отметим, что дополнение множества $A(\alpha, \psi)$ также состоит из конечного числа угловых областей. Величину наименьшего из дополнительных углов обозначим через $\frac{\pi}{\gamma}$. Выберем числа ρ и μ из условий

$$\rho \geq \gamma, \quad \mu = \frac{\rho\rho + \omega - \rho + 1}{\rho\rho}.$$

Следующая теорема представляет собой распространение теоремы (точнее говоря, частного случая теоремы) М. М. Джрбашяна ([2], теорема 7.10) на случай $1 < \rho \leq 2$.

1°. Обозначим через $B_{\rho, \pi}^{p, \omega}$ класс целых функций $f(z)$ порядка $\rho > \frac{1}{2}$ типа $\leq \pi$, для которых

$$\int_0^{\infty} |f(te^{i\theta})|^p t^{\omega} dt < +\infty$$

при $\frac{\pi}{2\rho} \leq \theta \leq 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}$. Здесь, как и раньше, предполагается, что $1 < p \leq 2$, $-1 < \omega < p-1$.

Справедлива

Теорема 3.1. Если $F(z) \in B_{\rho, \pi}^{p, \omega}$, то $F(z)$ представляется в виде

$$F(z) = \int_0^{z^{1/p}} E_p(zu; \mu) g(u) du, \quad (3.1)$$

где

$$\mu = \frac{\rho p + \omega - \rho + 1}{\rho p}, \quad \text{а} \quad g(u) \in L_q^{-\frac{\omega}{p-1}}(0, z^{1/p}).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(z)$ в угловой области $\Delta\left(\frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$. По условию теоремы $F(z) \in H_{\rho}^{\omega}\left[\Delta\left(\frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)\right]$, и, следовательно, по теореме 1.4 имеет представление

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} E_{\rho_1}(\zeta; \mu) G_{\rho_1, \mu}(\zeta; F) d\zeta, \quad (3.2)$$

где $\rho_1 > \rho$, $\mu = \frac{\rho_1 p + \omega - \rho_1 + 1}{\rho_1 p}$, $G_{\rho_1, \mu}(\zeta; F) \in H_{\rho_1}^{-\frac{\omega}{p-1}}\left[\Delta\left(\frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2\rho_1}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\pi}{2\rho_1}\right)\right]$ — преобразование типа Бореля-Лапласа функции $F(z)$,

а Γ — контур, состоящий из лучей $\arg \zeta = \frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2\rho_1}$, $\arg \zeta = 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\pi}{2\rho_1}$, взятый в отрицательном направлении по отношению к области

$\Delta\left(\frac{\pi}{2\rho} - \frac{\pi}{2\rho_1}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho} + \frac{\pi}{2\rho_1}\right)$. Если положить $\rho_1 = \rho$, то в представлении (3.2) контур Γ превратится в дважды пробегаемую в разных направлениях действительную полуось. Обозначая граничные значения функции $G_{\rho, \mu}(\zeta; F)$ сверху и снизу от полуоси $(0, +\infty)$ соответственно через $G_{\rho, \mu}^{(+)}(u; F)$ и $G_{\rho, \mu}^{(-)}(u; F)$, из (3.2) получим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\bar{z}} E_p(zu; \mu) \{G_{\rho, \mu}^{(-)}(u; F) - G_{\rho, \mu}^{(+)}(u; F)\} du. \quad (3.3)$$

Очевидно

$$G_{p, \mu}^{(\pm)}(u; F) \in L_q^{-\frac{\omega}{p-1}}(0, +\infty).$$

Но $F(z)$ — целая функция и, значит, ее преобразование типа Бореля-Лапласа голоморфно в области $|\zeta| > \sigma^{1/p}$ (см., напр., [2], стр. 330). Поэтому при $u > \sigma^{1/p}$, $G_{p, \mu}^{(-)}(u; F) - G_{p, \mu}^{(+)}(u; F) = 0$. Обозначая

$$g(u) = \frac{1}{2\pi i} \{G_{p, \mu}^{(-)}(u; F) - G_{p, \mu}^{(+)}(u; F)\}, \text{ из (3.3) получим представление}$$

(3.1) для $z \in \Delta\left(\frac{\pi}{2\rho}, 2\pi - \frac{\pi}{2\rho}\right)$. Но в обеих частях (3.1) стоят целые функции. Поэтому (3.1) верно для всех значений z . Теорема доказана.

2°. При $\rho > 1$, $1 < \rho \leq 2$, $-1 < \omega < \rho - 1$ обозначим через $W_{p, \sigma}^{\rho, \omega}$ класс целых функций $f(z)$ порядка ρ и типа $\leq \sigma$, для которых

$$\int_0^{\infty} |f(re^{i\theta})|^p r^{\omega} dr < +\infty$$

$$\text{для } |\theta| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho} \quad \text{и} \quad |\theta - \pi| \leq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}.$$

Справедлива

Теорема 3.2. Если $F(z) \in W_{p, \sigma}^{\rho, \omega}$, то $F(z)$ представляется в виде

$$F(z) = \int_{-\sigma^{1/p}}^{\sigma^{1/p}} E_p(izu, \mu) g(u) du, \quad (3.4)$$

$$\text{где } \mu = \frac{\rho\rho + \omega - \rho + 1}{\rho\rho}, \text{ а } g(u) \in L_q^{-\frac{\omega}{p-1}}(-\sigma^{1/p}; \sigma^{1/p}).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(z)$ в угловых областях

$$\Delta_1 = \Delta\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right) \text{ и } \Delta_2 = \Delta\left(\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\rho}, \pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Значения функции $F(z)$ в этих областях мы обозначим соответственно через $F_1(z)$ и $F_2(z)$. По условию теоремы $F_k(z) \in H_p^{\omega}[\Delta_k]$, $k=1, 2$.

Применяя теорему 2.2 ($\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \pi$, $n=2$), получим (см. 2.9))

$$F(z) = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_k} E_p(z\zeta; \mu) G_{p, \mu}(\zeta; F_k) d\zeta, \quad (3.5)$$

где $G_{p, \mu}(\zeta; F_1) \in H_p^{\omega}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right]$, $G_{p, \mu}(\zeta; F_2) \in H_p^{\omega}\left[\Delta\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)\right]$ — преобразования типа Бореля-Лапласа функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$. Очевидно контуры Γ_1 и Γ_2 совпадают с мнимой осью, пробегаемой в разных направлениях. Из (3.5) при $z \in \Delta_1 \cup \Delta_2$ имеем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E_p(izu, \mu) [G_{p,\mu}(iu, F_1) - G_{p,\mu}(iu; F_2)] du. \quad (3.6)$$

Но $F_1(z)$ и $F_2(z)$ представляют в областях Δ_1 и Δ_2 значения одной и той же целой функции $F(z)$, преобразование типа Бореля—Лапласа которой голоморфно в области $|\zeta| > \sigma^{1/p}$. Поэтому граничные значения слева и справа от мнимой оси функций $G_{p,\mu}(\zeta; F_1)$ и $G_{p,\mu}(\zeta; F_2)$ совпадают при $|\zeta| > \sigma^{1/p}$, т. е. при $|u| > \sigma^{1/p}$

$$G_{p,\mu}(iu; F_1) - G_{p,\mu}(iu; F_2) = 0. \quad (3.7)$$

Обозначая

$$g(u) = \frac{1}{2\pi} [G_{p,\mu}(iu; F_1) - G_{p,\mu}(iu; F_2)]$$

и имея в виду (3.7), из (3.6) получим утверждение теоремы (3.4) для $z \in \Delta_1 \cup \Delta_2$. Но по принципу аналитического продолжения, как и в пункте 1, равенство (3.4) распространяется на всю плоскость z . Теорема доказана.

§ 4. Интегральные преобразования в классах L_p^w

В этом параграфе доказываются аналоги теорем М. М. Джрбашяна об интегральных преобразованиях в классе L_1^w (см. [2], теоремы 4.2, 4.3, 4.4).

Приводимые ниже теоремы, как уже говорилось во введении, доказываются другим методом. Основным результатом здесь является теорема 4.2. При частных значениях параметров ρ, μ, ω ($\rho = \mu = 1, \omega = 0$) она переходит в утверждение теоремы Б. Титчмарша.

1°. Предварительно докажем следующую теорему.

Теорема 4.1. В предположениях теоремы 1.4 при любом φ из замкнутого промежутка $\left[-\frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\rho}\right]$ имеет место представление

$$F(r^{1/p} e^{i\varphi}) r^{\mu-1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^\mu \int_{L_p(\varphi)} E_p(\zeta r^{1/p} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{p,\mu}(\zeta; F) d\zeta, \quad (4.1)$$

где $L_p(\varphi)$ — контур, составленный из лучей $\arg \zeta = -\dots - \frac{\pi}{2\rho}$, $\arg \zeta = -\varphi + \frac{\pi}{2\rho}$, пробегается в отрицательном направлении относительно области $\Delta\left(-\varphi - \frac{\pi}{2\rho}, -\varphi + \frac{\pi}{2\rho}\right)$. При этом значения функции $G_{p,\mu}(\zeta; F)$ на контуре $L_p(\varphi)$ выражаются формулами

$$G_{p,\mu}\left[r^{1/p} e^{i\left(-\varphi \pm \frac{\pi}{2\rho}\right)}; F\right] r^{1/p-\mu} = \frac{e^{\pm i\pi\left(\frac{\mu}{2} \pm \frac{\varphi}{\pi} - \frac{1}{2\rho}\right)}}{\rho} \times$$

$$\times \frac{d}{dr} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau r} - 1}{\mp \tau} F(\tau^{1/p} e^{i\varphi}) \tau^{\mu-1} d\tau. \quad (4.2)$$

Заметим, что при $|\varphi| = \frac{\pi}{2\alpha}$ в (4.2) слева будут фигурировать граничные значения функции $G_{p,\mu}(\zeta; F)$, которые существуют почти всюду (см. теорему Ж).

Доказательство. Пусть сначала $|\varphi| < \frac{\pi}{2\alpha}$. Тогда, как и при доказательстве теоремы 1.4, имеем

$$F(r^{1/p} e^{i\varphi}) r^{\mu-1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^{\mu} \int_{L^{(\varepsilon)}} E_p(\zeta r^{1/p} e^{i\varphi}; \mu+1) G_{p,\mu}(\zeta; F) d\zeta, \quad (4.3)$$

где $L^{(\varepsilon)}$ — контур, составленный из лучей $\arg \zeta = \pm \left(\frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon \right)$.

Считаем, что $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2\alpha} - |\varphi|$. Из асимптотических свойств функции $E_p(z; \mu)$ следует, что при фиксированных φ в угловых областях

$$-\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi}{2\rho} + \varepsilon < \theta \leq \varphi - \frac{\pi}{2\rho} \quad \text{и} \quad -\varphi + \frac{\pi}{2\rho} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2\alpha} + \frac{\pi}{2\rho} - \varepsilon$$

имеет место равномерная оценка

$$|E_p(\zeta r^{1/p} e^{i\varphi}, \mu+1)| < \frac{C_1}{1 + |\zeta|^{p\mu}}. \quad (4.4)$$

В тех же областях для функции $G_{p,\mu}(\zeta; F)$ по теореме Ж имеем оценку

$$|G_{p,\mu}(\zeta; F)| < \frac{C_2}{|\zeta|^{\frac{1}{q} - \frac{\omega}{p}}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \right). \quad (4.5)$$

Поэтому в указанных областях при $|\zeta| \rightarrow \infty$

$$|E_p(\zeta r^{1/p} e^{i\varphi}, \mu+1) G_{p,\mu}(\zeta; F)| < \frac{C_3}{|\zeta|^{\frac{1}{q} - \frac{\omega}{p} + p\mu}} = \frac{C_3}{|\zeta|^{1 + \frac{p}{q}}}. \quad (4.6)$$

При $|\zeta| \rightarrow 0$ левая часть (4.6) удовлетворяет неравенству типа (4.5). Отсюда из теоремы Коши следует, что контур в (4.3) можно заменить контуром $L_p(\varphi)$.

В случае, когда $|\varphi| = \frac{\pi}{2\alpha}$, те же рассуждения проходят, только в представлении (1.4) замену контура следует совершить с одной только стороны (половина контура, т. е. один луч, остается без изменения). Утверждение (4.1) доказано.

Для доказательства (4.2) заметим, что внутри угловой области

$$-\varphi - \frac{\pi}{2\rho} < \arg z < -\varphi + \frac{\pi}{2\rho}$$

$$G_{p, \mu}(z; F) = g_{p, \mu}^{(\frac{-\varphi}{p})}(z) = \\ = z^{\mu p - 1} \int_0^{\infty} F(te^{i\varphi}) e^{-(t|z|)^p} (te^{i\varphi})^{\mu p - 1} dt e^{i\varphi}.$$

Положим $z = re^{i\theta}$. После замены переменных получим

$$G_{p, \mu}(r^{1/p} e^{i\theta}; F) r^{1/p - \mu} = \frac{1}{p} e^{i(\theta + \varphi)(\mu p - 1) + i\varphi} \int_0^{\infty} e^{-\tau r e^{i p(\varphi + \theta)}} F(\tau^{1/p} e^{i\varphi}) \tau^{\mu - 1} d\tau$$

или

$$\int_0^r G_{p, \mu}(r^{1/p} e^{i\theta}; F) r^{1/p - \mu} dr = \frac{1}{p} e^{i(\theta + \varphi)(\mu p - 1) + i\varphi} \times \\ \times \int_0^{\infty} \frac{e^{-\tau r e^{i p(\varphi + \theta)}} - 1}{- \tau e^{i p(\varphi + \theta)}} F(\tau^{1/p} e^{i\varphi}) \tau^{\mu - 1} d\tau.$$

Устремляя θ к $-\varphi + \frac{\pi}{2p}$ и $-\varphi - \frac{\pi}{2p}$, затем дифференцируя по r , получим формулы (4.2).

2°. Перейдем к доказательству основного результата этого параграфа. Напомним, что через $L_p^{\omega}(0, +\infty)$ ($1 < p < +\infty$, $-1 < \omega < p-1$) обозначается класс функций $f(r)$, измеримых на $(0, +\infty)$ и удовлетворяющих условию

$$\int_0^{\infty} |f(r)|^p r^{\omega} dr < +\infty.$$

Теорема 4.2. Для любой функции $F(r) \in L_p^{\omega}(0, +\infty)$ ($1 < p \leq 2$, $-1 < \omega < p-1$) формулы

$$\Phi\left(r^{1/p} e^{\pm i\frac{\pi}{2p}}\right) r^{1/p - \mu} = \frac{e^{\pm i\pi\left(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2p}\right)}}{p} \frac{d}{dr} \int_0^{\infty} \frac{e^{\mp i\tau r} - 1}{\mp i\tau} F(\tau^{1/p}) \tau^{\mu - 1} d\tau, \quad (4.7)$$

где $p > \frac{1}{2}$, $\mu = \frac{p p + \omega - p + 1}{p p}$, определяют почти всюду функции

$$\Phi\left(r e^{\pm i\frac{\pi}{2p}}\right) \in L_q^{-\frac{\omega}{p-1}}(0, +\infty) \left(q = \frac{p}{p-1}\right).$$

Двойственная формула ($L_p = L_p(0)$ см. теорему (4.1))

$$F(r^{1/p}) r^{\mu - 1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^{\mu} \int_{L_p} E_p(\zeta r^{1/p}; \mu + 1) \Phi(\zeta) d\zeta \quad (4.8)$$

также имеет место почти для всех $r \in (0, +\infty)$.

Имеет место неравенство

$$\left\{ \int_0^{\infty} \left| \Phi \left(r e^{\pm i \frac{\pi}{2p}} \right) \right|^q r^{-\frac{\omega}{p-1}} dr \right\}^{1/q} \leq C_0 \left\{ \int_0^{\infty} |F(r)|^p r^{\omega} dr \right\}^{1/p}. \quad (4.9)$$

Доказательство. Известно ([5], лемма 1), что если $F(r) \in L_p^{\omega}(0, +\infty)$, то почти для всех $r \in (0, +\infty)$

$$F(r) = f^{(-)}(r) - f^{(+)}(r), \quad (4.10)$$

где $f^{(-)}(r)$ и $f^{(+)}(r)$ — граничные значения на действительной оси (снизу и сверху) некоторой функции $f(z) \in H_p^{\omega}[\Delta(0, 2\pi)]$ ($f(z)$ голоморфна в разрезанной по положительной полуоси плоскости и почти всюду $f^{(-)}(r) = \lim_{\varphi \rightarrow 2\pi-0} f(re^{i\varphi})$, $f^{(+)}(r) = \lim_{\varphi \rightarrow +0} f(re^{i\varphi})$).

Рассмотрим функцию $f(z)$ в области $\Delta(0, \delta)$ ($\delta > 0$, $\delta + \frac{\pi}{2p} \leq \pi$).

Ясно, что $f(z) \in H_p^{\omega}[\Delta(0, \delta)]$. Применяя теорему 4.1 при $\varphi = 0$, получим почти всюду

$$f^{(+)}(r^{1/p}) r^{\mu-1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^{\mu} \int_{L_p} E_p(\zeta r^{1/p}; \mu+1) G_{p,\mu}^{(+)}(\zeta; f) d\zeta, \quad (4.11)$$

где

$$G_{p,\mu}^{(+)}\left(r^{1/p} e^{\pm i \frac{\pi}{2p}}; f\right) r^{1/p-\mu} = \frac{e^{\pm i\pi\left(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2p}\right)}}{\rho} \times \\ \times \frac{d}{dr} \int_0^{\infty} \frac{e^{\mp i\tau r} - 1}{\mp i\tau} f^{(+)}(\tau^{1/p}) \tau^{\mu-1} d\tau. \quad (4.12)$$

Аналогично рассмотрим функцию $f(z)$ в области $\Delta(-\delta, 0)$. Ясно, что $f(z) \in H_p^{\omega}[\Delta(-\delta, 0)]$. Применяя теорему 4.1 снова при $\varphi = 0$, получим

$$f^{(-)}(r^{1/p}) r^{\mu-1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^{\mu} \int_{L_p} E_p(\zeta r^{1/p}; \mu+1) G_{p,\mu}^{(-)}(\zeta; f) d\zeta, \quad (4.13)$$

где

$$G_{p,\mu}^{(-)}\left(r^{1/p} e^{\pm i \frac{\pi}{2p}}; f\right) r^{1/p-\mu} = \frac{e^{\pm i\pi\left(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2p}\right)}}{\rho} \frac{d}{dr} \int_0^{\infty} \frac{e^{\mp i\tau r} - 1}{\mp i\tau} f^{(-)}(\tau^{1/p}) \tau^{\mu-1} d\tau. \quad (4.14)$$

Так как $G_{p,\mu}^{(+)}(\zeta; f) \in H_q^{-\frac{\omega}{p-1}}\left[\Delta\left(-\delta - \frac{\pi}{2p}, \frac{\pi}{2p}\right)\right]$, то $G_{p,\mu}^{(+)}\left(re^{\pm i \frac{\pi}{2p}}; f\right) \in L_q^{-\frac{\omega}{p-1}}(0, \infty)$. Аналогично и $G_{p,\mu}^{(-)}\left(re^{\pm i \frac{\pi}{2p}}; f\right) \in L_q^{-\frac{\omega}{p-1}}(0, \infty)$. Вычитая

(4.12) из (4.14) и обозначая при $\zeta = re^{\pm i \frac{\pi}{2p}}$

$$G_{\rho, \mu}^{(-)}(\zeta; f) - G_{\rho, \mu}^{(+)}(\zeta; f) = \Phi(\zeta), \quad (4.15)$$

получим формулу (4.7), при этом из (4.15) следует, что $\Phi(re^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}) \in L_q^{-\frac{\infty}{\rho-1}}(0, +\infty)$. Это утверждение прямо следует также из теоремы Б, если учитывать, что условия

$$F(r) \in L_p^{\infty}(0, +\infty), \quad \Phi(re^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}) \in L_q^{-\frac{\infty}{\rho-1}}(0, +\infty) \quad (4.16)$$

в силу выбора значения параметра μ , эквивалентны соответственно условиям

$$F(r^{1/\rho}) r^{\mu-1} \in L_p(0, +\infty), \quad \Phi(r^{1/\rho} e^{\pm i \frac{\pi}{2\rho}}) r^{1/\rho-\mu} \in L_q(0, +\infty). \quad (4.17)$$

Вычитая (4.11) из (4.13), в силу (4.10) и (4.15) получим двойственную формулу (4.8). Что касается неравенства (4.9), то оно следует из теоремы Б, если учесть наше предыдущее замечание относительно эквивалентности условий (4.16) и (4.17). Теорема доказана.

3°. При $\rho > 1$, теорему 4.2 можно дополнить следующим утверждением.

Теорема 4.3. В предположениях теоремы 4.2, при $\rho > 1$, $|\theta| \geq \frac{\pi}{\rho}$ справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^{\mu} \int_{L_p} E_{\rho}(\zeta r^{1/\rho} e^{i\theta}; \mu+1) \Phi(\zeta) d\zeta = 0. \quad (4.18)$$

Доказательство. В силу (4.15) достаточно доказать, что при $|\theta| \geq \frac{\pi}{\rho}$ справедливы равенства

$$\int_{L_p} E_{\rho}(\zeta r^{1/\rho} e^{i\theta}; \mu+1) G_{\rho, \mu}^{(\pm)}(\zeta; f) d\zeta = 0. \quad (4.19)$$

Из асимптотических свойств функции типа Миттаг-Лефлера и из выбора параметра μ следует, что $E_{\rho}(\zeta r^{1/\rho} e^{i\theta}; \mu+1)$ при $|\theta| > \frac{\pi}{\rho}$ как

функция от ζ принадлежит классу $H_p^{\infty} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\rho} \right) \right]$. С другой сто-

роны, очевидно, $G_{\rho, \mu}^{(\pm)}(\zeta; f) \in H_q^{-\frac{\infty}{\rho-1}} \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\rho}, \frac{\pi}{2\rho} \right) \right]$. Отсюда по интегральной теореме Коши следуют равенства (4.19) (см. [5], лемма 2, см. также доказательство теоремы 2.1).

Эта теорема позволяет обобщить теорему 4.2 и, как в случае $\rho = 2$ (см. [2], теорему 4.4), построить аппарат интегрального преобразования и обращения для функций, принадлежащих классу L_p^{∞} на конечной системе лучей.

Введем следующие обозначения: совокупность лучей

$$l_k; \arg z = \varphi_k \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

$$0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$$

обозначим через Γ . Система лучей Γ разбивает плоскость на n угловых областей с общей вершиной в начале координат. Полагая $\varphi_{n+1} = 2\pi + \varphi_1$, обозначим далее

$$\omega = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \frac{\pi}{\varphi_{k+1} - \varphi_k} \right\}.$$

Ясно, что $\frac{\pi}{\omega}$ представляет собой величину наименьшего из этих углов

Пусть $L_p^\omega(\Gamma)$ означает класс функций $F(z)$, измеримых на Γ и удовлетворяющих условию

$$\int_{\Gamma} |F(z)|^p |z|^\omega d|z| = \sum_{k=1}^n \int_0^\infty |F(re^{i\varphi_k})|^p r^\omega dr < +\infty.$$

Справедлива следующая

Теорема 4.4. Если $F(z) \in L_p^\omega(\Gamma)$, $1 < p \leq 2$, $-1 < \omega < p-1$, $\rho > \omega$, $\mu = \frac{\rho p + \omega - \rho + 1}{\rho p}$, то формулы

$$\begin{aligned} \Phi_k \left(r^{1/\rho} e^{-i\varphi_k \pm i \frac{\pi}{2\rho}} \right) r^{1/\rho - \mu} &= \frac{e^{\pm i\pi \left(\frac{\mu}{2} - \frac{1}{2\rho} \right)}}{\rho} \times \\ &\times \frac{d}{dr} \int_0^\infty \frac{e^{\mp i\tau r} - 1}{\mp i\tau} F(\tau^{1/\rho} e^{i\varphi_k}) \tau^{\mu-1} d\tau \end{aligned} \quad (4.20)$$

($k=1, 2, \dots, n$) /

определяют почти всюду функции

$$\Phi_k \left(r e^{-i\varphi_k \pm i \frac{\pi}{2\rho}} \right) \in L_q^{-\frac{\omega}{p-1}}(0, +\infty) \quad \left(q = \frac{p}{p-1} \right). \quad (4.21)$$

Двойственная формула ($r^{1/\rho} e^{i\varphi} \in \Gamma$)

$$F(r^{1/\rho} e^{i\varphi}) r^{\mu-1} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \frac{d}{dr} r^\mu \int_{L_\rho(-\varphi_k)} E_\rho(\zeta r^{1/\rho} e^{i\varphi}; \mu+1) \Phi_k(\zeta) d\zeta \quad (4.22)$$

также имеет место почти всюду.

Справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^\infty \left| \Phi \left(r e^{-i\varphi_k \pm i \frac{\pi}{2\rho}} \right) \right|^q r^{-\frac{\omega}{p-1}} dr \right\}^{1/q} \leq C_0 \sum_{k=1}^n \left\{ \int_0^\infty |F(re^{i\varphi_k})|^p r^\omega dr \right\}^{1/p}. \quad (4.23)$$

Доказательство. Утверждения (4.21) и (4.23) непосредственно следуют из теоремы 4.2. Для доказательства (4.22) обозначим

$$L_k(r^{1/p} e^{i\varphi}) r^{\mu-1} = \frac{1}{2\pi i} \frac{d}{dr} r^{\mu} \int_{L_p(-\pi)} E_p(\zeta r^{1/p} e^{i\varphi}; \mu+1) \Phi_k(\zeta) d\zeta. \quad (4.24)$$

Из теоремы 4.2 имеем

$$L_k(r^{1/p} e^{i\varphi k}) r^{\mu-1} = F(r^{1/p} e^{i\varphi k}) r^{\mu-1},$$

а из теоремы 4.3 следует, что

$$L_k(r^{1/p} e^{i\varphi m}) r^{\mu-1} = 0, \text{ при } m \neq k,$$

Поэтому при $r^{1/p} e^{i\varphi} \in \Gamma$ справедливо равенство

$$\sum_{k=1}^n L_k(r^{1/p} e^{i\varphi}) r^{\mu-1} = F(r^{1/p} e^{i\varphi}) r^{\mu-1} \quad (4.25)$$

Суммируя по индексу k равенства (4.24) и имея в виду (4.25), получим (4.22).

В заключение отметим, что дословным повторением рассуждений из [2] можно комбинировать теоремы 2.2 и 4.4 (теорема 4.4 — это своего рода „предельная форма“ теоремы 2.2) и получить для $1 < p \leq 2$ аналог общей теоремы М. М. Джрбашяна (см. [2], теорема 7.10) о представлении функций, заданных на множестве, состоящем из конечного числа лучей и угловых областей с общей вершиной.

Ереванский институт
народного хозяйства

Поступила 2.XI.1981

Ա. Ե. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ. Ֆունկցիաների դասեր կոմպլեքս տիրույթում և նրանց ինտեգրալ ներկայացումները (սամմարիում)

Աշխատանքը նվիրված է Մ. Մ. Զրբաշյանի, ինչպես նաև Մ. Մ. Զրբաշյանի և հինգիսի որոշ արդյունքների ընդհանրացմանը և տարածմանը. $H_p^\infty \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right]$ և L_p^∞ դասերի վրա $1 < p \leq 2$ արժեքների համար: Ստացված արդյունքների հիման վրա նորից ապացուցվում են (ուրիշ մեթոդով) Վիներ-Պելիի տիպի թեորեմներ ամբողջ ֆունկցիաների որոշ դասերի ինտեգրալ ներկայացումների մասին, որոնք նախկինում ապացուցված էին Մ. Մ. Զրբաշյանի և Ի. Հ. Խաչատրյանի կողմից: L_p^∞ դասի ֆունկցիայի ինտեգրալ ձևավորման հետազոտման նկատմամբ նոր մոտեցումը կայանում է նրանում, որ այդպիսի ձևավորման դիտվում է որպես $H_p^\infty \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right]$ դասի ֆունկցիայի ինտեգրալ ներկայացման «սահմանային տեսք»:

A. E. AVETISSIAN *Classes of function in the complex domain and their integral representations (summary)*

The work is devoted to generalization of some results of M. M. Djrbashian, as well as M. M. Djrbashian's and authors and their extension to $H_p^\infty \left[\Delta \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha} \right) \right]$ and L_p^∞ classes for $1 < p \leq 2$. The results are applied to prove. Theorems of Viner Paley type concerning some classes of integral representation of entire functions. These theorems earlier proved by a different method by M. M. Djrbashian and I. H. Khachatryan.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. Титчмарш. Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948.
2. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, М., «Наука», 1966.
3. М. М. Джрбашян. Об одном новом интегральном преобразовании и его применении в теории целых функций, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, 1955, 133—190.
4. М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян. Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, Сиб. мат. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
5. В. М. Мартиросян. Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XIII, № 5—6, 1978, 490—531.
6. К. Гофман. Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
7. С. А. Акопян. Теорема о двух постоянных для функций класса H_p , Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XI, № 2, 1967, 123—127.
8. А. Е. Аветисян. Две теоремы о функциях, аналитических в угловых областях, ДАН Арм.ССР, XXIX, № 5, 1959.