ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 6, 1981 Математика

Ш. А. ГРИГОРЯН, В. М. МАРТИРОСЯН

О ЗАМЫКАНИИ, МИНИМАЛЬНОСТИ И БАЗИСНОСТИ НЕКОТОРЫХ ОБЩИХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

1 (а) В давней работе М. М. Джрбашяна и А. Б. Нерсесяна [1] впервые был предложен метод построения биортогональных систем, порожденных аналитическими функциями с кратными нулями.

В дальнейшем этот метод был существенно усовершенствован и нашел новые важные применения в ряде различных по своей природе задач анализа, в том числе и в работах других авторов. Подробные литературные ссылки (до 1973 года) по этому поводу приведены в работе [2].

Этот метод получил также эффективные применения при решении родственных задач интерполяции и базисности, им, в частности, были установлены критерии базисности неполных систем простейших рациональных дробей (вообще говоря, с кратными полюсами) в их замыканиях в метрике H^p в полуплоскости и в круге [3—6].

(б) В работе М. М. Джрбашяна [7] впервые были рассмотрены системы рациональных функций вида $\{r_k(z)=(s_k-1)!\,(1-\lambda_k z)^{-s_k}\}_1^\infty$ ($|\lambda_k|<1$, s_k — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$) и была предложена схема построения биортогональной с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ системы функций $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ (см. также [3, 8]).

Заметка Ю. Ф. Коробейника [9] посвящена рассмотрению более общих систем вида $\{h_k(z)=f^{(s_k-1)}(\lambda_k z)\}_1^\infty$, которые получаются из системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ путем изоморфного отображения пространства H^2 в круге на себя. Воспользовавшись известным критерием базисности неполной в H^2 системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$ (см. [10—12]) и доказав, что в случае полноты в H^2 эта система не является базисом (кроме случая $r_k(z)= = z^k$), автор указанной заметки получает критерий базисности системы $\{h_k(z)\}_1^\infty$.

В той же заметке [9], по существу путем повторения предложенной М. М. Джрбашяном схемы построения системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональной с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ (см [3, 7, 8]), приводится построение системы функционалов $\{H_k\}_1^\infty$, биортогональной с $\{h_k(z)\}_1^\infty$.

Впрочем, как станет очевидно из данной заметки, как в случае полуплоскости, так и в случае круга, систему даже функций, а не только функционалов, биортогональную с $\{h_k(z)\}_1^\infty$, можно сразу получить из системы М. М. Джрбашяна $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ путем изоморфного отображения соответствующих пространств.

(в) М. М. Джрбашяном впервые были рассмотрены также системы рациональных дробей вида $\{r_k(z) = (s_k - 1)!\,(z - \bar{\lambda}_k)^{-s_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ($\operatorname{Im} \lambda_k > 0$, s_k — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k\}$) (см. [2, 8]), и были построены биортогональные с ними системы $\{\Omega_k(z)\}_1^{\infty}$. Им же в работах [4, 5] было дано полное внутреннее описание замыкания в метрике пространства H^p_+ $(1 < p < +\infty)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ системы $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ и установлен критерий базисности в своем замыкании такой системы.

Данная заметка посвящена системам функций, получаемых из системы $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$ путем изоморфного отображения пространства H^2_+ на себя. Полученные таким образом системы записываются в виде

$$\Psi_k(z) = \Phi^{(s_k-1)}(z - \bar{\lambda}_k), \quad k = 1, 2, \cdots,$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{i}\int_0^{+\infty} e^{izt} g(t)\,dt, \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

а $g(t)$ и $1/g(t)$ — из класса $L_\infty(0, +\infty)$.

На основании отмеченных выше результатов М. М. Джрбашяна для системы $\{r_k(z)\}_1^{\infty}$, в данной заметке получены критерии полноты, минимальности и базисности в метрике H^2_+ системы $\{\Psi_k(z)\}_1^{\infty}$; в случае неполноты такой системы дано полное внутреннее описание ее замыкания, а в случае минимальности построена биортогональная с ней система.

В качестве приложения получены соответствующие результаты для конкретных систем функций, порожденных определенными специальными функциями.

2 (а) Обозначим через H^2_+ известное пространство функций $f(z)$, голоморфных в полуплоскости $G^{(+)} = \{z; \operatorname{Im} z > 0\}$ и имеющих конечную норму

$$\|f\| = \sup_{0<y<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^2\,dx\right\}^{1/2} < +\infty.$$

Пространство H^2_- в полуплоскости $G^{(-)} = \{z; \operatorname{Im} z < 0\}$ определяется аналогичным образом.

Лемма 1. *Если $\alpha(t) \geq 0$ — измеримая на $(0, +\infty)$ функция и ее преобразование Лапласа*

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt}\alpha(t)\,dt, \quad z \in G^{(+)}, \tag{1}$$

сходится в полуплоскости $G^{(+)}$ и определяет функцию $f(z) \in H^2_+$, то $\alpha(t) \in L_2(0, +\infty)$.

Доказательство. Из (1) при $\operatorname{Im} z = 1$ имеем

$$f(x+i) = \int_0^{+\infty} [e^{-t}\alpha(t)]\, e^{ixt}\, dt, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{2}$$

Положив здесь $x = 0$ и учитывая, что $\alpha(t) \geqslant 0$, получим $e^{-t}\alpha(t) \in L_1(0, +\infty)$.

С другой стороны, по теореме Винера—Пэли для $f(z)$ справедливо представление вида

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt}\, \gamma(t)\, dt, \quad z \in G^{(-)}, \quad \gamma(t) \in L_2(0, +\infty).$$

В частности

$$f(x+i) = \int_0^{+\infty} [e^{-t}\gamma(t)]\, e^{ixt}\, dt, \quad -\infty < x < +\infty, \tag{2'}$$

причем ясно, что $e^{-t}\gamma(t) \in L_1(0, +\infty)$.

Из (2) и (2′) на основании теоремы единственности преобразования Фурье ([13], стр. 37) следует $\alpha(t) = \gamma(t)$, откуда $\alpha(t) \in L$ $(0, +\infty)$.

(б) Пусть $f(z) \in H_+^2$. По теореме Винера—Пэли существует функция $\varphi(t) \in L_2(0, +\infty)$, единственным образом определяемая по $f(z)$ и такая, что

$$f(z) = \int_0^{+\infty} e^{izt}\, \varphi(t)\, dt, \quad z \in G^{(+)}. \tag{3}$$

Полагая, что $g(t)$ — измеримая на $(0, +\infty)$ функция, определим в H_+^2 оператор A_g по формуле

$$A_g[f] = \int_0^{+\infty} e^{izt}\, \varphi(t)\, g(t)\, dt. \tag{4}$$

Лемма 2. *Оператор A_g является автоморфизмом* в H_+^2 тогда и только тогда, когда $g, g^{-1} \in L_\infty(0, +\infty)$.*

Доказательство. Предположим, что A_g—автоморфизм в H_+^2. Тогда из (4) ясно, что $g(t)$ конечна почти всюду на $(0, +\infty)$, так что без ограничения общности можем считать g всюду конечной функцией.

Пусть $\psi(t) \in L_2(0, +\infty)$ произвольна. Очевидно, что и функция $\varphi(t) = |\psi(t)| \exp\{-i \arg g(t)\} \in L_2(0, +\infty)$. Следовательно, опреде-

* т. е. A_g является ограниченным обратимым линейным оператором, отображающим H_+^2 на H_+^2.

ленная по формуле (3) функция $f(z)$ принадлежит H^2_+. В силу нашего предположения относительно A_g этому же классу принадлежит и функция

$$A_g[f]=\int_0^{+\infty} e^{izt}\,\alpha(t)\,dt,$$

где $\alpha(t)=|\psi(t)|\,|g(t)|$, и по лемме 1 $\alpha(t)\in L_2(0,+\infty)$.

Таким образом, для любой функции $\psi(t)\in L_2(0,+\infty)$ будем иметь, что $|\psi(t)|^2\,|g(t)|^2\in L_1(0,+\infty)$. Следовательно, и для любой функции $\gamma(t)\in L_1(0,+\infty)$ произведение $\gamma(t)\,|g(t)|^2\in L_1(0,+\infty)$, откуда по одной известной теореме ([14], стр. 20) $|g(t)|^2$, а вместе с ней и $g(t)$ существенно ограничены на $(0,+\infty)$. Принадлежность $g^{-1}=\frac{1}{g}$ к $L_\infty(0,+\infty)$ вытекает из уже доказанного и равенства $A_g^{-1}=A_{g^{-1}}$.

Достаточность условий $g,\ g^{-1}\in L_\infty(0,+\infty)$ для автоморфности оператора A_g очевидна.

3. Для дальнейшего изложения введем ряд обозначений.

Пусть $\{\lambda_k\}_1^\infty$ — последовательность комплексных чисел из полуплоскости $G^{(+)}$, а s_j и p_j $(j\geqslant 1)$ — кратности появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_k\}_1^j$ и во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$ соответственно.

Отметим, что сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^2)^{-1}\,\mathrm{Im}\,\lambda_k \tag{5}$$

обеспечивает сходимость произведения Бляшке с нулями в точках $z=\lambda_k$:

$$B(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{z-\lambda_k}{z-\bar\lambda_k}\,\varkappa_k,\quad \varkappa_k=\frac{|1+\lambda_k^2|}{1+\lambda_k^2}.$$

Следуя М. М. Джрбашяну [4, 5], при условии сходимости ряда (5) обозначим через $H^2_\pm\{\lambda_k\}$ класс функций $f(z)$, определенных вне точек вещественной оси и удовлетворяющих условиям: 1) $f(z)\equiv f^+(z)\in H^2_+$, $z\in G^{(+)}$; 2) $f(z)\equiv f_-(z)=B(z)\,f_*(z)$, $z\in G^{(-)}$, $f_*(z)\in H^2_-$; 3) почти для всех $x\in(-\infty,+\infty)$

$$\lim_{y\to+0} f(x+iy)=f_+(x)=f_-(x)=\lim_{y\to-0} f(x+iy).$$

Далее, с последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем систему простейших рациональных дробей $\{r_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$r_k(z)=(s_k-1)!\,(z-\bar\lambda_k)^{-s_k}\quad(k\geqslant 1).$$

Известно [4, 5], что если ряд (5) расходится, то система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не минимальна в H^2_+. При условии же сходимости ряда (5) в работе

[8] была построена система $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, биортогональная с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на вещественной оси в смысле

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} r_k(x)\,\overline{\Omega_\nu(x)}\,dx=\begin{cases}1, & k=\nu,\\ 0, & k\neq\nu\end{cases}\quad (k\geqslant 1,\ \nu\geqslant 1). \tag{6}$$

Эта система определяется так:

$$\Omega_k(z)=\frac{B(z)}{(s_k-1)!}\sum_{j=0}^{p_k-s_k}\frac{a_j(\lambda_k)}{(z-\lambda_k)^{p_k-s_k-j+1}}\ (k\geqslant 1),$$

$$a_j(\lambda_k)=\frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{dz^j}\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{B(z)}\right\}_{z=\lambda_k}(k\geqslant 1,\ j\geqslant 0).$$

4. Пусть теперь $g\in L_\infty(0,+\infty)$ и $g^{-1}\in L_\infty(0,+\infty)$.
Рассмотрим функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{i}\int_0^{+\infty} e^{izt}\,g(t)\,dt,\ z\in G^{(+)}$$

и порожденную этой функцией и последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ систему функций $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$\Psi_k(z)=\Phi^{(s_k-1)}(z-\overline{\lambda}_k),\ z\in G^{(+)}\ (k\geqslant 1).$$

Нетрудно проверить, что

$$A_g[r_k]=\Psi_k(z)\ (k\geqslant 1), \tag{7}$$

и поскольку в силу леммы 2 A_g — автоморфизм в H_+^2, то на основании установленных М. М. Джрбашяном [4, 5] результатов для системы $\{r_k(z)\}_1^\infty$, для системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ получаем следующие теоремы.

Теорема 1. *Для полноты H_+^2 системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ необходима и достаточна расходимость ряда* (5).

Теорема 2. *Если ряд* (5) *сходится, то замыкание в метрике H_+^2 системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ совпадает с множеством функций $\Psi(z)$, допускающих представление вида*

$$\Psi(z)=\frac{1}{i}\int_0^{+\infty} e^{izt}\,\varphi(t)\,g(t)\,dt,\ z\in G^{(+)},$$

где $\varphi(t)$ — преобразование Фурье функции $f(z)\in H_\pm^2\{\lambda_k\}$,

$$\varphi(t)=\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l.i.m}}\left\{-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-ixt}f(x)\,dx\right\}.$$

Теорема 3. *Если последовательность $\{\lambda_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям*

$$\inf_{j\geq 1}\prod_{\substack{k=1\\ \lambda_k\neq\lambda_j}}^{\infty}\left|\frac{\lambda_j-\lambda_k}{\lambda_j-\bar\lambda_k}\right|>0,\ \sup_{k\geq 1}\{p_k\}<+\infty, \tag{8}$$

то система $\{(\operatorname{Im}\lambda_k)^{s_k-\frac{1}{2}}\Psi_k(z)\}_1^\infty$ *является базисом Рисса в своем замыкании в метрике* H_+^2.

Если же хотя бы одно из условий (8) *нарушено, то система* $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ *ни при какой расстановке членов не является базисом своего замыкания в метрике* H_+^2.

Наконец, займемся вопросом минимальности системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$.

Сначала отметим, что поскольку в случае расходимости ряда (5) система $\{r_k(z)\}_1^\infty$ не минимальна в H_+^2, то при том же условии система $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ также не минимальна в H_+^2 и, следовательно, не имеет биортогонального дополнения.

Пусть теперь ряд (5) сходится. Покажем как можно с помощью системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ М. М. Джрбашяна построить систему функций, биортогональную с $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$. Для этого сначала заметим, что $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty\subset H_+^2$ (см. [4, 5]). Следовательно, по теореме Винера—Пэли существует последовательность функций $\{\chi_k(t)\}_1^\infty\subset L_2(0,+\infty)$ таких, что

$$\Omega_k(z)=\int_0^{+\infty}e^{izt}\chi_k(t)\,dt,\ z\in G^{(+)}\ (k\geq 1), \tag{9}$$

причем

$$\underset{\sigma\to+\infty}{\mathrm{l\cdot i\cdot m}}\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma}^{\sigma}e^{-ixt}\Omega_k(x)\,dx=\begin{cases}\chi_k(t),\ t\in(0,+\infty)\\ 0,\ t\in(-\infty,0).\end{cases} \tag{10}$$

Определим систему функций $\{\omega_k(z)\}_1^\infty\subset H_+^2$, положив

$$\omega_k(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{+\infty}e^{izt}\frac{\overline{\chi_k(t)}}{\overline{g(t)}}\,dt,\ z\in G^{(+)}. \tag{11}$$

Теорема 4. *Системы функций* $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ *и* $\{\omega_k(z)\}_1^\infty$ *биортогональны на вещественной оси в смысле*

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_k(x)\overline{\omega_\nu(x)}\,dx=\begin{cases}1,\ k=\nu\\ 0,\ k\neq\nu\end{cases}\quad(k\geq 1,\ \nu\geq 1). \tag{12}$$

Доказательство. Положив

$$\varphi_k(t)=(it)^{s_k-1}e^{-i\bar\lambda_k t}\ (k\geq 1),\ t\in(0,+\infty)$$

нетрудно проверить, что

$$r_k(z) = \frac{1}{i} \int_0^{+\infty} e^{izt} \varphi_k(t)\, dt, \quad z \in G^{(+)} (k > 1). \tag{13}$$

Отсюда и из (7) будем также иметь

$$\Psi_k(z) = \frac{1}{i} \int_0^{+\infty} e^{izt} \varphi_k(t)\, g(t)\, dt, \quad z \in G^{(+)} (k > 1). \tag{14}$$

Из (13) и (9) в силу обобщенного равенства Парсеваля (см. [13], стр. 41) можем написать

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} r_k(x)\, \overline{\Omega_\nu(x)}\, dx = \int_0^{+\infty} \varphi_k(t)\, \chi_\nu(t)\, dt, \tag{15}$$

а из (14) и (11)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_k(x)\, \overline{\omega_\nu(x)}\, dx = \int_0^{+\infty} \varphi_k(t)\, \overline{\chi_\nu(t)}\, dt. \tag{16}$$

Следовательно, учитывая также (6), из (15) и (16) получим (12).

5. В заключение приведем примеры конкретных систем $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$, порождаемых последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$.

Пусть $g(t) = 2i(1 + e^{-t})^{-1}$, тогда

$$\Phi(z) = \Psi\left(\frac{1 - iz}{2}\right) - \Psi\left(\frac{-iz}{2}\right),$$

где $\Psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$ — логарифмическая производная гамма функции Эйлера (см. [15], стр. 401, формулу 9.179). Следовательно, в качестве системы $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ можно взять

$$\Psi_k(z) = \left(\frac{1}{2i}\right)^{s_k - 1} \left\{\Psi^{(s_k-1)}\left(\frac{1 + i\bar{\lambda}_k - iz}{2}\right) - \Psi^{(s_k-1)}\left(\frac{i\bar{\lambda}_k - iz}{2}\right)\right\} (k > 1). \tag{17}$$

Пусть теперь $g(t) = i \exp(-a e^{-t})$ $(a > 0)$, тогда $\Phi(z) = a^{iz} \gamma(-iz; a)$, где $\gamma(-iz, a)$ — неполная гамма-функция:

$$\gamma(-iz; a) = \int_0^a u^{-iz-1} e^{-u}\, du$$

(см. [15], стр. 403, формула 9.193). В этом случае система $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$ имеет вид

$$\Psi_k(z) = \int_0^a u^{-iz-1} e^{-u} (-i \ln u)^{s_k - 1} u^{i\bar{\lambda}_k}\, du \quad (k > 1). \tag{18}$$

Таким образом, для систем (17) и (18) справедливы все утверждения теорем 1—4.

Наконец, отметим, что можно привести и другие примеры конкретных систем $\{\Psi_k(z)\}_1^\infty$, для которых справедливы утверждения теорем 1—4 (см., напр., [15], формулы 9.90; 9.101; 9.129; 9.153; 9.183; 9.195).

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 2.II.1981

Շ. Հ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Ֆունկցիաների որոշ ընդհանուր սիստեմների փակության, մինիմալության ու բազիսության մասին (*ամփոփում*)

Աշխատանքում ստացվել են ֆունկցիաների որոշ ընդհանուր սիստեմների փակության, մինիմալության ու բազիսության հայտանիշները։ Այդպիսի սիստեմի ոչ-լրիվության դեպքում տրվել է նրա փակույթի լիակատար ներքին նկարագիրը, իսկ մինիմալության դեպքում կառուցվել է նրա հետ բիօրթոգոնալ սիստեմը։

Որպես կիրառություն ստացվել են համապատասխան արդյունքներ ֆունկցիաների կոնկրետ սիստեմների համար, որոնք ծնվում են որոշակի հատուկ ֆունկցիաներով։

Sh. H. GRIGORIAN, V. M. MARTIROSSIAN. *On the closedness, minimality and basicity of certain general systems of functions* (summary)

In the present paper the criteria for closedness, minimality and basicity for ceritain general systems of functions are established. In the case where such a system is not closed, the full inner description of its closure is given, and where such a system is minimal, its biorthogonal system is constructed.

Corresponding results for concrete systems of functions are also obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян, А. Б. Нерсесян.* О построении некоторых специальных биортогональных систем, Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, XII, № 5, 1959, 17—42.
2. *М. М. Джрбашян.* Теорема единственности аналитических функций, асимптотически представимых рядами Дирихле-Тейлора, Матем. сб., 91(133), №4(8), 1973, 580—626.
3. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_2, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», IX, № 5, 1974, 339—373.
4. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H_+^p ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520.
5. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H_p в полуплоскости, Изв. АН СССР, сер. матем., 43, № 6, 1978, 1322—1384.
6. *Г. М. Айрапетян.* Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 4, 1977, 262—277.
7. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», VIII, № 1, 1973, 384—409.

8. *М. М. Джрбашян*. Биортогональные системы рациональных функций и наилучшие приближения ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб., 95(137), № 3(11), 1974, 418—444.
9. *Ю. Ф. Коробейник*. Критерий базисности одной системы функций, Матем. заметки, 25, № 5, 1979, 665—674.
10. *В. Э. Кацнельсон*. Об условиях базисности системы корневых векторов некоторых классов операторов, Функц. анализ и его прилож., 1, № 2, 1967, 39—51.
11. *Н. К. Никольский, Б. С. Павлов*. Базисы из собственных векторов вполне неунитарных сжатий и характеристическая функция, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 1, 1970, 90—133.
12. *Г. М. Айрапетян*. О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной плоскости, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», X, № 2, 1975, 133—152.
13. *М. М. Джрбашян*. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
14. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз*. Теория ортогональных рядов, Гоcиздат физ.-мат. лит., М., 1958.
15. *В. А. Диткин, А. П. Прудников*. Интегральные преобразования и операционное исчисление, «Наука», М., 1974.