ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 6, 1981 Математика

В. М. МАНУКЯН

ОСОБЕННОСТЬ КАРЛЕМАНА ДЛЯ ФУНКЦИЙ, НЕПРЕРЫВНЫХ ХОТЯ БЫ В ОДНОЙ ТОЧКЕ

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — полная ортонормальная система (ПОНС) в $L^2[0,1]$ и $f(x)\in L^2[0,1]$. Тогда коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2<\infty.$$

Карлеман впервые установил (см. [1], стр. 311) существование непрерывной функции, коэффициенты Фурье которой по тригонометрической системе удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p=\infty \quad \text{при всех } p<2. \tag{1}$$

В связи с этим возникло следующее определение ([2], стр. 270, [3], стр. 5):

Функция $f(x)$ обладает особенностью Карлемана относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$, если коэффициенты Фурье $c_n=\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)\,dx$ удовлетворяют условию (1). В работе [4] А. М. Олевский установил, что для любой ортонормированной полной системы $\{\varphi_n(x)\}$ существует непрерывная функция, обладающая особенностью Карлемана относительно этой системы. Им же в работе [5] построена ПОНС, относительно которой каждая непрерывная функция (кроме тождественного нуля) обладает особенностью Карлемана.

В настоящей работе построена полная ортонормальная система функций в $L^2[0,1]$, для которой каждая функция $f(x)\in L^2[0,1]$ $(f\not\sim 0)$, непрерывная хотя бы в одной точке отрезка $[0,1]$, обладает особенностью Карлемана.

При построении этой системы существенно используются идеи А. М. Олевского, разработанные в работе [5].

Теорема 1. *Существует ПОНС функций $\{\varphi_n(x)\}$, определенных на $[0,1]$, такая, что каждая функция $f(x)\in L^2[0,1]$ $(f\not\sim 0)$, непрерывная хотя бы в одной точке отрезка $[0,1]$, обладает особенностью Карлемана относительно $\{\varphi_n(x)\}$.*

Основная лемма. *Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ПОНС на $[0,1]$ и функции $\varphi_n(x)$ можно представить в виде $\varphi_n(x)=f_n(x)+\nu_n(x)$, $n=1,2,\cdots$, где $f_n(x)$ и $\nu_n(x)$ удовлетворяют следующим условиям:*

I $f_n(x)$ *непрерывны на* $[0,1]$ $n=1, 2, \cdots,$

II $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|^q$ *равномерно сходится на* $[0, a)$ *при любом* $0<a<1$ *и любом* $q>2$,

III $$\nu_n(x)=\begin{cases} \nu_n>0, & \text{если } x\in e_n^1 \\ 0, & \text{если } x\in e_n^2 \end{cases} \quad n=1, 2, \cdots,$$

IV *для любого натурального числа* s *и произвольной последовательности* $\{i_n\}$, $n=1, 2, \cdots, s$ (*где* i_n *принимает значения* 1 *или* 2), *множество* $\bigcap_{n=1}^{s} e_n^{i_n}$ *в любом интервале отрезка* $[0,1]$ *имеет положительную меру**,

V $\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2<\infty$,

тогда каждая функция $f(x)\in L^2[0,1]$ ($f\overline{\infty}0$), *непрерывная хотя бы в одной точке отрезка* $[0,1]$ *обладает особенностью Карлемана относительно* $\{\varphi_n(x)\}$.

Доказательство. Возьмем произвольную функцию $f(x)\in L^2[0,1]$ ($f\overline{\infty}0$), которая не обладает особенностью Карлемана относительно системы $\{\varphi_n(x)\}$ и покажем, что $f(x)$ разрывна в любой точке отрезка $[0,1]$. Так как $f(x)$ не обладает особенностью Карлемана, то существует $p<2$ такое, что $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^p<\infty$, где $c_n=(f, \varphi_n)$. Пользуясь неравенством Гёльдера из условий I и II получим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ сходится к некоторой функции $\Phi(x)$, непрерывной на $[0,1)$, поскольку сходимость осуществляется равномерно внутри $[0,1)$ (то есть на любом интервале $[0, a)$, где $0<a<1$). Учитывая также равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ на $[0.1]$ убедимся, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$ равномерно сходится внутри $[0,1)$. Обозначим сумму этого ряда через $g(x)$. Ясно, что $g\infty f$ и $g(x)=\Phi(x)+\sum_{n=1}^{\infty} c_n \nu_n(x)$ на $[0,1)$. Так как $f\overline{\infty}0$, то существует хотя бы одно n_0 такое, что $c_{n_0}\neq0$. Покажем, что в произвольном интервале $\Delta\subset[0,1]$ существуют множества положительной меры X' и X'' такие, что $|g(x')-g(x'')|>\frac{\nu_{n_0}|c_{n_0}|}{2}$

* Нетрудно убедиться в существовании системы множеств $\{e_n^i\}$ ($n\geqslant1$, $i=1$ или 2), обладающих свойством IV.

для произвольных $x' \in X'$ и $x'' \in X''$. Этим мы докажем существенный разрыв функции $g(x)$, а значит и $f(x)$ в любой точке $[0,1]$.

Так как $\Phi(x)$ непрерывна в интервале Δ, то можно выбрать такой интервал $\Delta' \subset \Delta$, что для произвольных $x_1 \in \Delta'$, $x_2 \in \Delta'$

$$|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)| < \frac{\nu_{n_0} |c_{n_0}|}{6}. \tag{2}$$

Выберем $N > n_0$ такое, что

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x) \right| < \frac{\nu_{n_0} |c_{n_0}|}{6} \text{ для любого } x \in \Delta' \tag{3}$$

и обозначим $X' = \Delta' \cap \left(\bigcap_{n=1}^{N} e_n^{i_n} \right)$, $X'' = \Delta' \cap \left(\bigcap_{n=1}^{N} e_n^{i'_n} \right)$, где $i_n = i'_n$ если $n \neq n_0$, $i_{n_0} = 1$, $i'_{n_0} = 2$. Из IV условия леммы следует, что $\operatorname{mes} X' > 0$, $\operatorname{mes} X'' > 0$.

Воспользовавшись III-им условием леммы, определением множеств X' и X'', неравенствами (2) и (3) для произвольных $x' \in X'$ и $x'' \in X''$, получим

$$|g(x') - g(x'')| = |\Phi(x') - \Phi(x'') + \sum_{n=1}^{N} c_n \nu_n(x') - \sum_{n=1}^{N} c_n \nu_n(x'') +$$

$$+ \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x') - \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x'')| > \left| \sum_{n=1}^{N} c_n \nu_n(x') - \sum_{n=1}^{N} c_n \nu_n(x'') \right| -$$

$$- |\Phi(x') - \Phi(x'')| - \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x') \right| - \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n \nu_n(x'') \right| >$$

$$> \nu_{n_0} |c_{n_0}| - \frac{\nu_{n_0} |c_{n_0}|}{2} = \frac{\nu_{n_0} |c_{n_0}|}{2}.$$

Тем самым лемма доказана.

Для доказательства теоремы осталось построить полную ортонормальную систему, которая удовлетворяет условиям основной леммы.

В дальнейшем через $\|\cdot\|$ мы будем обозначать норму $\|\cdot\|_{L^2[0,1]}$.

Лемма 1. *Пусть заданы ОНС* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$, $g(x)$ *и функция* $\|\gamma(x)\| \leq 1$, *определенные на* $[0,1]$, *тогда для произвольного* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \nu\gamma(x)$ *такая, что* $f(x)$ *непрерывна на* $[0,1]$, $\|f(x) - g(x)\| < \varepsilon$, $0 < \nu < \varepsilon$ *и система* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+1}$ *ортонормирована в* $L^2[0,1]$, *причем, если* $g(x)$ *непрерывна на некотором* $[a, b] \subset [0,1]$, *а* $\varphi_i(x)$ $(1 \leq i \leq n)$ *ограничены на том же отрезке, то* $f(x)$ *можно выбрать так, чтобы* $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ *всюду на* $[a, b]$.

Доказательство. Можно ограничиться случаем $\varepsilon < 1$.

Обозначим через $J = \{a_{ij}\}$ единичную матрицу размера n и через $m_{ij}(J)$ — матрицу, полученную из J выкидыванием ее i-ой строчки и

i-ого столбца. Так как детерминант матрицы является непрерывной функцией ее элементов, то можно выбрать такое $0<\delta<1$, что для произвольной квадратной матрицы D (размера n) из условия

$$|d_{ij}-a_{ij}|<\delta \quad i=1, 2, \cdots, n, \; j=1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

будет следовать, что

$$|\det D-1|<\frac{1}{2},$$

$$|\det m_{ij}(D)|<\frac{1}{2} \quad i\neq j, \; i=1, 2, \cdots, n, \; j=1, 2, \cdots, n,$$

$$|\det m_{ii}(D)-1|<\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Выберем

$$\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{21 n} \text{ и } \varepsilon_2=\frac{\delta\varepsilon_1}{2(n+2)}. \tag{6}$$

Возьмем непрерывные функции $\bar{\varphi}_i(x), i=1, 2, \cdots, n$ и $\bar{g}(x)$ так чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\|\varphi_i(x)-\bar{\varphi}_i(x)\|<\varepsilon_2, \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

$$\|g(x)-\bar{g}(x)\|<\varepsilon_2. \tag{7}$$

Взяв функцию $\sigma(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i\bar{\varphi}_i(x)$, где $a_i (1\leqslant i\leqslant n)$ пока не определены, будем искать значения этих коэффициентов так, чтобы функция $\psi(x)=\bar{g}(x)+\sigma(x)+\varepsilon_2\gamma(x)$ была ортогональна всем $\varphi_i(x)$, $i=1, 2, \cdots, n$. Для определения этих коэффициентов получим следующую систему линейных уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\bar{\varphi}_i, \varphi_j)=b_j, \quad j=1, 2, \cdots, n, \tag{8}$$

где $b_j=-(\bar{g}+\varepsilon_2\gamma, \varphi_j)$. Покажем, что матрица D этой системы удовлетворяет условию (4).

$$|d_{ij}-a_{ij}|=|(\bar{\varphi}_i, \varphi_j)-(\varphi_i, \varphi_j)|<\|\varphi_j\|\cdot\|\bar{\varphi}_i-\varphi_i\|<\varepsilon_2<\delta.$$

Из этого следует, что можно воспользоваться условием (5) и система (8) имеет решение. Кроме того, из определения чисел b_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ и условия (7)

$$|b_i|=|(\bar{g}, \varphi_i)+\varepsilon_2(\gamma, \varphi_i)|\leqslant|(\bar{g}-g, \varphi_i)|+|(g, \varphi_i)|+\varepsilon_2|(\gamma, \varphi_i)|\leqslant$$

$$\leqslant\|\bar{g}-g\|\cdot\|\varphi_i\|+\varepsilon_2\|\gamma\|\cdot\|\varphi_i\|<2\varepsilon_2<\frac{\varepsilon_1}{n+2}. \tag{9}$$

Воспользовавшись формулой Крамера и условиями (5) и (9), получим

$$|a_j|=\frac{|\det d_j|}{|\det D|}<2\,|\det d_j|\leqslant 2\sum_{i=1}^{n}|b_i|\cdot|\det m_{ij}\,(D)|<\varepsilon_1. \tag{10}$$

Таким образом, для функции $\sigma\,(x)=\sum_{i=1}^{n}a_i\,\bar{\varphi}_i\,(x)$ из (10), (7) и (6) имеем

$$\|\sigma\,(x)\|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot\|\bar{\varphi}_i\,(x)\|<n\varepsilon_1\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|\bar{\varphi}_i\,(x)\|<n\varepsilon_1\,(1+\varepsilon_2)<2n\varepsilon_1. \tag{11}$$

Для $\psi\,(x)=\bar{g}\,(x)+\sigma\,(x)+\varepsilon_2\,\gamma\,(x)$ имеем из (7), (11) и (6)

$$\|\psi\,(x)\|\geqslant\|\bar{g}\,(x)\|-\|\sigma\,(x)\|-\varepsilon_2\,\|\gamma\,(x)\|>1-\varepsilon_2-2n\,\varepsilon_1-\varepsilon_2>$$

$$>1-\frac{\varepsilon_1}{n+2}-2n\varepsilon_1>1-3n\varepsilon_1=1-\frac{\varepsilon}{7}\,. \tag{12}$$

Обозначим $\beta=\dfrac{1}{\|\psi\,(x)\|}$ и рассмотрим функцию $\varphi_{n+1}\,(x)=\beta\,\psi\,(x)=$ $=f\,(x)+\nu\gamma\,(x)$, где $f\,(x)=\beta\bar{g}\,(x)+\beta\sigma\,(x)$ и $\nu=\beta\,\varepsilon_2$. Очевидно, что функция $f\,(x)$ непрерывна, $\varphi_{n+1}\,(x)$ ортогональна всем $\varphi_i\,(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, $\|\varphi_{n+1}\,(x)\|=1$. Осталось проверить, что $\|f\,(x)-g\,(x)\|<\varepsilon$ и $0<\nu<\varepsilon$.

Для этого оценим β. В (12) уже получено $\dfrac{1}{\beta}=\|\psi\,(x)\|>1-\dfrac{\varepsilon}{7}$, аналогично из (7) и (11) можно получить

$$\frac{1}{\beta}=\|\psi\,(x)\|\leqslant\|\bar{g}\,(x)\|+\|\sigma\,(x)\|+\varepsilon_2\,\|\gamma\,(x)\|<1+3n\,\varepsilon_1<1+\frac{\varepsilon}{7}\,, \tag{13}$$

то есть

$$\frac{7}{7+\varepsilon}<\beta<\frac{7}{7-\varepsilon},\ |1-\beta|<\frac{\varepsilon}{7-\varepsilon}\,. \tag{14}$$

Тогда из условий (7), (11), (14) и (6) следует, что

$$\|f\,(x)-g\,(x)\|=\|\beta\bar{g}\,(x)+\beta\sigma\,(x)-g\,(x)\|\leqslant\|\beta\bar{g}(x)+\beta\sigma\,(x)-\bar{g}\,(x)\|+\|\bar{g}(x)-$$

$$-g\,(x)\|<|1-\beta|\cdot\|\bar{g}\,(x)\|+\beta\,\|\sigma\,(x)\|+\varepsilon_2<\frac{\varepsilon}{7-\varepsilon}\,(1+\varepsilon_2)+\frac{7}{7-\varepsilon}\times$$

$$\times\,2n\,\varepsilon_1+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

Легко также видеть, что $\nu=\beta\varepsilon_2<\varepsilon$. Таким образом, первая часть леммы доказана.

Если же функция $g\,(x)$ непрерывна на некотором отрезке $[a,\ b]\subset\subset[0,1]$, а $\varphi_i\,(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ ограничены на $[a,\ b]$, то обозначив через $M>0$ верхнюю грань функций $g\,(x)$ и $\varphi_i\,(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ на этом отрезке, возьмем

$$0<\varepsilon_1\leqslant\min\left\{\frac{\varepsilon}{21n},\ \frac{\varepsilon}{6nM+4n}\right\} \tag{15}$$

и выберем функции $\bar{\varphi}_i(x)$ $(1\leqslant i<n)$ и $\bar{g}(x)$ так, чтобы они дополнительно условию (7) удовлетворяли также следующим соотношениям:

$$\bar{g}(x)=g(x) \text{ на отрезке } [a,\ b],$$

$$|\bar{\varphi}_i(x)|\leqslant M\ (1\leqslant i\leqslant n) \text{ на отрезке } [a\ ,b]. \tag{16}$$

Повторяя предыдущую конструкцию, найдем функцию $\varphi_{n+1}(x)=$ $=f(x)+\nu\gamma(x)$. Воспользовавшись тем, что $\varepsilon_1\leqslant\dfrac{\varepsilon}{6nM+4n}$ и $\varepsilon<1$, аналогично (14) получим

$$0<\beta<\frac{3M+2}{3M} \text{ и } |1-\beta|<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot \tag{17}$$

Тогда на отрезке $[a,\ b]$ из (16), (10) и (17) следует

$$f(x)-g(x)|=|\beta g(x)+\beta\gamma(x)-g(x)|\leqslant|1-\beta|\cdot M+\beta\sum_{i=1}^{n}|a_i|\cdot|\bar{\varphi}_i(x)|<$$

$$<|1-\beta|\cdot M+n\beta\varepsilon_1 M<\frac{\varepsilon}{2M}\cdot M+n\cdot\frac{3M+2}{3M}\cdot\frac{\varepsilon}{6nM+4n}\cdot M<\varepsilon.$$

Лемма 1 доказана.

Повторяя конструкцию, данную в предыдущей лемме соответствующее число раз, легко получить следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть заданы ОНС* $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\cdots,\ \varphi_n(x),\ g_1(x),\cdots$ $\cdots,\ g_m(x)$ *и функции* $\|\gamma_j(x)\|\leqslant1,\ j=1,\ 2,\cdots,\ m$, *определенные на отрезке* $[0,1]$, *тогда для произвольного* $\varepsilon>0$ *существуют функции* $\varphi_{n+j}(x)=f_j(x)+\nu_j\gamma_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ *такие, что* $f_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ *непрерывны на* $[0,1]$, $\|f_j(x)-g_j(x)\|<\varepsilon$ $(1\leqslant j\leqslant m)$, $0<\nu_j<\varepsilon$ *и система* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+m}$ *ортонормирована в* $L^2[0,1]$. *Если же* $g_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ *непрерывны на некотором* $[a,\ b]\subset[0,1]$, *а* $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ *ограничены на том же отрезке,* $f_j(x)$ *можно выбрать так, что* $|f_j(x)-$ $-g_j(x)|<\varepsilon$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ *на отрезке* $[a,\ b]$.

Замечание 1. Если взять $\gamma_j(x)\equiv0,\ j=1,\ 2,\cdots,\ m$, то $\varphi_{n+j}(x)\in C[0,1]$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ и $\|\varphi_{n+j}(x)-g_j(x)\|<\varepsilon$.

Лемма 3. *Если в* $L^2[0,1]$ *заданы:*

1° *ортонормальная система ограниченных функций* $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$,

2° *функции* $\|\gamma_j(x)\|\leqslant1,\ j=1,\ 2,\cdots$, *то для произвольных* $\varepsilon>0$ *и функции* $\tau(x)\in L^2[0,1]$ *существуют: натуральное число* m, *функции* $\varphi_{n+j}(x),\ j=1,\ 2,\cdots,m$, *многочлен* $P(x)$, *составленный из функций* $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n+m)$ *такие, что*

I $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n+m}$ *ОНС в* $L^2[0,1]$, II $\varphi_{n+j}(x) = f_j(x) + \nu_j \gamma_j(x)$, $j=1, 2\cdots, m$, *где* $f_j(x)$ *непрерывны на отрезке* $[0,1]$, *а числа* $\nu_j > 0$,

III $\sum\limits_{j=1}^{m} |f_j(x)|^q < \varepsilon$ *на* $\left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$ *при любом* $q > 2 + \dfrac{1}{n}$,

IV $\sum\limits_{j=1}^{m} \nu_j^2 < \varepsilon$,

V $\|P(x) - \tau(x)\| < \varepsilon$.

Доказательство. Можно ограничиться случаем $\varepsilon < 1$. Пусть

$$\tau(x) = \tau^*(x) + \tau^{**}(x), \tag{18}$$

где $\tau^*(x)$—полином по функциям $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$, а $\tau^{**}(x)$ ортогональна всем этим функциям. Систему $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ дополним функциями $\psi_1(x)$, $\psi_2(x), \cdots$ до ортонормальной полной в $L^2[0,1]$ системы. Разложим $\tau^{**}(x)$ в ряд по этому базису и возьмем достаточно много членов этого разложения так, чтобы полученный полином $\overline{Q}(x) = \sum\limits_{i=1}^{l_1} a_i \psi_i(x)$ удовлетворял соотношению

$$\|\overline{Q}(x) - \tau^{**}(x)\| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{19}$$

К системе функций $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x), \psi_1(x), \cdots, \psi_{l_1}(x)$ применим предыдущую лемму, взяв в ней соответствующий $\gamma_i(x) \equiv 0$, $i=1, 2, \cdots, l_1$. Получим ортонормальную систему функций $\varphi_1(x), \cdots, \varphi_n(x)$, $p_1(x), \cdots, p_{l_1}(x)$, в которой функции $p_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant l_1)$ непрерывны на $[0,1]$ (см. замечание 1) и

$$\|p_i(x) - \psi_i(x)\| < \frac{\varepsilon}{4\, a l_1}, \quad i=1, 2, \cdots, l_1, \tag{20}$$

где $a = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant l_1} |a_i|$. Взяв $Q(x) = \sum\limits_{i=1}^{l_1} a_i p_i(x)$, получим из (19) и (20)

$$\|Q(x) - \tau^{**}(x)\| \leqslant \|Q(x) - \overline{Q}(x)\| + \|\overline{Q}(x) - \tau^{**}(x)\| < \sum_{i=1}^{l_1} |a_i| \cdot \|p_i(x) - \psi_i(x)\| + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{21}$$

Можно было, воспользовавшись результатом Г. С. Шапиро [6], сразу же дополнить систему $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n}$ до полной ортонормальной системы непрерывными функциями, но для полноты изложения мы предпочли обратиться к замечанию 1.

Так как функции $p_i(x)$ $(1 \leqslant i \leqslant l_1)$ непрерывны на $[0,1]$, то существует число $R > 1$ такое, что

$$|p_i(x)| < R, \quad i=1, 2, \cdots, l_1. \tag{22}$$

Выберем натуральные числа k, t и l_2, число M таким образом

$$M=8l_1^3 R^3, \quad \frac{1}{2^{k-1}}<\varepsilon, \quad t>2\,(nk+n\log_2 M), \quad l_1+l_2=2^t. \tag{23}$$

Обозначим

$$m=l_1+l_2. \tag{24}$$

В пространстве $L^2\left[\frac{n}{n+1},\ 1\right]$ обозначим через H ортогональное дополнение линейного подпространства L, натянутого на функции $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$, $p_1(x),\cdots,p_{l_1}(x)$. Взяв произвольный ортонормальный базис в H выберем первые l_2 функции этого базиса и продолжим эти функции на [0,1], полагая их значения на $\left[0,\ \frac{n}{n+1}\right]$ равными нулю. Получим ортонормальную систему функций $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$, $p_1(x),\cdots,p_{l_1}(x)$, $p_{l_1+1}(x),\cdots,p_m(x)$ в $L^2[0,1]$, причем все функции $p_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ (24) непрерывны на $\left[0,\ \frac{n}{n+1}\right]$. К системе функций $\{p_i(x)\}_{i=1}^m$ применим ортонормальную матрицу Уолша A_t, которая определяется следующим способом:

$$A_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},$$

$$A_{t+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}A_t & A_t\\ A_t & -A_t\end{pmatrix}. \tag{25}$$

(Такое применение ортонормальных матриц с целью получения ПОНС функций $\{\varphi_n(x)\}$, для которых ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)|^{2+\varepsilon}$ равномерно сходится при любом $\varepsilon>0$ было предложено А. М. Олевским в работе [5]).

В полученной таким образом ортонормальной системе функций $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$, $g_1(x),\cdots,g_m(x)$, все $g_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant m)$ непрерывны на $\left[0,\ \frac{n}{n+1}\right]$. Заметим, что линейное пространство, натянутое на $\{g_i(x)\}_{i=1}^m$ содержит в себе линейное пространство, натятутое на $\{p_i(x)\}_{i=1}^{l_1}$. Из этого следует существование таких чисел c_i $(1\leqslant i\leqslant m)$, что

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{m}c_i g_i(x). \tag{26}$$

Кроме того, так как $p_{l_1+i}(x)=0$ $(1\leqslant i\leqslant l_2)$ на $\left[0,\ \frac{n}{n+1}\right]$, то на этом отрезке из (24), (25), (23) и (22) получим

$$|g_i(x)|=\left|\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\,p_j(x)\right|=\left|\sum_{j=1}^{l_1}a_{ij}\,p_j(x)\right|<\left(\sum_{j=1}^{l_1}|a_{ij}|^q\right)^{1/q}\times$$

$$\times\left(\sum_{j=1}^{l_1}|p_j(x)|^p\right)^{1/p}<\left(l_1\left(\frac{1}{\sqrt{2^l}}\right)^q\right)^{1/q}(l_1R^p)^{1/p}=\frac{l_1R}{\sqrt{2^l}}\cdot \tag{27}$$

На отрезке $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$, при $2+\frac{1}{n}<q<3$, вспомнив, что $R>1$, из (27) и (23) получим

$$\sum_{l=1}^{m}|g_l(x)|^q<m\cdot\frac{l_1^qR^q}{2^{\frac{l}{2}q}}<\frac{l_1^3R^3}{2^{\frac{l}{2}(q-2)}}<\frac{M}{8}\cdot\frac{1}{2^{(nk+n\log_2M)\frac{1}{n}}}=\frac{\varepsilon}{16}\cdot \tag{28}$$

Лемму 2 применим к системе $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$, $g_1(x),\cdots,g_m(x)$ и функциям $\gamma_j(x)$, $j=1,2,\cdots,m$, заданным в условии 2° доказываемой леммы, вспомнив, что все функции $g_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ непрерывны на отрезке $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$. Получим ОНС $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^{n+m}$, где

$$\varphi_{n+j}(x)=f_j(x)+\nu_j\gamma_j(x),\ j=1,2,\cdots,m, \tag{29}$$

$f_j(x)$ $(1\leqslant j\leqslant m)$ непрерывны на отрезке $[0,1]$,

$$|f_j(x)-g_j(x)|<\frac{\varepsilon}{4mc},\ 0<\nu_j<\frac{\varepsilon}{4mc},\ j=1,2,\cdots,m, \tag{30}$$

где $c=1+\max\limits_{1<l<m}|a_l|$ (26),

$$|f_j(x)-g_j(x)|<\frac{\varepsilon}{4mc},\ j=1,2,\cdots,m,\ \text{на отрезке}\ \left[0,\frac{n}{n+1}\right]\cdot \tag{31}$$

Построенная таким образом система функций $\{\varphi_l(x)\}_{l=1}^{n+m}$, многочлен

$$P(x)=\tau^*(x)+\sum_{l=1}^{m}c_l\,\varphi_{n+l}(x) \tag{32}$$

удовлетворяют всем условиям леммы. Проверим выполнение условия III. На отрезке $\left[0, \frac{n}{n+1}\right]$ при $2+\frac{1}{n}<q<3$ из (31), (28) и известного неравенства $|a+b|^q\leqslant 2^q(|a|^q+|b^q|)$ получим

$$\sum_{j=1}^{m}|f_j(x)|^q<\sum_{j=1}^{m}\left|g_j(x)+\frac{\varepsilon}{4mc}\right|^q<2^q\sum_{j=1}^{m}|g_j(x)|^q+2^qm\left(\frac{\varepsilon}{4mc}\right)^q<$$

$$<8\cdot\frac{\varepsilon}{16}+8m\left(\frac{\varepsilon}{4mc}\right)^2<\varepsilon. \tag{33}$$

А из того, что $\varepsilon<1$ следует выполнение этого неравенства при любом $q>2+\frac{1}{n}$. Проверим IV условие. Из (30) следует сразу, что

$$\sum_{j=1}^{m}\nu_j^2<m\left(\frac{\varepsilon}{4\,mc}\right)^2<\varepsilon.$$

Проверим выполнение условия V. Последовательно используя условия (32), (18), (29), (26), (21) и (30), получим

$$\|P(x)-\tau(x)\|=\left\|\tau^*(x)+\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_{n+i}(x)-\tau^*(x)-\tau^{**}(x)\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{m}c_i\varphi_{n+i}(x)-Q(x)\right\|+\|Q(x)-\tau^{**}(x)\|<\sum_{i=1}^{m}|c_i|\cdot\|f_i(x)-g_i(x)\|+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}|c_i|\cdot\nu_i\|\gamma_i(x)\|+\frac{\varepsilon}{2}<mc\cdot\frac{\varepsilon}{4mc}+mc\cdot\frac{\varepsilon}{4mc}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Лемма 3 доказана.

Построение системы, удовлетворяющей условиям основной леммы, уже очевидно. Возьмем счетное, всюду плотное в $L^2[0,1]$ множество функций $\tau_k(x)$, последовательность положительных чисел ε_k таких, что $\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon_k<\infty$, функции

$$\gamma_i(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\in e_i^1\\ 0, & \text{если } x\in e_i^2,\end{cases}\quad(i=1,2,\cdots)$$

где множества $\{e_i^1\}_1^{\infty}$ и $\{e_i^2\}_1^{\infty}$ удовлетворяют IV условию основной леммы. Построение системы $\{\varphi_n(x)\}$ осуществим последовательно, пачками.

Возьмем $\varphi_1(x)=\dfrac{\gamma_1(x)}{\|\gamma_1(x)\|}$. Предположим, что после k-ого шага выбраны первые n_k функций $\varphi_i(x)$ $(1\leqslant i\leqslant n_k)$, которые составляют ОНС и ограничены, опишем $k+1$-ый шаг. К имеющимся уже n_k функциям $\varphi_i(x)$ $(1<i\leqslant n_k)$ и функциям $\gamma_{n_k+i}(x)$ $(i>1)$ применим предыдущую лемму, взяв $\varepsilon=\varepsilon_k$, $\tau(x)=\tau_k(x)$. Обозначим $\nu_i(x)=\nu_i\gamma_i(x)$. Так как в результате применения леммы 3 вновь полученные функции $\varphi_i(x)$ $(n_k+1\leqslant i\leqslant n_{k+1})$ ограничены (следует из ограниченности функций $\gamma_i(x)$ $(i\geqslant 1)$, то ОНС $\{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{n_{k+1}}$ можно тем же способом дополнить новой пачкой функций и т. д. Система, удовлетворяющая условиям основной леммы, построена. Ее полнота следует из условия V леммы 3 и того, что множество функций $\{\tau_k(x)\}_1^{\infty}$ всюду плотно в $L^2[0,1]$. Проверим для построенной таким образом системы функций $\{\varphi_n(x)\}$ выполнение II условия основной леммы (остальные свойства этой системы непосредственно следуют из леммы 3). Возьмем произвольные $0<\alpha<1$, $q>2$ и выберем k_0 так, чтобы $\dfrac{n_{k_0}}{n_{k_0}+1}>\alpha$ и $q>2+\dfrac{1}{n_{k_0}}$, тогда воспользовавшись III условием леммы 3 получим на $[0,\alpha)$

$$\sum_{i=n_{k_0}+1}^{\infty}|f_i(x)|^q=\sum_{k=k_0}^{\infty}\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}}|f_i(x)|^q<\sum_{k=k_0}^{\infty}\varepsilon_k.$$

З а м е ч а н и е 2. Воспользовавшись замечанием А. М. Олевского (см. [5], теорема 5) можно, слегка изменив предыдущую конструкцию, получить аналогичный результат и для особенностей типа Вейля. Именно, справедлива

Т е о р е м а 2. *Для произвольной последовательности* $\omega(n) \to \infty$ *существует полная ортонормальная система* $\{\varphi_n(x)\}$ *такая, что коэффициенты Фурье любой функции* $f(x) \in L^2[0,1]$ $(f \,\overline{\sim}\, 0)$, *непрерывной хотя бы в одной точке отрезка* $[0,1]$, *удовлетворяют условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\, \omega(n) = \infty.$$

В заключение автор выражает благодарность Ф. Г. Арутюняну за постановку задачи и ценные советы.

Ереванский государственный
университет

Поступила 15.I.1981

Վ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ. Կարլեմանի եզակիությունը գոնե մեկ կետում անընդհատ ֆունկցիաների համար (*ամփոփում*)

Եթե $\{\varphi_n(x)\}$*-ը օրթոնորմավորված լրիվ սիստեմ է* $L^2[0,1]$*-ում, ապա, ինչպես հայտնի է, կամայական* $f(x) \in L^2[0,1]$ *ֆունկցիայի Ֆուրյեի գործակիցների համար* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$։ *Բայց եթե* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p = \infty$, *բոլոր* $p < 2$ *համար, ապա ասում են, որ* $f(x)$ *ֆունկցիան ունի Կարլեմանի եզակիություն* $\{\varphi_n(x)\}$ *օրթոնորմավորված լրիվ սիստեմում։*

Տվյալ աշխատանքում $L^2[0,1]$ *-ում կառուցված է օրթոնորմավորված ֆունկցիաների լրիվ սիստեմ, ըստ որի* $L^2[0,1]$*-ի կամայական ֆունկցիա, որն անընդհատ է* $[0,1]$ *հատվածի գոնե մեկ կետում* $(f \,\overline{\sim}\, 0)$, *ունի Կարլեմանի եզակիություն ըստ այդ սիստեմի։*

V. M. MANUKIAN. *The Carleman singularity for at least at one point continuous functions* (summary)

If $\{\varphi_n(x)\}$ is an orthonormal complete system in the $L^2[0,1]$, then, for the Fourier coefficients of the arbitrary function $f(x) \in L^2[0,1]$ we have $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 < \infty$.

But if we have

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^p = \infty \text{ for all } p < 2,$$

then, the function $f(x)$ is said to have the Carleman singularity in the orthonormal complete system.

In this paper a complete system of functions orthogonal in the $L^2[0,1]$ is constructed, with respect to which, any function from $L^2[0,1]$ $(f \,\overline{\sim}\, 0)$, which is continuous at least at one point of the segment $[0,1]$, has the Carleman singularity with respect to this system.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, Физматгиз, М., 1961.
2. *С. Качмаж, Г. Штейнгауз.* Теория ортогональных рядов, Физматгиз, М.,1958.
3. *П. Л. Ульянов.* Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов, УМН, 19, вып. 1, 1964, 3—69.
4. *А. М. Олевский.* О расходимости ортогональных рядов и о коэффициентах Фурье непрерывных функций по полным системам, Сиб. матем. ж., IV, № 3, 1963, 647—656.
5. *А. М. Олевский.* Об особенностях типа Карлемана для полных ортонормальных систем, Сиб. матем. ж., VIII, № 4, 1967, 807—826.
6. *H. S. Shapiro.* Incomplete orthogonal families and related question on an orthogonal matrix, Michigan Math. J., 11, № 1, 1964, 15—18.