ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 6, 1981 Математика

А. В. БАХШЕЦЯН

ОБ $U(\varepsilon)$-МНОЖЕСТВАХ ПОЛНОЙ МЕРЫ ДЛЯ СИСТЕМЫ УОЛША

Для ортонормированной на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ подмножество $E\subset[a, b]$ называется U-множеством, если из условия

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n (x) = 0 \text{ для любого } x \in E^c \tag{1}$$

$(E^c=[a, b]\setminus E)$ следует, что $c_n=0$ при всех n.

Хорошо известно (см. [1], [2]), что для тригонометрической системы и системы Уолша любое счетное подмножество отрезка ортогональности является U-множеством и не всякое подмножество нулевой меры является таковым, а в силу принципа локализации ни одно подмножество положительной меры не является U-множеством для этих систем.

Определение. *Для $\varepsilon_n \downarrow 0$ подмножество $E\subset[a, b]$ называется $U(\varepsilon)$-множеством для ортонормированной на $[a, b]$ системы $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$, если из условий*

$$c_n = O(\varepsilon_n) \tag{2}$$

и (1) следует, что $c_n=0$ при всех n.*

А. Зигмундом было показано (см. [7], стр. 549—551), что для любой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$ существует подмножество $E \subset [0, 2\pi]$ $(\mu E>0)$, являющееся $U(\varepsilon)$-множеством для тригонометрической системы и был поставлен вопрос о существовании $U(\varepsilon)$-множеств меры 2π.

Положительный ответ на этот вопрос дается в работах Ж.—П. Кахана и И. Кацнельсона (см. [8]). Аналог теоремы А. Зигмунда для системы Уолша-Пэли был установлен В. Шапиро (см. [9]).

В данной работе устанавливается аналог теоремы Ж.—П. Кахана и И. Кацнельсона для системы Уолша (при любом порядке внутри „пачек").

Рассмотрим ряд по системе Уолша—Пэли $\{w_l(x)\}_{l=0}^{\infty}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n (x). \tag{3}$$

Частичные суммы этого ряда обозначим через $S_m (x)$:

* Если же в этом определении условие (2) заменить на $\{c_n\}\in l^p$ (при фиксированном $p>1$), то получим определение U_p-множеств (в этой связи см. работы [3]—[6]).

$$S_m(x)=\sum_{n=0}^{m-1} c_n w_n(x).$$

Мы докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любой последовательности* $\{\varepsilon_l\}_{l=0}^{\infty}$ ($\varepsilon_l>0$, $\lim \varepsilon_l=0$) *существует множество A меры нуль такое, что если коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяют условию* (2) *и для какого-либо счетного множества X*

$$\lim S_{2^k}(x)=0 \text{ на } A\setminus X, \qquad (4)$$

то $c_n=0$ для всех n.

При доказательстве теоремы 1 наряду с другими соображениями мы будем пользоваться некоторыми элементами техники, восходящей к работам А. Райхмана и Н. К. Бари (см. [7], стр. 547—551), которые применялись ранее в подобных ситуациях в работах [8], [9] (см. также [10]).

С другой стороны справедлива

Теорема 2. *Для любой монотонной последовательности*

$$\{\varepsilon_n\}_{n=0}^{\infty}\left(\lim \varepsilon_n=0,\ \sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n=+\infty\right)$$

и для любого счетного множества $F\subset[0,1]$ существует ненулевая последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (2) *и такая, что для любого $x\in F$*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n w_n(x)=0^*.$$

В связи с этой теоремой отметим, что если брать по одной функции из каждой „пачки", то для полученной подсистемы существует U-множество со счетным дополнением, а вообще любая ортонормированная на $[a, b]$ система $\{\varphi_n\}$, удовлетворяющая условию $\overline{\lim}\int_a^b|\varphi_n(x)|\,dx>0$, содержит подсистему, имеющую U-множество с дополнением нулевой меры (см. [11]).

При доказательстве теоремы 1 мы можем предположить, что для любого $k\geqslant 0$

$$\varepsilon_{2^k}=\varepsilon_{2^k+1}=\cdots=\varepsilon_{2^{k+1}-1}=a_k. \qquad (5)$$

В противном случае мы могли бы последовательность $\{\varepsilon_l\}$ заменить на $\{\varepsilon_i'\}$, где $\varepsilon_i'=\max\limits_{2^k\leqslant j<2^{k+1}}\varepsilon_j$ при $2^k\leqslant i<2^{k+1}$.

* Заметим, что существуют равномерно ограниченные полные ортонормированные системы непрерывных функций с U-множествами, имеющими счетное дополнение (см. [5]).

Далее мы будем считать фиксированным последовательность $\{\varepsilon_l\}$, удовлетворяющую условию (5).

Обозначим

$$B_s = \{t \in (0,1):\ r_s(t) = 1\} \quad (s = 0,1,\cdots),$$

где $\{r_s(t)\}$ — система Радемахера.

Пусть, далее, числа $n_k^{(m)}$ такие, что

$$a_{n_k^{(m)}} \leqslant \frac{1}{m4^k} \quad (k = 0,1,\cdots;\ m = 1, 2,\cdots), \tag{6}$$

причем потребуем, чтобы последовательность $\{n_k^{(m)}\}_{k=0}^{\infty}$ при каждом фиксированном m была строго возрастающей. Заметим также, что

$$\lim_{m\to\infty} n_k^{(m)} = \infty \text{ при любом } k. \tag{7}$$

Рассмотрим множества

$$U_{m,p} = \bigcap_{k=0}^{m+p} B_{n_k^{(m)}},\quad A_p = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_{m,p},\quad A = \bigcap_{p=0}^{\infty} A_p,$$

$$U_m = \bigcap_{k=0}^{\infty} B_{n_k^{(m)}},\quad B = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m \quad (m = 1, 2,\cdots;\ p = 0, 1,\cdots).$$

В силу (6) и определения множеств B_s имеем

$$\mu U_{m,p} = \frac{1}{2^{m+p+1}},\quad \mu A_p \leqslant \frac{1}{2^{p+1}},\quad \mu A = 0.$$

Очевидно также, что $B \subset A$. Зафиксируем некоторое счетное множество $X \subset [0,1]$.

Мы докажем, что множество A удовлетворяет требованиям теоремы 1. Но прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, установим следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяют условию* (2) *и*

а) $\lim\limits_{k\to\infty} S_{2^k}(x) = 0$ *на* $B \setminus X$,

б) $|S_{2^k}(x)| < C$ *на* $B \setminus X$ *при любом* k,

то $c_n = 0$ *для всех* n.

Лемма 2. *Если коэффициенты ряда* (3) *удовлетворяют условию* (2) *и для некоторого* $p > 0$

$$\lim_{k\to\infty} S_{2^k}(x) = 0 \text{ на } A_p \setminus X,$$

то $c_n = 0$ *для всех* n.

Доказательство леммы 1. Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. Пусть для некоторого M

$$|c_n| < M\varepsilon_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots). \tag{8}$$

Зафиксируем также $m > \dfrac{2M}{\delta}$.

Каждую двоично-иррациональную точку отрезка [0,1] можно единственным образом представить в виде суммы ряда

$$x=\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x_i}{2^{i+1}},\ x_i = 0 \text{ или } 1. \tag{9}$$

Определим отображение T множества J двоично-иррациональных точек [0,1] в U_m следующим образом: $Tx=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{t_i}{2^{i+1}}$, где

$$t_i=\begin{cases} 0, & \text{при } i=n_k^{(m)} \\ x_{i-k}, & \text{при } n_{k-1}^{(m)} < i < n_k^{(m)}, \end{cases}$$

$k=0, 1,\cdots$, $(n_{-1}^{(m)}=-1)$. Легко проверить, что $Tx\in U_m$ и отображение T взаимно-однозначно.

Пусть

$$\tilde{w}_i(x) = \begin{cases} w_i(Tx), & \text{при } x\in J \\ 0, & \text{при } x\in[0,\ 1]\setminus J, \end{cases}$$

$i=0, 1,\cdots$.

Нетрудно показать, что для любого i $\tilde{w}_i(x)$ почти всюду совпадает с некоторой функцией системы Уолша. Действительно, пусть $i=2^{l_0}+2^{l_1}+\cdots+2^{l_j}$. Тогда при $x\in J$

$$\tilde{w}_i(x) = w_i\ (Tx) = \prod_{k=0}^{j} r_{l_k}(Tx).$$

Но если x имеет вид (9), то

$$r_i\ (Tx) = \begin{cases} 1, & \text{при } i=n_k^{(m)} \\ (-1)^{x_{i-k}}=r_{i-k}(x), & \text{при } n_{k-1}^{(m)} < i < n_k^{(m)}, \end{cases}$$

$k=0, 1,\cdots$, Отсюда также получаем, что $\tilde{w}_i(x)=w_0(x)$ п.в. только тогда, когда либо $i=0$, либо i имеет вид

$$2^{n_{k_0}^{(m)}}+2^{n_{k_1}^{(m)}}+\cdots+2^{n_{k_j}^{(m)}}. \tag{10}$$

Рассмотрим последовательность

$$\varphi_k(x) = S_{2^k}(Tx) = \sum_{n=0}^{2^k-1} c_n\,\tilde{w}_n(x),$$

$k=0, 1,\cdots$. Из условий леммы 1 имеем, что п.в. на [0,1]

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x)=0 \text{ и } |\varphi_k(x)|<C \text{ для любого } k.$$

Отсюда следует, что

$$0=\lim_{k\to\infty}\int_0^1 \varphi_k(x)\,dx=\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{2^k-1} c_n\int_0^1 \overline{w}_n(x)\,dx=c_0+\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_n c_n\Big), \tag{11}$$

где внутренняя сумма берется по всем n, для которых $[\log_2 n]=n_k^{(m)}$ и которые имеют вид (10). Но количество таких n равно 2^k. Следовательно, в силу (6), (8) и (11), имеем

$$|c_0|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty} 2^k M\alpha_{n_k^{(m)}}\leqslant\frac{M}{m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{2M}{m}<\delta.$$

В силу произвольности δ, отсюда заключаем, что $c_0=0$.

Пусть теперь $n_0>1$. Рассмотрим последовательность

$$\widetilde{S}_{2^k}(x)=w_{n_0}(x)\,S_{2^k}(x)\ (k=0,1,\cdots). \tag{12}$$

Очевидно при $k>[\log_2 n_0]$ $\widetilde{S}_{2^k}(x)$ — есть полином по системе Уолша вида

$$\widetilde{S}_{2^k}(x)=\sum_{n=0}^{2^k-1}\widetilde{c}_n\,w_n(x),$$

где

$$\widetilde{c}_n=c_{n\dot{+}n_0}. \tag{13}$$

(Напомним, что операция $\dot{+}$ определяется следующим образом: $n\dot{+}m=l$, если $w_n(x)\,w_m(x)=w_l(x)$).

Пусть $[\log_2 n]>[\log_2 n_0]$. Тогда $[\log_2(n\dot{+}n_0)]=[\log_2 n]$ и

$$\{\widetilde{c}_i:\ i=2^k, 2^k+1,\cdots, 2^{k+1}-1\}=\{c_i:\ i=2^k, 2^k+1,\cdots, 2^{k+1}-1\} \tag{14}$$

при $k>[\log_2 n]$.

Из (12), (5) и (14) следует, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{c}_n\,w_n(x)$ также удовлетворяет условиям леммы 1 и, следовательно, в силу доказанного выше $\widetilde{c}_0=0$. Но из (13) следует, что $c_{n_0}=\widetilde{c}_0$. Итак $c_n=0$ для любого n. Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2. Зафиксируем произвольное $m\geqslant 1$. Докажем, что $S_{2^k}(x)=0$ на $U_{m,p}$ для любого k.

Нетрудно заметить, что характеристическая функция множества $U_{m,p}$ всюду, за исключением некоторых двоично-рациональных точек, совпадает с функцией

$$\lambda(x)=\prod_{k=0}^{m+p}\frac{1+r_{n_k^{(m)}}(x)}{2}=\sum_{l=0}^{s}\gamma_l w_l(x),$$

где $s=2^{n_{m+p}^{(m)}+1}-1$ и

$$\sum_{l=0}^{s}|\gamma_l|=1. \tag{15}$$

Отсюда получаем, что для $k>n_{m+p}^{(m)}$

$$\lambda(x)\,S_{2^k}(x)=\sum_{l=0}^{s}\gamma_l\sum_{n=0}^{2^k-1}c_n w_{n\dotplus l}(x)=$$

$$=\sum_{l=0}^{s}\gamma_l\sum_{n=0}^{2^k-1}c_{n\dotplus l}w_n(x)=\sum_{n=0}^{2^k-1}a_n w_n(x),$$

где $a_n=\sum_{l=0}^{s}\gamma_l c_{n\dotplus l}$. Но в силу (15) имеем

$$\max_{2^k<n<2^{k+1}}|a_n|\leqslant\max_{2^k<n<2^{k+1}}|c_n| \text{ при } k>n_{m+p}^{(m)}$$

и, так как

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{2^k-1}a_n w_n(x)=0 \text{ на } [0,1]\setminus X,$$

то получаем (см. [10], а также [12]), что $a_n=0$ для любого n. Отсюда имеем, что для любых k и $x\in[0,1]$

$$\lambda(x)\,S_{2^k}(x)=0.$$

Но при $x\in U_{m,p}$ $\lambda(x)\,S_{2^k}(x)=S_{2^k}(x)$.

Итак, $S_{2^k}(x)=0$ на A_p при всех $k\geqslant 0$. А это значит, что ряд (3) удовлетворяет условиям леммы 1. Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Обозначим

$$N=\{t\in[0,1],\ \overline{\lim_{k\to\infty}}\,|S_{2^k}(t)|\geqslant 1\}.$$

Множество N можно представить в виде $N=N_0\cup P$, где N_0 — множество типа G_δ, а P—некоторое, не более чем счетное множество двоично-рациональных точек. Далее, допустим, что

$$N_1=N_0\setminus X\neq\varnothing. \tag{16}$$

(Заметим, что N_1 также есть множество типа G_δ). Так как $N_1\subset A^c=\bigcup_{p=0}^{\infty}A_p^c$, то (см. [7], стр. 548) существуют $p>0$ и двоичный интервал $\Delta\subset[0,1]$ $\left(\text{т. е. интервал вида }\left(\frac{l}{2^n},\frac{l+1}{2^n}\right)\right)$ такие, что

$$\Delta \cap N_1 \subset \Delta \cap A_p^c. \tag{17}$$

Из (7) имеем, что A_p — всюду плотное открытое множество. Следовательно, для любой точки $x \in \Delta \cap A_p$ существует двоичный интервал Δ_x такой, что

$$x \in \Delta_x \subset \Delta \cap A_p. \tag{18}$$

Очевидно, существует полином (разложение характеристической функции интервала Δ_x по системе Уолша)

$$\varphi(t) = \sum_i \beta_i w_i(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \in \Delta_x \\ 0, & \text{при } t \bar{\in} \bar{\Delta}_x, \end{cases}$$

где $\sum_i |\beta_i| = 1$.

Рассуждениями, аналогичными приводимым при доказательстве леммы 2, получаем, что для достаточно больших k

$$\varphi(t) S_{2^k}(t) = \sum_{n=0}^{2^k-1} a_n w_n(t),$$

где коэффициенты a_n также удовлетворяют условию (2). С другой стороны, так как, в силу (17) и (18), пересечение множеств $\operatorname{supp} \varphi(t) = \Delta_x$ и N не более чем счетно, то имеем

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \left| \sum_{n=0}^{2^k-1} a_n w_n(t) \right| < 1$$

всюду, за исключением некоторого счетного множества. Отсюда, по теореме В. А. Скворцова (см [13], теорему 4), получаем, что $\sum a_n w_n(t)$ есть ряд Фурье некоторой ограниченной функции. Следовательно, последовательность $\{\varphi(t) S_{2^k}(t)\}$ равномерно ограничена и в силу леммы 1 $\varphi(t) S_{2^k}(t) = 0$ для любого k. Но при $t \in \Delta_x$ $\varphi(t) S_{2^k}(t) = S_{2^k}(t)$. Итак, мы получили, что при всех k $S_{2^k}(x) = 0$ на $\Delta \cap A_p$.

Аналогично, рассматривая последовательность $\{\psi(x) S_{2^k}(x)\}$, где $\psi(x)$ — полином по системе Уолша, равный единице на Δ и нулю на $\bar{\Delta}^c$, и используя лемму 2, получим, что при всех k

$$S_{2^k}(x) = 0 \text{ на } \Delta.$$

Но это противоречит условию (16). Следовательно $N \subset X \cup P$.

Итак, мы получили, что $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} |S_{2^k}(x)| < 1$ всюду, за исключением счетного множества. Из той же теоремы В. А. Скворцова вытекает, что (3) есть ряд Фурье ограниченной функции. Отсюда по лемме 1 получаем, что $c_n = 0$ при любом n. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание. *Из доказательства видно, что утверждение теоремы остается в силе при любом порядке системы Уолша внутри „пачек“.*

Выше мы заметили, что каждая двоично-иррациональная точка отрезка [0,1] единственным образом представляется в виде (9). Если же x—двоично-рациональна $\left(\text{т. е. имеет вид } x=\frac{m}{2^n}\right)$, то это представление не однозначно. Точнее, в этом случае

$$x=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{x_l'}{2^{l+1}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{x_l''}{2^{l+1}}, \tag{19}$$

где начиная с некоторого номера $x_l'=0$, а $x_l''=1$. Далее, из определения системы Уолша—Пэли имеем, что при $n=\sum_{l=0}^{k} n_l 2^l$ ($n_l=0$ или 1) для двоично-иррациональных точек x

$$w_n(x)=(-1)^{\sum_{l=0}^{k} n_l x_l},$$

а для двоично-рациональных x

$$w_n(x+0)=(-1)^{\sum_{l=0}^{k} n_l x_l'}, \quad w_n(x-0)=(-1)^{\sum_{l=0}^{k} n_l x_l''}$$

и

$$w_n(x)=\frac{1}{2}\left[w_n(x+0)+w_n(x-0)\right]$$

$$(w_n(0)=w_n(0+0),\ w_n(1)=w_n(1-0)),$$

где последовательности $\{x_l\}$, $\{x_l'\}$ и $\{x_l''\}$ определяются из равенств (9) и (19).

Следуя работе [10], мы вместо точек отрезка [0,1] будем рассматривать соответствующие им двоичные последовательности.

Для двоичных последовательностей $x=(x_0, x_1, \cdots)$ и $y=(y_0, y_1, \cdots)$ определим сложение $\dot{+}$: $x\dot{+}y=(x_0\dot{+}y_0, x_1\dot{+}y_1, \cdots)$.

Тем самым, множество X двоичных последовательностей можно рассматривать как векторное пространство над конечным полем $Z_2=\{0,1\}$ классов вычетов по mod 2.

Из сказанного выше видно, что для доказательства теоремы 2 достаточно установить следующее утверждение.

Теорема 2′. *Пусть $\{\varepsilon_l\}_{l=0}^{\infty}$ — произвольная монотонно стремящаяся к нулю последовательность, причем $\sum_{l=0}^{\infty}\varepsilon_l=+\infty$. Тогда для любой счетной последовательности векторов $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ ($x^{(m)}\in X$, $m=0,1,\cdots$) существует ненулевая последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющая условию (2) и такая, что для любого m*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (-1)^{<n,\, x^{(m)}>} = 0,$$

где

$$<n,\, x^{(m)}> = n_0 x_0^{(m)} \dot{+} n_1 x_1^{(m)} \dot{+} \cdots \dot{+} n_{k_n} x_{k_n}^{(m)},\; k_n = [\log_2 n],$$

$$\sum_{l=0}^{k_n} n_l 2^l = n.$$

При доказательстве теоремы 2′ мы можем предположить, что последовательность $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$x^{(m)} \neq x^{(n)} \text{ при } m \neq n;\; x^{(0)} = 0\; (=(0,0,\cdots))$$

при $m = 2^{i_0} + 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_k}$ $(i_0 < i_1 < \cdots < i_k)$,

$$x^{(m)} = x^{(2^{i_0})} \dot{+} x^{(2^{i_1})} \dot{+} \cdots \dot{+} x^{(2^{i_k})}. \tag{20}$$

В противном случае мы могли бы этого достичь добавлением новых векторов и, быть может, их перенумерованием.

Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть последовательность* $\{\varepsilon_l\}_{l=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям теоремы 2′, а* $\{y^{(m)}\}_{m=0}^{l}$ *— произвольный набор линейно независимых векторов из* X. *Тогда для любых* δ_m ($\delta_m = 0$ *или* 1, $m = 0,1,\cdots, l$)

$$\sum_{l \in \Omega} \varepsilon_l = +\infty,$$

где $\Omega = \{i\colon <i,\, y^{(m)}> = \delta_m,\; m = 0,1,\cdots, l\}$.

Лемма 4. *Пусть* $\{\varepsilon_l\}_{l=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям теоремы 2′, а* $\{x^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ *— соотношениям* (20). *Тогда для любых* k, n, p ($2^k \leqslant p < 2^{k+1}$) *и для любых* $\rho > 0$ *и* α *существуют* $N > n$ *и коэффициенты* c_l ($i = n,\, n+1, \cdots, N$) такие, что

$$|c_l| \leqslant \varepsilon_l \tag{21}$$

$(i = n,\, n+1, \cdots, N)$;

$$\sum_{l=n}^{N} c_l (-1)^{<l,\, x^{(s)}>} = \begin{cases} 0, \text{ при } 0 < s < 2^{k+1},\; s \neq p \\ \alpha, \text{ при } s = p \end{cases} \tag{22}$$

и

$$\max_{\substack{n < m < N \\ s < 2^k}} \left| \sum_{l=n}^{m} c_l (-1)^{<l,\, x^{(s)}>} \right| < \rho. \tag{23}$$

Доказательство леммы 3. Пусть i_0 такое, что $y_{i_0}^{(0)} = 1$. Существование i_0 вытекает из линейной независимости $\{y^{(m)}\}_{m=0}^{l}$. Мы можем предположить, что $y_{i_0}^{(m)} = 0$ для любого $m \geqslant 1$. Действительно, в противном случае мы могли бы вместо векторов $y^{(m)}$ $(m = 0,1,\cdots, l)$ взять

$$\tilde{y}^{(0)}=y^{(0)},\ \tilde{y}^{(m)}=\begin{cases} y^{(m)}, & \text{если } y^{(m)}_{i_0}=0\\ y^{(0)}+y^{(m)}, & \text{если } y^{(m)}_{i_0}=1\end{cases}$$

$(m=1,2,\cdots,l)$, а вместо δ_m $(m=0,1,\cdots)$ числа

$$\tilde{\delta}_0=\delta_0,\quad \tilde{\delta}_m=\begin{cases}\delta_m & \text{при } y^{(m)}_{i_0}=0\\ \delta_0+\delta_m & \text{при } y^{(m)}_{i_0}=1\end{cases}$$

$(m=1,\ 2,\cdots,\ l)$.

Аналогичным образом можем предположить, что существуют числа $i_1,\ i_2,\cdots,\ i_l$ такие, что для любого $k\geqslant 1$

$$y^{(k)}_{i_k}=1 \text{ и } y^{(m)}_{i_k}=0 \text{ при } m>k+1.$$

Пусть $p=\max\limits_{0<k<l} i_k$. Докажем, что для любого n существует $q\in\Omega$ такое, что

$$n2^{p+1}\leqslant q<(n+1)\,2^{p+1}. \tag{24}$$

Действительно. Выберем $q_l\in Z_2$ так, чтобы число $i=n2^{p+1}+q_l\,2^{i_l}$ удовлетворяло равенству $\langle i,\ y^{(l)}\rangle=\delta_l$.

Далее, если числа q_i $(i=l,\ l-1,\cdots,\ k+1)$ уже выбраны, то выберем $q_k\in Z_2$ так, чтобы число

$$i=n\ 2^{p+1}+q_l\ 2^{i_l}+q_{l-1}\,2^{i_{l-1}}+\cdots+q_k\,2^{i_k}$$

удовлетворяло равенству $\langle i,\ y^{(k)}\rangle=\delta_k$.

Легко проверить, что в силу выбора чисел i_k $(k=0,1,\cdots,\ l)$ и p число

$$q=n\,2^{p+1}+\sum_{k=0}^{l}q_k\,2^{i_k}$$

принадлежит Ω и удовлетворяет (24). А отсюда, используя монотонность последовательности $\{\varepsilon_l\}$ и расходимость ряда $\sum\varepsilon_l$ легко получить утверждение леммы 3. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Очевидно, не нарушая общности, можно предположить, что $\alpha>0$. Обозначим

$$y^{(m)}=\begin{cases} x^{(2^m)}, & m=0,1,\cdots,\ k-1\\ x^{(p)}, & m=k.\end{cases}$$

Из соотношений (20) следует, что вектора $y^{(m)}$ $(m=0,1,\cdots,\ k)$ линейно независимы.

Пусть j $(0\leqslant j<2^{k+1})$ имеет вид:

$$j=\sum_{m=0}^{k}\delta^{(j)}_m\,2^m. \tag{25}$$

Положим $\Omega_j=\{i:\ \langle i,\ y^{(m)}\rangle=\delta^{(j)}_m,\ m=0,1,\cdots,\ k\}$..

Далее, для конечных подмножеств натуральных чисел Ω и Ω' будем писать $\Omega<\Omega'$, если $\max\{i:i\in\Omega\}<\min\{i:i\in\Omega'\}$. Зафиксируем целое $r>\alpha/\rho$.

Применяя лемму 3, мы можем последовательно строить конечные подмножества

$$\{n\} < \Omega_0^1 < \Omega_1^1 < \cdots < \Omega_{2^{k+1}-1}^1 < \Omega_0^2 < \Omega_1^2 < \cdots < \Omega_{2^{k+1}-1}^2 < \cdots <$$
$$< \Omega_0^r < \Omega_1^r < \cdots < \Omega_{2^{k+1}-1}^r$$

и найти коэффициенты

$$c_i \left(|c_i| \leqslant \varepsilon_i, \ i \in \bigcup_{l=1}^{r} \bigcup_{j=0}^{2^{k+1}-1} \Omega_j^l \right)$$

со следующими свойствами:

$$\Omega_j^l \subset \Omega_j \quad (l = 1, 2, \cdots, r; \ j = 0, 1, \cdots, 2^{k+1} - 1); \tag{26}$$

$$c_i > 0, \text{ при } i \in \bigcup_{0<j<2^k} \Omega_j^l \text{ и } c_i < 0, \text{ при } i \in \bigcup_{2^k < j < 2^{k+1}} \Omega_j^l \tag{27}$$
$$(l = 1, 2, \cdots, r):$$

для любых l и j

$$\left| \sum_{i \in \Omega_j^l} c_i \right| \doteq \frac{\alpha}{2^k r}. \tag{28}$$

Положим $N = \max \{ i : i \in \Omega_{2^{k+1}-1}^r \}$ и $c_i = 0$ при

$$n \leqslant i < N, \ i \overline{\in} \bigcup_{l=1}^{r} \bigcup_{j=0}^{2^{k+1}-1} \Omega_j^l.$$

Покажем, что коэффициенты c_i $(i = n, n+1, \cdots, N)$ удовлетворяют требованиям леммы 4. Действительно, условие (21) очевидно. Докажем (22). При $s = 0$ имеем

$$\sum_{i=n}^{N} c_i (-1)^{<i, x^{(0)}>} = \sum_{i=n}^{N} c_i = \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} \sum_{i \in \Omega_j^l} c_i.$$

Но в силу (27) и (28) имеем при любом l

$$\sum_{j=0}^{2^{k+1}-1} \sum_{i \in \Omega_j^l} c_i = 0.$$

Пусть $s \geqslant 1$ и $x^{(s)}$ имеет вид

$$x^{(s)} = y^{(m_1)} \dotplus y^{(m_2)} \dotplus \cdots \dotplus y^{(m_{l_s})} \quad (m_1 < m_2 < \cdots m_{l_s} \leqslant k).$$

Тогда

$$\sum_{i=n}^{N} c_i (-1)^{<i, x^{(s)}>} = \sum_{l=1}^{r} \sum_{j=0}^{2^{k+1}} \sum_{i=\Omega_j^l} c_i (-1)^{<i, y^{(m_1)}>} \dotplus \cdots \dotplus < i, \ y^{(m_{l_s})}>.$$

Но в силу (26)

$$\sum_{l\in\Omega_j^l} c_l(-1)^{<l,\,y^{(m_1)}>\dot{+}\cdots\dot{+}<l,\,y^{(m_{i_s})}>}=(-1)^{\delta_{m_1}^{(j)}\dot{+}\cdots\dot{+}\delta_{m_{i_s}}^{(j)}}\sum_{l\in\Omega_j^l} c_l\,,$$

где $\delta_{m_i}^{(j)}$ $(i=1, 2,\cdots i_s)$ определяются из равенства (25). Отсюда, учитывая (28) и (27), получаем для любого l

$$\sum_{j=0}^{2^k-1}\sum_{l\in\Omega_j^l} c_l\,(-1)^{<l,\,x^{(s)}>}=\frac{a}{2^k\,r}\sum_{j=0}^{2^k-1}(-1)^{\delta_{m_1}^{(j)}\dot{+}\cdots\dot{+}\delta_{m_{i_s}}^{(j)}}. \tag{29}$$

Но легко проверить, что последняя сумма равна 2^k при $m_1=k$ (т. е. при $s=p$) и нулю при $m_1<k$. Аналогично можно получить, что для любого l

$$\sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{l\in\Omega_j^l} c_l(-1)^{<l,\,x^{(s)}>}=\begin{cases}0, & \text{при } s\neq p\\ \dfrac{a}{r}, & \text{при } s=p\end{cases} \tag{30}$$

Этим доказывается соотношение (22). Из (29) и (30) получаем также, что

$$\max_{\substack{n<m<N\\ s<2^k}}\left|\sum_{l=n}^{m} c_l\,(-1)^{<l,\,x(s)>}\right|=\sum_{j=0}^{2^k-1}\sum_{l\in\Omega_j^l} c_l=\frac{a}{r}<\rho.$$

Итак, лемма 4 полностью доказана.

Из этой леммы легко получить утверждение теоремы 2′. Действительно, возьмем $c_0=\varepsilon_0$. Предположим, что коэффициенты c_n, $n=0,1,\cdots, n_j$ $(j\geqslant 1,\ n_1=0)$ уже выбраны так, что для любого $i\leqslant n_j$ имеет место (21) и

$$\sum_{l=0}^{n_j} c_l\,(-1)^{<l,\,x^{(s)}>}=0,\ \text{при } 0\leqslant s<2^{j-1}.$$

Найдем числа $\{N_i\}_{i=1}^{2^{j-1}}$, $n_j=N_0<N_1<\cdots<N_{2^{j-1}}=n_{j+1}$ и коэффициенты $\{c_l\}_{l=n_j+1}^{n_{j+1}}$, последовательно применяя лемму 4 при $k=j-1$,

$$n=N_i+1,\ p=2^{j-1}+i,\ \rho=\frac{1}{j},\ a=-\sum_{l=0}^{N_i} c_l(-1)^{<l,\,x^{(p)}>}$$

$$(i=0,1,\cdots, 2^{j-1}-1).$$

После этого очевидно будем иметь, что для любого $s<2^j$

$$\sum_{l=0}^{n_{j+1}} c_l\,(-1)^{<l,\,x^{(s)}>}=0. \tag{31}$$

Продолжая таким образом построение, получим последовательность $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, которая в силу (23) и (31) будет удовлетворять требованиям теоремы. Теорема 2′ доказана.

Автор выражает искреннюю благодарность Р. И. Овсепяну, под руководством которого выполнена данная работа.

Ереванский государственный
университет

Поступила 25.V.1981

Ա. Վ. ԲԱԽՇԵՑՅԱՆ. Ուոլշի սիստեմի համար լրիվ չափի $U(\varepsilon)$- բազմությունների մասին (ամփոփում)

Հոդվածում ապացուցված է, որ Ուոլշի սիստեմի համար գոյություն ունեն լրիվ չափի $U(\varepsilon)$— բազմություններ (թեորեմ 1) և որ այդպիսի բազմությունները չեն կարող ունենալ հաշվելի լրացում (թեորեմ 2)։

A. V. BAKHSHETZIAN. *On the $U(\varepsilon)$-sets of full measure for Walsh system* (summary)

The existence of $U(\varepsilon)$-sets of full measure for Walsh system is proved (theorem 1). It is shown that such sets cannot have countable complements (theorem 2).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Н. К. Бари.* Тригонометрические ряды, М., Физ.-мат. лит., 1961.
2. *Л. А. Балашов, А. И. Рубинштейн.* Ряды по системе Уолша и их обобщения, Итоги науки. Сер. матем., Матем. анализ, 1970, М., ВИНИТИ, 1971, 147—202.
3. *Y. Katznelson.* Sets of uniqueness for some classes of trigonometrical series, Bull Amer. Math. Soc., 70, 1964, 722—723.
4. *Leonede de Michele, Paolo M.* Soardi. A remark on sets of uniqueness of l^p. Bolletino. U. M. I., (4), 11, 1975, 64—65.
5. *Р. И. Овсепян.* О пустом множестве как M-множестве в классе общих ортонормированных систем, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIII, № 4, 1978, 261—274.
6. *Leonardo Golzani.* Sets of uniqueness of l_p for general orthonormal complete systems, Bolletino U. M. I., (5), 16—B, 1979, 1134—1143.
7. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. I, М., «Мир», 1965.
8. *J.-P. Kahane, Y. Katznelson.* Sur les ensembles d'unicidé $U(\varepsilon)$ de Zygmund, C. R, Acad. Sc. Paris, 277, 1973, ser. A, 893—895.
9. *V. Shapiro.* $U(\varepsilon)$-sets for Walsh series, Proc. Amer. Math. Soc., 16, № 5, 1965. 867—870.
10. *А. А. Шнейдер.* О единственности разложений по системе функций Уолша, Матем. сб., 24 (66), № 2, 1943, 279—300.
11. *Р. И. Овсепян.* Об извлечении из общих систем лакунарных подсистем со свойством абсолютной сходимости, Маметм. сб., 111 (153), № 4, 522—531.
12. *Ф. Г. Арутюнян, А. А. Талалян.* О единственности рядов по системам Хаара и Уолша, Изв. АН СССР, сер. матем., 28, № 6, 1964, 1391—1408.
13. *В. А. Скворцов.* Некоторые обобщения теоремы единственности для рядов по системе Уолша, Матем. заметки, 13, вып. 3, 1973, 367—372.