ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 5, 1981 Математика

С. С. СЕКТ

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ХАРАКТЕРИСТИКАХ М. М. ДЖРБАШЯНА. II

В I-ой части этой статьи ([1]) была сделана попытка построения аналога классической теории распределения значений с использованием характеристик М. М. Джрбашяна, введенных им в [2] и получивших дальнейшее развитие в [3].

В данной статье исследуются свойства величин ω-отклонений мероморфных функций $f(z)$.

Понятие ω-отклонения мероморфной функции от числа a определяется так:

$$\beta_\omega(a, f) = \lim_{r\to\infty} \frac{L_\omega(r, a, f)}{\widetilde{T}_\omega(r, f)},$$

где

$$L_\omega(r, a, f) = \begin{cases} \max\limits_{|z|=r} \ln^+_\omega \{|f(z) - a|\}^{-1}, & a \neq \infty \\ \max\limits_{|z|=r} \ln^+_\omega |f(z)|, & a = \infty. \end{cases}$$

Множество

$$\Omega_\omega(f) = \{a: \beta_\omega(a, f) > 0\}$$

называется множеством положительных ω-отклонений.

Основные результаты работы:

Теорема 3. *Если $\omega(x) \in \Omega_\omega$ такова, что при любом фиксированном $\nu > 1$*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\omega(t)}{\omega(\nu t)} = \alpha(\nu) < \infty, \tag{1}$$

то для любой мероморфной функции $f(z)$ с конечным нижним ω-порядком множество положительных ω-отклонений $\Omega_\omega(f)$ имеет емкость нуль.

Теорема 4. *Существуют множество C, имеющее мощность континуума и целая функция $g(z)$, нижний ω-порядок которой равен нулю, такие, что для любого $a \in C$ $\beta_\omega(a, g) = \infty$.*

Вначале получим формулу для представления $\ln_\omega |f(z)|$ мероморфной функции $f(z)$ в секторе и с ее помощью докажем теорему 3. Формула представления $\ln_\omega |f(z)|$ в секторе выводится аналогично случаю представления $\ln |f(z)|$ в секторе и доказательство приводимых фактов см. [4], стр. 41.

Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция и $d_R = \{z: |z| < R, |\arg z| < \alpha\}$, $0 < \alpha < \pi$, $R > 1$. Сделаем замену $\zeta = z^{2x} = \rho e^{i\theta}$, $x = \pi(2\alpha)^{-1}$. Тогда в секторе $D_R = \{\zeta: |\zeta| < R^{2x} = R_1, |\arg \zeta| < \pi\}$ определится мероморфная функция $F(\zeta) = f(\zeta^{(2x)^{-1}}) = f(z)$.

Пусть v — любое число: $0 < v < R_1$ и $\zeta \in D_R$. В D_R рассмотрим

$$Q(v, \zeta) = \ln\left[\left|\frac{R_1^2 - v\zeta}{R_1(v-\zeta)}\right| \frac{R_1(v+|\zeta|)}{R_1^2 + v|\zeta|}\right]. \tag{2.1}$$

Заметим, что $Q(v, \zeta) \geqslant 0$. Одновременно ясно, что

$$\ln\left[|R_1^2 - v\zeta|(R_1^2 + v|\zeta|)^{-1}\right] \leqslant 0.$$

Таким образом

$$0 \leqslant Q(v, \zeta) \leqslant \ln\left[(v + |\zeta|)(|v - \zeta|)^{-1}\right]. \tag{2.2}$$

Пусть $\{c_k\}$ — объединенная последовательность нулей и полюсов функции $f(z)$ в замкнутом секторе $\bar{d}_R$ и $p_k = c_k^{2x}$ их образы в ζ-плоскости.

Многосвязную область $B_R(\varepsilon)$ строим как и в случае $\omega(x) \equiv 1$ и применяем к ней формулу Грина с функциями

$$P = \ln_\infty |F(\zeta)|; \quad Q = Q(v, \zeta).$$

Для функции $Q(v, \zeta)$ имеем

$$\left.\frac{\partial Q(v, \zeta)}{\partial n}\right|_{\zeta = R_1 e^{i\theta}} = \frac{2v(R_1 - v)}{R_1 + v} \frac{1 + \cos\theta}{R_1^2 + v^2 - 2R_1 v\cos\theta},$$

$$\{\partial Q(v, \zeta)/\partial n\}_{\zeta = \rho e^{\pm i\pi}} = 0,$$

$$\Delta Q(v, \rho e^{i\theta}) = (R_1^2 - v^2)\, v\,(R_1^2 - \rho^2)\left[\rho(v + \rho)^2 (R_1^2 + v\rho)^2\right]^{-1}.$$

По теореме 2 [2] функция $P = P(\zeta)$ гармонична, т. е. при $\zeta \in B_R(\varepsilon)$ $\Delta P(\zeta) = 0$. Имеем

$$-\iint\limits_{B_R(\varepsilon)} \ln_\infty |F(\rho e^{i\theta})| \frac{(R_1^2 - v^2)\, v\,(R_1^2 - \rho^2)}{\rho(v+\rho)^2(R_1^2 + v\rho)^2}\, \rho\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\left\{\int\limits_{l(p_k, \varepsilon)} \ln_\infty |F(\zeta)| \frac{\partial Q}{\partial n} ds - \int\limits_{l(p_k, \varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln_\infty |F(\zeta)|}{\partial n} ds\right\} +$$

$$+ \int\limits_{l(v, \varepsilon)} \ln_\infty |F(\zeta)| \frac{\partial Q}{\partial n} ds - \int\limits_{l(v, \varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln_\infty |F(\zeta)|}{\partial n} ds +$$

$$+ \int\limits_{\Gamma_{R'}} \ln_\infty |F(R_1 e^{i\theta})|\, 2v \frac{R_1 - v}{R_1 + v} \frac{1 + \cos\theta}{R_1^2 + v^2 - 2vR_1\cos\theta} R_1 d\theta. \tag{2.3}$$

Пусть $\zeta \in l(p_k, \varepsilon)$ и p_k совпадает с нулем либо с полюсом функции $F(\zeta)$, тогда

$$\ln |F(\zeta)| = \lambda_k \ln |\zeta - p_k| + \ln |\Psi_k(\zeta)|,$$

где λ_k равно порядку корня p_k, либо порядку полюса, взятому со знаком минус, а $\Psi_k(\zeta) \neq 0$ при $\zeta \in \overline{K(p_k, \varepsilon)}$. Полагая $\zeta = p_k + \varepsilon e^{i\theta}$, получим

$$|\zeta|^2 = \rho^2 = |p_k|^2 + \varepsilon^2 + 2|p_k|\varepsilon \cos(\theta - \alpha_k).$$

По определению функции P получаем

$$P = \omega(\rho)\lambda_k \ln \varepsilon - \int\limits_0^{\rho} \ln |F(\tau e^{i\theta})|\, \omega'(\tau)\, d\tau + u_k(\zeta),$$

где $u_k(\zeta)$ — гармоническая функция. Тогда

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \omega(\rho)\frac{\lambda_k}{\varepsilon} + \lambda_k \ln \varepsilon \cdot \omega'(\rho) \frac{2\varepsilon + 2|p_k|\cos(\theta - \alpha_k)}{2\sqrt{|p_k^2| + \varepsilon^2 + 2|p_k|\varepsilon\cos(\theta - \alpha_k)}} +$$

$$+ \frac{\partial u_k(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} - \ln |F(\rho e^{i\theta})|\, \omega'(\rho) \frac{2\varepsilon + 2|p_k|\cos(\theta - \alpha_k)}{2\sqrt{|p_k|^2 + \varepsilon^2 + 2|p_k|\varepsilon\cos(\theta - \alpha_k)}}.$$

Слагаемое $\partial u_k(\varepsilon)/\partial \varepsilon$ ограничено, а второе и четвертое слагаемые после умножения на ε становятся несущественными. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{l(p_k, \varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln_\infty |F(\zeta)|}{\partial n} ds = 2\pi \lambda_k \omega(|p_k|)\, Q(v, p_k).$$

Если $p_k = v$, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{l(v, \varepsilon)} Q(v, \zeta) \frac{\partial \ln_\infty |F(\zeta)|}{\partial n} ds = \infty.$$

Имеем далее

$$-\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{l(p_k, \varepsilon)} \ln_\infty |F(\zeta)| \frac{\partial Q(v, \zeta)}{\partial n} ds = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{l(v, \varepsilon)} \ln_\infty |F(\zeta)| \frac{\partial Q(v, \zeta)}{\partial n} ds = -2\pi \ln_\infty |F(v)|.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в соотношении (2.3), с учетом последних выражений получим

$$-\int\limits_0^{R_1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln_\infty |F(\rho e^{i\theta})| \frac{(R_1^2 - v^2)(R_1^2 - \rho^2)}{(v+\rho)^2 (R_1^2 + v\rho)^2}\, v\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2vR_1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln_\infty |F(R_1 e^{i\theta})| \frac{R_1 - v}{R_1 + v} \frac{1 + \cos\theta}{R_1^2 + v^2 - 2vR_1 \cos\theta} +$$

$$+2\pi \sum_{\{p_k\}} \Delta_k Q(v, p_k)\, \omega(|p_k|) - 2\pi \ln_\infty |F(v)|, \tag{2.4}$$

где суммирование в правой части проводится по всем нулям и полюсам $F(\zeta)$ с учетом их кратности, а $\Delta_k = 1$, если p_k—полюс и $\Delta_k = -1$, если p_k—корень $F(\zeta)$.

Перейдем в z-плоскость. Пусть $v = r^{2x}$, тогда $F(v) = f(r)$. Соотношение (2.4) принимает вид

$$\ln_\infty |f(r)| = \frac{4x^2 r^{2x}}{2\pi} \int_0^R \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln_\infty |f(te^{i\varphi})| \frac{(R^{4x} - r^{4x})(R^{4x} - t^{4x})\, t^{2x-1}}{(r^{2x} + t^{2x})^2 (R^{4x} + r^{2x} t^{2x})^2}\, dt d\varphi +$$

$$+2x \frac{R^{2x} r^{2x}}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln_\infty |f(R e^{i\varphi})| \frac{(R^{2x} - r^{2x})(1 + \cos 2x\varphi)}{(R^{2x} + r^{2x})(R^{4x} + r^{4x} - 2R^{2x} r^{2x} \cos 2x\varphi)}\, d\varphi +$$

$$+ \sum_{\{c_k\}} \Delta_k Q(r^{2x}, c_k^{2x})\, \omega(|c_k|^{2x}). \tag{2.5}$$

Теперь докажем теорему.

Теорема 2.1. *Пусть $f(z)$ — мероморфная при $z \neq \infty$ функция; $0 < \alpha < \pi$, $0 \leqslant \theta < 2\pi$, $R > 1$ — произвольные фиксированные числа. Тогда для каждого r, $0 < r < R$, справедливо соотношение*

$$\ln_\infty |f(re^{i\theta})| = (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln_\infty |f(t e^{i(\theta+\varphi)})|\, d\varphi \right\} \frac{t^{2x-1}}{(t^{2x} + r^{2x})^2}\, dt +$$

$$+ \sum_{\{c_k\}} \Delta_k\, \omega(|c_k|^{2x}) \ln \frac{r^{2x} + |c_k|^{2x}}{|r^{2x} - c_k^{2x}|} + K(R, r, \theta, \alpha), \tag{2.6}$$

где $\Delta_k = 1$, если c_k — полюс и $\Delta_k = -1$, если c_k — корень; для каждого $r < R$ имеет место оценка

$$|K(R, r, \theta, \alpha)| \leqslant 20x (r/R)^{2x} (\widetilde{T}_\infty(R, f) + C) R^{2x} (R^{2x} - r^{2x})^{-1}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Применим формулу (2.5) к функции $f_1(z) = f(ze^{i\theta})$ (θ — фиксировано) с учетом соотношения (2.2). Тогда

$$K(R, r, \theta, \alpha) = -(2x)^2 r^{2x} \int_0^R \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha} \ln_\infty |f(t e^{i(\theta+\varphi)})|\, d\varphi \right\} \frac{R^{4x} t^{2x-1}}{(R^{4x} + r^{2x} t^{2x})^2}\, dt +$$

$$+2x \frac{(Rr)^{2x}}{\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln_\infty |f(R e^{i(\theta+\varphi)})| \frac{R^{2x} - r^{2x}}{R^{2x} + r^{2x}} \frac{1 + \cos 2x\varphi}{R^{4x} + r^{4x} - 2R^{2x} r^{2x} \cos 2x\varphi}\, d\varphi.$$

С учетом того, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} |\ln_\infty |f(te^{i(\theta+\varphi)})|\, d\varphi \leqslant \widetilde{m}_\infty(t, f) + \widetilde{m}_\infty\left(t, \frac{1}{f}\right) \leqslant 2\, (\widetilde{T}_\infty(R, f) + C),$$

получим

$$|K(R, r, \theta, \alpha)| \leqslant \frac{(2x)^2 r^{2x}\cdot 2}{R^{4x}} (\tilde{T}_\omega(R, f) + C) \int_0^R t^{2x-1}\, dt +$$

$$+ 4xR^{2x} r^{2x}\cdot 2\,[\pi (R^{2x} + r^{2x})(R^{2x} - r^{2x})]^{-1} (\tilde{T}_\omega(r, f) + C) \leqslant$$

$$\leqslant (r/R)^{2x} 20x\, (\tilde{T}_\omega(R, f) + C)\, R^{2x}(R^{2x} - r^{2x})^{-1},$$

что и завершает доказательство теоремы 2.1.

Так как

$$\ln [(r^{2x} + |c_k|^{2x})\{|r^{2x} - c_k^{2x}|\}^{-1} \geqslant \ln [(r^{2x} + |c_k|^{2x})\{|r^{2x} + |c_k|^{2x}|\}^{-1}],$$

то заменяя $\sum\limits_{\{c_k\}}$ в (2.6) на сумму лишь по одним полюсам (для корней $\Delta_k = -1$), и переходя в (2.6) к положительным частям, получим

$$\ln_\omega^+ |f(re^{i\theta})| \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \ln_\omega^+ |f(te^{i(\theta+\varphi)})|\, d\varphi \right\} \frac{t^{2x-1}}{(t^{2x} + r^{2x})^2}\, dt +$$

$$+ \sum_{\{b_k\}} \ln \frac{r^{2x} + |b_k|^{2x}}{(r^{2x} - |b_k|^{2x}|}\, \omega(|b_k|^{2x}) + |K(R, r, \theta, \alpha)|, \qquad (2.8)$$

$R > 1$, $0 < r < R$, $\{b_k\}$ — последовательность полюсов функции $f(z)$, лежащих в секторе d_R и занумерованных с учетом их кратности.

Положим для произвольной мероморфной при $z \neq \infty$ функции $f(z$

$$L_\omega(r, a, f) = \begin{cases} \max\limits_{|z|=r} \ln_\omega^+ \{|f(z) - a|\}^{-1} & \text{если } a \neq \infty \\ \max\limits_{|z|=r} \ln_\omega^+ |f(z)|, & \text{если } a = \infty. \end{cases}$$

Тогда формула (2.8) принимает вид

$$L_\omega(r, f) \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int_0^R \frac{\tilde{m}_\omega(t, f)\, t^{2x-1}}{(r^{2x} + t^{2x})^2}\, dt +$$

$$+ \sum_{\{b_k\}} \omega(|b_k|^{2x}) \ln \frac{r^{2x} + |b_k|^{2x}}{|r^{2x} - b_k|^{2x}|} + K\cdot x \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{2x} (\tilde{T}_\omega(kR, f) + C), \qquad (2.9)$$

где $L_\omega(r, f) = L_\omega(r, \infty, f)$, $r \leqslant Rk^{-1}$, $1 < k \leqslant 2$ — фиксированное число. Оценка (2.9) справедлива при любом фиксированном $x > 0{,}5$.

Введем понятие величины ω-отклонения мероморфной функции $f(z)$ относительно числа a

$$\beta_\omega(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{L_\omega(r, a, f)}{\tilde{T}_\omega(r, f)}. \qquad (2.10)$$

Множество $\Omega_\omega(f) = \{a\colon \beta_\omega(a, f) > 0\}$ будем называть множеством положительных ω-отклонений мероморфной функции $f(z)$.

Доказательство теоремы 3. Для установления этого факта будем пользоваться оценкой (2.9), примененной к функции $|f(z)-a|^{-1}$. Имеем для каждого $a \neq \infty$ $(1<k<2,\ x>0{,}5)$

$$L_\infty(r, a, f) \leqslant (2x)^2 r^{2x} \int \frac{\tilde{m}_\infty(t, a, f)\, t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dt +$$

$$+\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|^{2x}) \ln\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|} + \frac{20\, x}{\ln k}\left(\frac{r}{R}\right)^{2x} \frac{k^{2x}}{k^{2x}-1}(\tilde{T}_\infty(k R, f)+C), \tag{2.11}$$

где b_k — a-точки $f(z)$, а $r \leqslant Rk^{-1}$. Известна лемма ([5], стр. 35).

Лемма 2.1. *Пусть $\varphi(x)$ — неубывающая функция, определенная при $x \geqslant x_0 > 0$, и такая, что $\varphi(x_0) \geqslant 2$ и $\lim\limits_{x\to\infty} \varphi(x) = \infty$. Тогда для каждого $\nu > 1$ существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n = x_n(\nu) \nearrow \infty$ $(x_1 \geqslant x_0)$, такая, что при $x_n \leqslant x \leqslant x_n + \ln^{-\nu} \varphi(x_n)$*

$$\varphi(x) < \nu\varphi(x_n). \tag{2.12}$$

Пусть $\varphi(y) = \tilde{T}_\infty(e^y, f)$ и $\{y_n\}$— последовательность, для которой выполняется соотношение (2.12) для функции $\varphi(y)$. Для каждого фиксированного $n \geqslant n_0$ положим в выражении (2.11)

$$R = \exp\{y_n + 0{,}5 \ln^{-\nu} \varphi(y_n)\}, \quad k = \exp\{3^{-1} \ln^{-\nu} \varphi(y_n)\}, \tag{2.13}$$

а r будем считать принадлежащим сегменту $[r_1, r_2]$, где $r_1 = \exp y_n$, $r_2 = \exp\{y_n + 6^{-1} \ln^{-\nu} \varphi(y_n)\}$. Тогда оценка (2.11) дает

$$\int_{r_1}^{r_2} L_\infty(r, a, f)\frac{dr}{r} \leqslant (2x)^2 \int_0^R \tilde{m}_\infty(t, a, f)\, t^{2x-1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dr dt +$$

$$+\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|^{2x}) \int_{r_1}^{r_2} \ln\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|}\frac{dr}{r} + 10\,(\tilde{T}_\infty(kR, f)+C)\frac{k^{2x}(r_2^{2x}-r_1^{2x})}{\ln k\,(k^{2x}-1)}. \tag{2.14}$$

Оценим

$$\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|^{2x}) \int_{r_1}^{r_2} \ln\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|}\frac{dr}{r},$$

предварительно заметив, что

$$\int_{r_1}^{r_2} \ln\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|}\frac{dr}{r} \leqslant \int_0^\infty \ln\left|\frac{s^{2x}+1}{s^{2x}-1}\right|\frac{ds}{s} = \frac{\pi^2}{4x}.$$

Тогда

$$\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|^{2x}) \int_{r_1}^{r_2} \ln\frac{r^{2x}+|b_k|^{2x}}{|r^{2x}-|b_k|^{2x}|}\frac{dr}{r} \leqslant \frac{\pi^2}{4x}\sum_{|b_k|<R} \omega(|b_k|) =$$

$$=\frac{\pi^2}{4x}\int_0^R \omega(t)\,dn(t, a)=\frac{\pi^2}{4x}\left[\omega(R)\,n(R, a)+\int_0^R n(t, a)\,d(-\omega(t))\right).$$

Для $k>1$ справедливо

$$\int_0^R \omega'(\tau)\,d\tau=\omega(R)-1>\omega(kR)-1=k\int_0^R \omega'(k\tau)\,d\tau.$$

Пусть для $\omega(x)\in\Omega_\infty$ справедливо

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\omega(t)}{\omega(\nu t)}=\alpha(\nu)<\infty\quad(\nu>1),$$

т. е. для $t>t_0$

$$\omega(t)\leqslant c(\nu)\,\omega(\nu t),$$

где $c(\nu)<\infty$ — постоянная.

Тогда

$$\frac{\pi^2}{4x}\sum_{|b_k|<R}\omega(|b_k|)\leqslant\frac{\pi^2}{4x}\left[c(k)\,\omega(kR)\,n(R, a)+\int_0^R n(t, a)\,d(-\omega(kt))\leqslant\right.$$

$$\leqslant\frac{\pi^2}{4x}\left[\frac{c(k)}{\ln k}\,\omega(kR)\,N(kR, a, f)+\frac{1}{\ln k}\int_0^R N(kt, a, f)\,d(-\omega(kt))\right]\leqslant$$

$$\leqslant\pi^2(4x)^{-1}\,c(k)\ln^{-1}k\,\widetilde{N}_\infty(kR, a, f), \tag{2.15}$$

так как $n(x, a)\leqslant\ln^{-1}k N(kx, a, f)$.

Пусть K—произвольный компакт из круга $K(0; 0{,}5)=\{a: |a|<0{,}5\}$ и μ—равновесная мера Робена для K. Проинтегрируем неравенство (2.14) по мере μ и по компакту K. В силу соотношений (1.5) леммы 1.1, (1.15) леммы 1.2, (1.24) ([1]) и (2.15), оценка (2.14) дает

$$\int_{r_1}^{r_2}\left\{\int_K \overline{L}_\infty(r, a, f)\,d\mu(a)\right\}\frac{dr}{r}\leqslant C(K)\,2x\ln\frac{r_2}{r_1}+$$

$$+\frac{\pi^2 c(k)}{4x\ln k}\int_K\widetilde{N}_\infty(kR, a, f)\,d\mu(a)+\frac{10}{\ln k}\frac{k^{2x}}{k^{2x}-1}\left(\frac{r_2}{R}\right)^{2x}(\widetilde{T}_\infty(kR, f)+C)\leqslant$$

$$\leqslant Cx\ln(r_2 r_1^{-1})+c(\mu_1)(x\ln k)^{-1}(\widetilde{T}_\infty(kR, f)+C)+$$

$$+K\ln^{-1}k\cdot k^{2x}(k^{2x}-1)^{-1}(r_2R^{-1})^{2x}(\widetilde{T}_\infty(kR, f)+C), \tag{2.16}$$

где μ_1— фиксированно и больше 1.

Действительно, $\widetilde{N}_\infty(kR, a, f)<(c_1(\mu_1)/(\mu_1-1))\,\widetilde{T}_\infty(\mu_1 kR, f)\leqslant$ $\leqslant(c_1(\mu_1)/(\mu_1-1))\,\mu_1^{\lambda_\infty+1}\,\widetilde{T}_\infty(kR, f)=c(\mu_1)\,\widetilde{T}_\infty(kR, f)$, в силу справедливости (1) (см. лемму 1.1 в [1]), конечности λ_∞ и

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dt \leqslant \int_0^{\infty} \frac{t^{2x-1}}{(t^{2x}+r^{2x})^2}\, dt = \frac{1}{2x}\frac{1}{t^{2x}}\cdot$$

Выберем любое $\nu > 1$ и положим в неравенстве (2.16) при фиксированном $n \geqslant n_0$, $x = \ln^{3\nu}\varphi(y_n)$. Тогда для $n \geqslant n_0 = n_0(\nu, f)$ (см. равенства (2.13))

$$(r_2 R^{-1})^{2x} = \exp\{-2x(3\ln^{\nu}\varphi(y_n))^{-1}\} = \exp\{-2\cdot 3^{-1}\ln^{2\nu}\varphi(y_n)\} <$$

$$\leqslant 36\ln^{-4\nu}\varphi(y_n) \leqslant 1;\ \widetilde{T}_\infty(kR, f) \leqslant \overline{T}_\infty\{\exp[y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)]\} =$$
$$= \varphi(y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n));\ k^{2x} = \exp\{2x(3\ln^{\nu}\varphi(y_n))^{-1}\} \geqslant$$
$$\geqslant \exp\{0{,}5\ln^{2\nu}\varphi(y_n)\} \geqslant 6^{-1}\ln^{4\nu}\varphi(y_n) > 2.$$

В силу последних соотношений оценка (2.16) принимает вид

$$\int_{r_1}^{r_2}\left\{\int_K L_\infty(r, a, f)\, d\mu(a)\right\}\frac{dr}{r} \leqslant C\, x \ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{c(\mu_1)}{x}\ln^{\nu}\varphi(y_n)\,\varphi\times$$
$$\times\left\{y_n + \frac{1}{\ln^{\nu}\varphi(y_n)}\right\} + K\ln^{-3\nu}\varphi(y_n)\,\varphi(y_n + \ln^{-\nu}\varphi(y_n)) \leqslant$$
$$\leqslant Cx\ln^{-\nu}\varphi(y_n) + K\,\nu\varphi(y_n)\ln^{-3\nu}\varphi(y_n) +$$
$$+ c(\mu_1)\,x^{-1}\,\nu\varphi(y_n)\ln^{\nu}\varphi(y_n) < C\{\ln^{2\nu}\varphi(y_n) + \varphi(y_n)\ln^{-2\nu}\varphi(y_n)\}.$$

Отсюда, аналогично случаю $\omega(x) \equiv 1$, имеем, что существует $r \in [r_1, r_2]$ такое, что

$$\int_K L_\infty(r, a, f)\, d\mu(a) < C\, \widetilde{T}_\infty(r, f)\ln^{-\nu}\overline{T}_\infty(r, f) \tag{2.17}$$

(см. [4], стр. 87).

Оценка (2.17) выполняется на каждом сегменте $[r_1, r_2]$, где $\{r_1 = r_1(n)\} \nearrow \infty$ и $\{r_2 = r_2(n)\} \nearrow \infty$ при $n \to \infty$, следовательно

$$\lim_{r\to\infty}\frac{1}{\widetilde{T}_\infty(r, f)}\int_K L_\infty(r, a, f)\, d\mu(a) = 0,$$

и по лемме Фату

$$\int_K \beta_\infty(a, f)\, d\mu(a) = 0.$$

Отсюда обычным образом следует, что множество $\Omega_\infty(f)$ имеет емкость нуль. Теорема 3 доказана.

Введем целую функцию $E_0(z)$

$$E_0(z) = \begin{cases} \Psi_1(z)\, z^{-2}, & z \in \overline{D}_0 \\ \exp(z + e^z) + \Psi_2(z)\, z^{-2}, & z \in A_0, \end{cases} \tag{2.18}$$

где $\Psi_i(z)$, $i=1, 2$, аналитические функции в соответствующих областях; для каждого z: $|z|\geqslant 1$ в соответствующих областях определения $|\Psi_i(z)|< K$, $i=1, 2$. Рассмотрим систему полуполос $A_n=\{z=x+iy: x>0, (2n-1)\pi\leqslant y<(2n+1)\pi\}$, где $n=0; \pm 1, \pm 2; \pm 3,\cdots$, и положим $E_n(z)=E_0(z-2\pi in)$ (подробнее см. [4], гл. 3).

Пусть $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(b_n\neq 0)$ — произвольная ограниченная последовательность различных комплексных чисел. Положим $b_0=1$, $b_{-n}=b_n$. Справедлива лемма ([4], стр. 81).

Лемма 2.2. *Функция*

$$g(z)=\exp(-z-e^z)\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n E_n(z)$$

является целой функцией, для которой при $r>r_0$ $T(r, g)\leqslant 2e^r r^{-0,5}$ *и при* $r>r_0(n)$, $n=1, 2, 3,\cdots$, $L(r, b_n, g)\geqslant 0,5\, e^r$.

Доказательство теоремы 4. Покажем, что для функции $g(z)$, определяемой в лемме 2.2, при $\omega(x)=e^{-(x-1)}x^{-0,5}\in\Omega_\infty$ $\lambda_\omega=0$. С учетом того, что

$$\overline{T}_\omega(r, g)\leqslant\omega(r)\, T(r, g)+\int_1^r|\omega'(\tau)|\, T(\tau, g)\, d\tau\leqslant\omega(r)\, T(r, g),$$

получаем $\overline{T}_\omega(r, g)\leqslant 2er^{-1}$, откуда

$$\lambda_\omega=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\ln\overline{T}_\omega(r, g)}{\ln r}=0.$$

Из представления функции $E_n(z)$ получаем

$$L_\omega(r, b_m, g)=\max_{|z|=r}\ln^+_\omega\{|g(re^{i\theta_m})-b_m|\}^{-1}\geqslant$$

$$\geqslant\max_{|z|=r}\left[\omega(r)\ln\{|g(re^{i\theta_m})-b_m|\}^{-1}+\int_1^r|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\, d\tau\right]^+.$$

Оценим

$$\int_1^r|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\, d\tau.$$

$$\int_1^r|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\, d\tau\geqslant\int_{\frac{r}{m}}^r|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\, d\tau=$$

$$=\sum_{k=1}^{m-1}\int_{\frac{rk}{m}}^{\frac{r(k+1)}{m}}|\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}\, d\tau. \qquad (2.19)$$

На каждом участке интегрирования каждой точке луча $z=e^{i\theta_m}$ ставится в соответствие точка горизонтальной прямой $z=2k\pi i$, $k=1, 2,\cdots, m-1$. Обе точки находятся на пересечении прямых $z=e^{i\theta_m}$ и $z=2k\pi i$, $k=1, 2,\cdots, m-1$ с окружностью

$$|z|=\tau,\ \frac{rk}{m}<\tau<\frac{r(k+1)}{m},\ k=1, 2,\cdots, m-1.$$

При достаточно больших r секущая, соединяющая эти две точки, будет стремиться к касательной, проведенной из точки луча $z=e^{i\theta_m}$.

Тогда вводим новую переменную

$$u=\frac{\tau}{\cos\theta_m},\ \frac{rk}{m}<\tau<\frac{r(k+1)}{m},\ k=1, 2,\cdots, m-1.$$

Эта переменная будет определять точки прямой $z=2k\pi i$, $k=1, 2,\cdots, m-1$, а оценка в этих точках известна.

Тогда (2.19) примет вид

$$\int_1^r |\omega'(\tau)|\ln\frac{1}{|g(\tau e^{i\theta_m})-b_m|}d\tau\geqslant\sum_{k=1}^{m-1}\Bigg[\int_{\frac{rk}{m\cos\theta_m}}^{\frac{r(k+1)}{m\cos\theta_m}}\ln\frac{1}{|g(u\cos\theta_m e^{i\theta_m})-b_m|}\times$$

$$\times|\omega'(u\cos\theta_m)|\cos\theta_m\,du+O(1)\Bigg]>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}\Bigg\{\int_{\frac{rk}{m\cos\theta_m}}^{\frac{r(k+1)}{m\cos\theta_m}}e^{u\cos\theta_m}\,e^{-(u\cos\theta_m-1)}\times$$

$$\times\frac{1}{\sqrt{u\cos\theta_m}}\left[1+\frac{1}{2u\cos\theta_m}\right]\cos\theta_m\,du\Bigg\}+O(1)>\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m-1}2e\sqrt{\frac{r}{m}}\times$$

$$\times[\sqrt{k+1}-\sqrt{k}]+O(1)=e\sqrt{rm^{-1}}(\sqrt{m}-1)+O(1)=$$

$$=e\sqrt{r}(1-m^{-0{,}5})+O(1).$$

Отсюда получаем, что

$$\beta_\infty(b_m, g)=\lim_{r\to\infty}\frac{L_\infty(r, b_m\,g)}{\overline{T}_\infty(r, g)}=\infty. \tag{2.20}$$

Из формулировки леммы 2.2 видно, что при всех тех $\omega(x)\in\Omega\infty$, для которых нижний ω-порядок конечен, справедливо (2.20).

Покажем теперь, что функция $g(z)$, о которой говорится в условиях теоремы 4, является функцией, определяемой леммой 2.2 со специальными $\{b_k\}_1^\infty$.

Опишем процесс выбора $\{b_k\}$. Пусть

$$\Theta(n)=\exp_3(2n),\ n=1, 2, 3,\cdots.$$

Рассмотрим следующее множество действительных чисел C:

$$C = \left\{ a : a = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \exp\left[-\theta(n) \right] \right\}, \tag{2.21}$$

где γ_p принимает независимо два значения 0 и 1, причем для каждого a 1 встречается бесконечное число раз. Множество C имеет мощность континуума (доказательство см. в [4]).

Запишем теперь каждое натуральное число n в двоичной системе

$$n = \sum_{k=1}^{q(n)} \gamma_k 2^{k-1} \quad (\gamma_k = 0,1), \tag{2.22}$$

при этом $q(n)$ определяется однозначно, как наибольший индекс, для которого $\gamma_{q(n)} = 1$. Между множеством натуральных чисел (2.22) и множеством

$$b_n = 1 + \sum_{k=1}^{q(n)} \gamma_k \exp\left[-\theta(k) \right], \; n = 1, 2, 3, \cdots, \tag{2.23}$$

утанавливается взаимно-однозначное соответствие.

Пусть $b_0 = 1$ и $b_{-n} = b_n$. С помощью последовательности $\{b_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ составим целую функцию $g(z)$ как и в лемме 2.2. Эта функция удовлетворяет условиям леммы 2.2. Прежде всего для каждого b_n вида (2.23) $\beta_\omega(b_n, g) = \infty$. Но и для каждого $a \in C$, где множество C определено соотношением (2.21), также справедливо $\beta_\omega(a, g) = \infty$. (Доказательство последнего факта проводится аналогично доказательству соответствующего факта при $\alpha(x) \equiv 1$).

Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность проф. Петренко Виктору Павловичу за постановку задачи.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступила 24.X.1980

Ս. Ս. ՍԵԿՏ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների աճը Մ. Մ. Ջրբաշյանի բնութագրիչներում. II *(ամփոփում)*

Հոդվածում ապացուցվում է դրական ω-շեղումների բազմության բացառիկությունը $\omega(x) \in \Omega_\infty$-ի համար աստիճանային աճի դեպքում։ Բերվում է $g(z)$ ամբողջ ֆունկցիայի օրինակ, որի համար դրական ω-շեղումների բազմությունը ունի կոնտինուումի հզորություն։

S. S. SECT. *Growth of meromorphic function in M. M. Djrbashian characteristics. II* (summary)

In the paper exclusitiveness of the set of positive ω-deviations is established, where $\omega(x) \in \Omega_\infty$ has power growth. An example of entire $g(z)$ function is given, for which the set of positive ω-deviations has the power of the continuum.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. С. Сект*. Рост мероморфных функций в характеристиках М. М. Джрбашяна, I, Изв. АН Арм.ССР, сер. «Математика», XVI, № 4, 1981, 293—300.
2. *М. М. Джрбашян*. Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости, Изв. АН Арм.ССР, сер. «Математика», V, № 6, 1970, 453—485.
3. *А. А. Гольдберг, Р. Д. Мохонько*. Об обобщенных неванлинновских характеристиках, Изв. АН Арм.ССР, сер. «Математика», XI, № 2, 1976, 132—154.
4. *В. П. Петренко*. Рост мероморфных функций, Харьков, Изд. при ХГУ, изд. объед. «Вища школа», 1978.
5. *У. Хейман*. Мероморфные функции, М., «Мир», 1966.