ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 5, 1981 Математика

Л. А. ШАГИНЯН

О СУММИРУЕМОСТИ К $+\infty$ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА МЕТОДОМ $(C, 1)$

Введение

Известно (см. [1]), что существуют ряды по подсистемам тригонометрической системы и системы Уолша, которые суммируются к $+\infty$ почти свюду (п. в.) любым методом $(C, \alpha>0)$ и коэффициенты которых принадлежат $l_{2+\varepsilon}$ для любого $\varepsilon>0$.

В настоящей статье рассматривается вопрос о существовании рядов по подсистемам системы Хаара с аналогичными свойствами.

Интерес этого вопроса обусловлен тем, что ряды по системе Хаара не могут суммироваться к $+\infty$ никаким методом $(C, \alpha>-1)$ на множествах положительной меры (см. [2], [3]) и, кроме того, система Хаара не обладает тем свойством тригонометрической системы и системы Уолша, на котором основывается конструкция работы [1].

В связи с этим отметим, что для системы Хаара вопрос оказался сравнительно сложным и решение удалось получить лишь для метода $(C, 1)$.

Пусть $\{h_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ — система функций Хаара (см. стр. 367), а $\overline{S}[0,1]$ — совокупность всех измеримых функций, определенных п. в. на $[0,1]$, которые могут принимать и бесконечные значения определенных знаков на множествах положительной меры.

Имеет место

Теорема 1. *Существует ряд*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j h_{k_j}(t) \quad (k_1<k_2<\cdots), \tag{1}$$

обладающий следующими свойствами:

1°. *для каждой функции* $f\in\overline{S}[0,1]$ *существует ряд*

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{j_l} h_{k_{j_l}}(t) \ (k_{j_1}<k_{j_2}<\cdots), \tag{2}$$

который суммируется к $f(t)$ *п. в. на* $[0,1]$ *методом* $(C, 1)$,

2°. *ряд* $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |a_j h_{k_j}(t)|^{2+\varepsilon}$ *сходится равномерно на* $[0,1]$ *для любого* $\varepsilon>0$, 3°. *последовательность* $\{k_j\}$ *имеет плотность нуль.*

Как следствие получаем

Теорема 2. *Существует ряд по некоторой подсистеме системы Хаара, удовлетворяющий* 2° *условию теоремы* 1, *который суммируется к* $+\infty$ *п. в. на* $[0,1]$ *методом* $(C, 1)$.

Отметим, что для конечных измеримых функций существование универсальных рядов по системе Хаара относительно частичных рядов в смысле сходимости п. в.; ранее было установлено в работе [4].

Отметим также, что утверждения теорем 1 и 2, вообще говоря, перестают быть верными при перестановках системы $\{h_{k_j}(t)\}$. Точнее, любую подсистему можно переставить таким образом, чтобы ряды по этой переставленной системе не смогли суммироваться к $+\infty$ $(-\infty)$ методами $(C, \alpha>0)$ на множествах положительной меры.

В дальнейшем мы воспользуемся двумя утверждениями о рядах по системе Хаара (см. [5]), которые объединим в следующей теореме.

Теорема А. 1) *Если нижний предел частичных сумм ряда* $\Omega\sim\sum a_k h_k(t)$ *отличен от* $-\infty$ *на множестве* E, *то ряд* Ω *сходится к конечной функции п. в. на* E. 2) *Для того чтобы ряд* Ω *сходился п. в. на множестве* E, *необходимо и достаточно, чтобы ряд* $\sum|a_k h_k(t)|^2$ *сходился п. в. на* E.

§ 2. Необходимые леммы

Функции системы Хаара — $\{h_j(t)\}_{j=0}^{\infty}$ определяются следующим образом: $h_0(t)\equiv 1$ при $t\in[0, 1]$. Далее, для любого натурального $m\geqslant 0$ положим

$$\pi_m(h)=\{h_{2^m}(t),\ h_{2^m+1}(t),\ \cdots,\ h_{2^{m+1}-1}$$

и систему функций $\pi_m(h)$ назовем m-ой пачкой Хаара. Теперь, по определению имеем

$$h_{2^m+k-1}(t)=\begin{cases}\sqrt{2^m}, & t\in\left(\dfrac{k-1}{2^m},\ \dfrac{k-1/2}{2^m}\right),\\ -\sqrt{2^m}, & t\in\left(\dfrac{k-1/2}{2^m},\ \dfrac{k}{2^m}\right),\\ 0, & t\in\left(\dfrac{l-1}{2^m},\ \dfrac{l}{2^m}\right),\end{cases}\qquad(3)$$

при $l\neq k$ и $k,\ l\in[1,\ 2^m]$, а в точках разрыва $h_{2^m+k}(t)$ определяется как среднее арифметическое значений, которые она имеет в прилегающих к этой точке интервалах. Вместе с тем

$$h_{2^m+k}(0)=\sqrt{2^m},\quad h_{2^m+k}(1)=-\sqrt{2^m}.$$

Для любого натурального $m\geqslant 0$ положим

$$\pi_m(\Delta) = \{\Delta_{2^m}, \Delta_{2^m+1}, \cdots, \Delta_{2^{m+1}-1}\},$$

где $\Delta_{2^m+k-1} = \left(\frac{k-1}{2^m}, \frac{k}{2^m}\right)$, при $k \in [1, 2^m]$.

Системы интервалов $\pi_m(\Delta)$, $m \geqslant 0$ назовем соответствующими пачками интервалов Хаара, а совокупность интервалов всех пачек будем обозначать через $\{\Delta\}$.

Лемма 1. *Для любых действительных чисел* $\varepsilon \in (0, 1)$ *и* r, *и для любых натуральных чисел* n *и* N *существует полином*

$$Q(t) = \sum_{j=1}^{q} c_j h_{k_j}(t),$$

обладающий следующими свойствами:

1.1 $$k_1 > N;$$

1.2 $$k_{j+1} - k_j \geqslant 2^n, \ j \in [1, q-1];$$

1.3 $$\sum_{j=1}^{q} |c_j h_{k_j}(t)|^{2+\varepsilon} \leqslant \varepsilon, \ t \in [0, 1];$$

1.4 $$\text{mes}\{t: |Q(t) - r| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=m_1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{(m-1)n}} \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2^{mn}}} \cdot h_{2^{mn}+j2^n-1}(t), \tag{4}$$

где m_1 выбрано таким, чтобы

$$2^{m_1 n} > N, \ \frac{1}{\sqrt{m_1}} \leqslant \varepsilon \tag{5}$$

и вместе с тем

$$\sum_{m=m_1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} < \varepsilon. \tag{6}$$

Положим

$$E_m^n = \bigcup_{j=1}^{2^{(m-1)n}} \Delta_{2^{mn}+j2^n-1}, \ m \geqslant 1$$

и

$$E_n = \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{m=l}^{\infty} E_m^n.$$

Пусть

$$t = \frac{\omega_1(t)}{2^n} + \frac{\omega_2(t)}{2^{2n}} + \frac{\omega_3(t)}{2^{3n}} + \cdots \tag{7}$$

— разложение произвольной точки $t \in [0,1]$ по основанию 2^n. Ясно, что $t \in E_n$ тогда и только тогда, когда в разложении (7) бесконечное число цифр $\omega(t)$ принимают значение 2^n-1. Пусть для $t\in E_n$ таковыми являются цифры $\omega(t)$ с индексами $m_1(t)<m_2(t)<\cdots$.

Обозначим через $\Lambda(k, t)$ количество индексов $m_\nu(t)\leqslant k$. Тогда, согласно известной теореме Бореля о „нормальных" числах (см., например, [6], стр. 35), будем иметь

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Lambda(k,t)}{k}=\frac{1}{2^n} \tag{8}$$

для п. в. $t\in[0, 1]$. Отсюда непосредственно получаем

$$\operatorname{mes} E_n=1 \tag{9}$$

для любого натурального n. Более того

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu(t)}=+\infty \tag{10}$$

для п. в. $t\in[0,1]$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{m=m_1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2^{(m-1)n}}\frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2^{m\cdot n}}|h_{2^{mn}+j2^n-1}(t)|^2. \tag{11}$$

В произвольной точке $t\in E_n$ ряд (11) будет иметь вид

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{m_\nu(t)},$$

следовательно, согласно (9) и (10), ряд (11) расходится почти в каждой точке отрезка [0,1]. Отсюда, согласно теореме А получаем, что ряд

$$\Omega\sim\sum_{j=1}^{\infty}c_j h_{k_j}(t),$$

полученный из ряда (4) раскрытием внутренних сумм, расходится п. в. на [0,1]. Следовательно, будем иметь (см. теорему А)

$$\overline{\lim_{l\to\infty}}\, S_l(t, \Omega)=+\infty \text{ п. в. на } [0,1] \tag{12}$$

и

$$\underline{\lim_{l\to\infty}}\, S_l(t, \Omega)=-\infty \text{ п. в. на } [0,1], \tag{13}$$

где $S_l(t, \Omega)$ есть l-ая частичная сумма ряда Ω.

Пусть, теперь, E^* — множество полной меры, которое не содержит двоичнорациональных точек и на котором имеют место одновременно (12) и (13). Тогда в каждой точке $t\in E^*$ частичные суммы ряда Ω будут колебаться между $+\infty$ и $-\infty$. Следовательно, в силу того, (что слагаемые ряда Ω по абсолютной величине не превосходят ε (см. 5)), для каждой точки $t\in E^*$ найдется некоторая последовательность $\{n_l(t)\}_1^\infty$ такая, что

$$|S_{n_i(t)}(t, \Omega) - r| \leqslant \varepsilon$$

для всех $i \geqslant 1$.

Обозначим через $\Delta^*_{n_i(t)}$ наибольший интервал Хаара, который содержит точку t и на котором $S_{n_i(t)}(t, \Omega)$ постоянна.

Ясно, что совокупность

$$\{\Delta^*_{n_i(t)}\}_1^\infty, \ t \in E^*$$

является покрытием множества E^* в смысле Витали, следовательно, согласно теореме Витали (см., например, [7], стр. 82), существует конечное число интервалов

$$\Delta^*_{n_{l_1}}, \Delta^*_{n_{l_2}}, \cdots, \Delta^*_{n_{l_s}}, \tag{14}$$

обладающих следующими свойствами:

1. $$\Delta^*_{n_{l_\nu}} \cap \Delta^*_{n_{l_\mu}} = \varnothing; \ \nu \neq \mu; \ \nu, \ \mu \in [1, s];$$

2. $$\sum_{\nu=1}^{s} |\Delta^*_{n_{l_\nu}}| > 1 - \varepsilon; \tag{15}$$

3. $$|S_{n_{l_\nu}}(t, \Omega) - r| \leqslant \varepsilon, \ t \in \Delta^*_{n_{l_\nu}}, \ \nu \in [1, s]. \tag{16}$$

Теперь составим полином $Q(t)$ при помощи членов ряда Ω таким образом: $c_j h_{k_j}(t)$ входит как слагаемое в $Q(t)$ в том и только в том случае, когда интервал Δ_{k_j} строго содержит в себе какой-либо интервал из системы (14). Очевидно, что $Q(t) = S_{n_{l_\nu}}(t, \Omega)$ при $t \in \Delta^*_{n_{l_\nu}}$ для каждого $\nu \in [1, s]$. Отсюда, учитывая (4), (5), (6), (15) и (16), сразу получаем, что $Q(t)$ есть искомый полином, удовлетворяющий утверждениям леммы 1*).

Лемма 2. (основная). *Для произвольных действительных чисел* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* r, *и для произвольных натуральных чисел* n *и* N *существует полином вида*

$$P(t) = \sum_{j=1}^{p} a_j h_{\mu_j}(t) \quad (\mu_1 < \mu_2 < \cdots),$$

который обладает следующими свойствами:

2.1 $\mu_1 > N$;

2.2 $\mu_{j+1} - \mu_j \geqslant 2^n, \ j \in [1, p-1]$;

2.3 $\sum_{j=1}^{p} |a_j h_{\mu_j}(t)|^{2+\varepsilon} \leqslant \varepsilon, \ t \in [0,1]$;

---

*) Отметим, что два основных элемента приведенного построения, по-видимому, впервые встречаются соответственно в работах [8] и [9].

2.4 $\qquad \operatorname{mes}\{t: |P(t)-r| \geqslant \varepsilon\} = \operatorname{mes} F \leqslant \varepsilon;$

2.5 $\qquad \max\limits_{\nu \in [1, p]} \left| \frac{1}{\nu} \sum\limits_{i=1}^{\nu} \sum\limits_{j=1}^{i} a_j h_{\mu_j}(t) \right| \leqslant |r| + \varepsilon, \quad t \overline{\in} F.$

Доказательство. Пусть $Q(t) = \sum\limits_{l=1}^{q} c_l h_{k_l}(t)$ — полином, удовлетворяющий условиям 1.1—1.4 леммы 1 для $\frac{\varepsilon}{2}$, r, n, N и $h_{k_q}(t) \in \pi_{n_q}(h)$. Возьмем какое-либо натуральное число n_0, которое удовлетворяет следующему неравенству:

$$n_0 > \max\{n_q + 1, n\}. \tag{17}$$

Более точно n_0 будет определено в дальнейшем. Рассмотрим пачки интервалов Хаара — $\{\pi_{m \cdot n_0}(\Delta)\}_{m=1}^{\infty}$ и для каждого $m > 1$ из пачки $\pi_{mn_0}(\Delta)$ выделим интервалы

$$\{\Delta_{2^{mn_0}+j2^{n_0}-1}\}_{j=1}^{2^{(m-1)n_0}}. \tag{18}$$

Далее, для каждого $m \geqslant 1$ из системы (18) выделим подсистему интервалов

$$\{\Delta_j^{mn_0}\}_{j=1}^{j_m} \tag{19}$$

следующим образом: $\Delta_1^{n_0} = \Delta_{2^{n_0+1}-1}$, если же системы (19) уже выбраны для $m=1, 2, \cdots, s-1$, то $\{\Delta_j^{sn_0}\}_{j=1}^{j_s}$ — те интервалы из системы (18) при $m=s$, которые не пересекаются с уже выбранными. Очевидно, что

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{j_m} \Delta_j^{mn_0} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{2^{(m-1)n_0}} \Delta_{2^{mn_0}+j2^{n_0}-1} \supseteq E_{n_0}$$

(так как интервалы Хаара или не пересекаются, или один содержится в другом).

Отсюда, в силу (9), имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{j_m} |\Delta_j^{m \cdot n_0}| = 1.$$

Теперь выберем m_0 так, чтобы

$$\sum_{m=1}^{m_0} \sum_{j=1}^{j_m} |\Delta_j^{m \cdot n_0}| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Отметим, что согласно построению, интервалы системы

$$\{\{\Delta_j^{m \cdot n_0}\}_{j=1}^{j_m}\}_{m=1}^{m_0} \tag{21}$$

попарно не пересекаются и кроме того (в силу (17))

$$[\Delta_{j'}^{m' \cdot n_0}] - [\Delta_{j''}^{m'' \cdot n_0}] \geqslant 2^n, \tag{22}$$

когда или $m' > m''$, или $m' = m''$ и $j' > j''$, где $[\Delta]$ — индекс интервала Δ.

Для каждого $\Delta_j^{m\cdot n_0} = (\alpha_j^{m\cdot n_0}, \beta_j^{m\cdot n_0})$ из системы (21) положим

$$Q_j^{m\cdot n_0}(t) = Q_{\Delta_j^{m\cdot n_0}}(t) = \sum_{l=1}^{q} c_l h_{k_l}\left(\frac{t-\alpha_j^{m\cdot n_0}}{\beta_j^{m\cdot n_0}-\alpha_j^{m\cdot n_0}}\right), \tag{23}$$

где

$$h_{k_l}\left(\frac{t-\alpha_j^{m\cdot n_0}}{\beta_j^{m\cdot n_0}-\alpha_j^{m\cdot n_0}}\right) = 0, \text{ если } t \overline{\in} \Delta_j^{m\cdot n_0}.$$

Последний является полиномом по системе Хаара, так как $Q(t)$ удовлетворяет условию 1.1 и, следовательно, не содержит, как слагаемое, функцию $h_0(t)$. Теперь для каждого $m \geqslant 1$ определим полином

$$Q_m(t) = \sum_{j=1}^{2^{mn_0-n-1}} c_j^{(m)} h_{2^{m\cdot n_0-1}+j2^{n}-1}(t) + \sum_{j=1}^{j_m} Q_{\Delta_j^{m\cdot n_0}}(t), \tag{24}$$

где $c_j^{(m)} = 0$, $j \in [1, 2^{m\cdot n_0-n-1}]$.

Заметим, что в силу (17) и (22) полиномы $Q_{m_1}(t)$ и $Q_{m_2}(t)$ не имеют общих слагаемых, когда $m_1 \neq m_2$. Более того, если $m_1 > m_2$, то индекс произвольного слагаемого полинома $Q_{m_1}(t)$ превосходит индекс произвольного слагаемого полинома $Q_{m_2}(t)$ более, чем на 2^n. Отсюда сразу следует, что полином

$$P(t) = \sum_{m=1}^{m_0} Q_m(t) = \sum_{j=1}^{p} a_j h_{\mu_j}(t) \tag{25}$$

удовлетворяет утверждению 2.2. Утверждения 2.1 и 2.3 непосредственно следуют соответственно из условий 1.1 и 1.3, которым удовлетворяет полином $Q(t)$. Остается убедиться в справедливости 2.4 и 2.5.

Пусть

$$G_j^{m\cdot n_0} = \left\{ t : t \in \Delta_j^{m\cdot n_0};\ |Q_j^{mn_0}(t) - r| > \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

$$F = \bigcup_{m=1}^{m_0} \bigcup_{j=1}^{j_m} G_j^{mn_0} \cup \left\{ [0,1] - \bigcup_{m=1}^{m_0} \bigcup_{j=1}^{j_m} \Delta_j^{mn_0} \right\}.$$

Поскольку полином $Q_j^{mn_0}(t)$ получается из полинома $Q(t)$ сжатием на интервал $\Delta_j^{m\cdot n_0}$, следовательно, в силу 1.4 $\left(\text{для } \frac{\varepsilon}{2}\right)$ будем иметь

$$\operatorname{mes} G_j^{m\cdot n_0} < \frac{\varepsilon}{2} |\Delta_j^{m\cdot n_0}| \tag{26}$$

для произвольного интервала $\Delta_j^{m\cdot n_0}$. Из неравенств (20) и (26) получаем $\operatorname{mes} F \leqslant \varepsilon$. Отсюда сразу следует, что

$$\operatorname{mes} \{t ; |P(t) - r| > \varepsilon\} \leqslant \varepsilon,$$

так как интервалы системы (21) попарно не пересекаются, а слагаемые полинома $Q_j^{m\cdot n_0}(t)$ равны нулю вне интервала $\Delta_j^{mn_0}$. 2.4 доказано.

Далее, для полинома

$$Q(t)=\sum_{l=1}^{q} c_l h_{k_l}(t)$$

положим

$$\overline{Q}=\max_{l\in[1,\,q]}\ \max_{t\in[0,\,1]}\ \sum_{j=1}^{l} c_j h_{k_j}(t),$$

и пусть Q^* — количество отличных от тождественного нуля слагаемых полинома $Q(t)$. Если теперь $t_0\in F^c=[0,1]-F$, то $t_0\in\Delta_{j'}^{m'\cdot n_0}$ при некоторых j' и m', $1\leqslant j'\leqslant j_{m'}$ и $1\leqslant m'\leqslant m_0$. Если

$$S_i(P,\,t)=\sum_{j=1}^{i} a_j h_{\mu_j}(t) -$$

— i-ая частичная сумма полинома $P(t)$, то в силу (22), (24) и (25), в точке t_0 будем иметь

$$S_i(P,\,t_0)=0,\ \text{когда}\ 1\leqslant i\leqslant Q^*\sum_{m=1}^{m'-1} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0-n-1}, \tag{27}$$

$$S_i(P,\,t_0)=Q_{j'}^{m'\cdot n_0}(t_0),\ \text{когда}\ Q^*\sum_{m=1}^{m'} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0-n-1}\leqslant i\leqslant$$

$$\leqslant Q^*\sum_{m=1}^{m_0} j_m+\sum_{m=1}^{m_0} 2^{m\cdot n_0-n-1}=p \tag{28}$$

(p есть количество слагаемых полинома $P(t)$, см. (25)). Согласно (27) имеем

$$\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} S_i(P,\,t_0)=0,\ \text{когда}\ \nu\leqslant Q^*\sum_{m=1}^{m'-1} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{mn_0-n-1}. \tag{29}$$

Если же ν удовлетворяет неравенству

$$Q^*\sum_{m=1}^{m'-1} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0-n-1}\leqslant\nu\leqslant Q^*\sum_{m=1}^{m'} j_m+\sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0-n-1},$$

то исходя из (18), (19), (27), (28) и учитывая (23) получаем

$$\left|\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu} S_i(P,\,t_0)\right|\leqslant\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}|S_i(P,\,t_0)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^{m'\cdot n_0-n-1}}\overline{Q}\,Q^*\cdot j_{m'}\leqslant\frac{1}{2^{m'\cdot n_0-n-1}}\overline{Q}\cdot Q^* 2^{m'\cdot n_0-n_0}\leqslant\frac{\overline{Q}\cdot Q^*}{2^{n_0-n-1}}\cdot \tag{30}$$

Пусть теперь n_0, кроме неравенства (17), удовлетворяет также неравенству

$$\frac{\overline{Q}\cdot Q^*}{2^{n_0-n-1}}\leqslant|r|+\varepsilon.$$

Тогда, учитывая (29) и (30), получаем

$$\left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu} S_l(P, t_0)\right| \leqslant |r| + \varepsilon,$$

при

$$\nu \leqslant Q^* \sum_{m=1}^{m'} j_m + \sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0 - n - 1}.$$

Наконец, в случае, когда ν удовлетворяет неравенству

$$M = Q^* \sum_{m=1}^{m'} j_m + \sum_{m=1}^{m'} 2^{m\cdot n_0 - n - 1} < \nu \leqslant p,$$

исходя из (28) и (31) будем иметь ($t_0 \in F^c$)

$$\left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu} S_l(P, t_0)\right| \leqslant \left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{M} S_l(P, t_0)\right| + \left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=M+1}^{p} S_l(P, t_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\nu}(|r| + \varepsilon) + \left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=M+1}^{p} Q_{j'}^{m'\cdot n_0}(t_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{\nu}(|r| + \varepsilon) + \frac{1}{\nu}\sum_{l=M+1}^{p} (|r| + \varepsilon) = |r| + \varepsilon.$$

Учитывая, что t_0 — произвольная точка множества F^c, получаем, что полином $P(t)$ удовлетворяет утверждению 2.5 леммы 2. Лемма доказана.

Из леммы 2 легко следует

Лемма 3. *Для произвольной ступенчатой функции $F(t)$, определенной на отрезке $[0,1]$, для любого $\varepsilon \in (0,1)$ и для любых натуральных чисел n и N существует полином:*

$$P(t) = \sum_{j=1}^{p} c_j h_{k_j}(t) \quad (k_1 < k_2 < \cdots < k_p)$$

и множество $G \subset [0,1[$, обладающие следующими свойствами:

3.1 $k_1 > N$;

3.2 $k_{j+1} - k_j > 2^n$, $j \in [1, p-1]$;

3.3 $\sum_{j=1}^{p} |c_j h_{k_j}(t)|^{2+\varepsilon} \leqslant \varepsilon$, $t \in [0,1]$;

3.4 $\operatorname{mes} G \geqslant 1 - \varepsilon$;

3.5 $|P(t) - F(t)| < \varepsilon$, $t \in G$;

3.6 $\max_{\nu \in [1, p]} \left|\frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{l} c_j h_{k_j}(t)\right| < |F(t)| + \varepsilon$, $t \in G$.

Доказательство. Ясно, что не нарушая общности, лемму можно доказать в случае, когда интервалы постоянства функции $F(t)$ являются интервалами Хаара. Пусть $F(t)$ имеет вид

$$F(t)=\sum_{i=1}^{\lambda} r_i \psi_{\Delta_{\mu_i}}(t), \tag{32}$$

где $\psi_\Delta(t)$ — характеристическая функция интервала Δ, $\Delta_{\mu_i}\in\{\Delta\}$, $i\in[1,\lambda]$ и вместе с тем

$$\mu_1<\mu_2<\cdots<\mu_\lambda. \tag{33}$$

(В точках разрыва функция $F(t)$ может быть неопределенной или же принимать какие угодно значения).

С помощью леммы 2 определим полиномы

$$P_i(t)=\sum_{j=1}^{p_i} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t),$$

$i=1, 2,\cdots, \lambda$, удовлетворяющие следующим условиям:

3.7 $k_1^{(1)}>N$;

3.8 $k_1^{(i)}>k_{p_i-1}^{(i-1)}\geqslant 2^n$, $i\in[1,\lambda]$;

3.9 $k_{j+1}^{(i)}-k_j^{(i)}\geqslant 2^n$, $j\in[1, p_i-1]$, $i\in[1,\lambda]$;

3.10 $\sum\limits_{i=1}^{p_i} |c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t)|^{2+\varepsilon}\leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda}$, $t\in[0,1]$, $i\in[1,\lambda]$;

3.11 $\operatorname{mes} G_i=\operatorname{mes}\{t: |P_i(t)-r_i|>\varepsilon\}\leqslant\varepsilon$, $i\in[1,\lambda]$;

3.12 $\max\limits_{\nu\in[1,p_i]}\left|\frac{1}{\nu}\sum\limits_{l=1}^{\nu}\sum\limits_{j=1}^{l} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t)\right|\leqslant|r_i|+\varepsilon$, $t\overline{\in} G_i$, $i\in[1,\lambda]$.

Теперь положив

$$\Delta_{\mu_i}=(\alpha_{\mu_i}, \beta_{\mu_i}),\ i\in[1,\lambda],$$

составим выражение

$$P(F,t)=\sum_{i=1}^{\lambda}\sum_{j=1}^{p_i} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}\left(\frac{t-\alpha_{\mu_i}}{\beta_{\mu}-\alpha_{\mu_i}}\right),$$

где

$$h_{k_j^{(i)}}\left(\frac{t-\alpha_{\mu_i}}{\beta_{\mu_i}-\alpha_{\mu_i}}\right)=0, \text{ если } t\overline{\in}\Delta_{\mu_i}.$$

Имеем

$$P(F,t)=\sum_{j=1}^{p} c_j h_{k_j}(t),$$

так как $k_1^{(1)}>N\geqslant 0$ и $\Delta_{\mu_i}\in\{\Delta\}$, $i\in[1,\lambda]$.

Легко усмотреть, что $P(F, t)$ удовлетворяет утверждениям леммы 3. Действительно, 3.1—3.3 сразу следуют из 3.7, (32) и 3.8—3.10. Далее, на каждом интервале Δ_{μ_l} полином $P(F, t)$ получен из полинома $P_l(t)$ при помощи сжатия последнего на интервал Δ_{μ_l}, поэтому, если обозначим через G_l^* образ множества G_l при отображении отрезка (0,1) на интервал Δ_{μ_l} при помощи функции $\frac{t-\alpha_{\mu_l}}{\beta_{\mu_l}-\alpha_{\mu_l}}$, то из 3.11 будет следовать, что

$$\operatorname{mes} G_l^* \leqslant \varepsilon |\Delta_{\mu_l}|$$

и вместе с тем на множестве $\Delta_{\mu_l} - G_l^*$ будем иметь

$$|P(F, t)-F(t)| = \left| P_l\left(\frac{t-\alpha_{\mu_l}}{\beta_{\mu_l}-\alpha_{\mu_l}}\right) - r_l \right| \leqslant \varepsilon. \tag{35}$$

Положим

$$G = [0,1] - \bigcup_{l=1}^{\lambda} G_l^*.$$

Тогда из (34) следует

$$\operatorname{mes} G = 1 - \sum_{l=1}^{\lambda} \operatorname{mes} G_l^* \geqslant 1 - \sum_{l=1}^{\lambda} \varepsilon |\Delta_{\mu_l}| = 1 - \varepsilon,$$

а из (35) получаем

$$|P(F, t) - F(t)| \leqslant \varepsilon, \ t \in G.$$

Для завершения доказательства леммы 3 остается убедиться в справедливости утверждения 3.6. Последнее сразу следует из 3.12, если учесть, что интервалы Δ_{μ_l} попарно не пересекаются и вместе с тем

$$P(F, t) = P_l\left(\frac{t-\alpha_{\mu_l}}{\beta_{\mu_l}-\alpha_{\mu_l}}\right)$$

на каждом интервале Δ_{μ_l}. Лемма доказана.

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $F=\{F_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность всевозможных ступенчатых функций, интервалы постоянства которых являются интервалами Хаара и которые принимают рациональные значения.

Зафиксируем какую-либо последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i < 1. \tag{36}$$

Теперь при помощи леммы 3 последовательно построим полиномы

$$P(F_i, t) = \sum_{j=1}^{p_i} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t),$$

$i = 1, 2, \cdots$, удовлетворяющие следующим условиям:

4.1 $\quad k_{j+1}^{(i)} - k_j^{(i)} \geqslant 2^i,\ j \in [1, p_i - 1],\ i > 1;$

4.2 $\quad k_1^{(i)} - k_{p_{i-1}}^{(i-1)} \geqslant 2^i,\ i \geqslant 2;$

4.3 $\quad \sum_{j=1}^{p_i} |c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t)|^{2+\varepsilon_i} \leqslant \varepsilon_i,\ t \in [0,1], i > 1;$

4.4 $\quad \text{mes } G_i = \text{mes } \{t : |P(F_i, t) - F_i(t)| \leqslant \varepsilon_i\} \geqslant 1 - \varepsilon_i;$

4.5 $\quad \max_{\nu \in [1, p_i]} \left| \frac{1}{\nu} \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{l} c_j^{(i)} h_{k_j^{(i)}}(t) \right| < |F_i(t)| + \varepsilon_i,\ t \in C_i..$

Если в ряде

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(F_i, t)$$

раскроем внутренние суммы, то в силу 4.1 и 4.2 получим ряд вида

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j h_{k_j}(t) \quad (k_1 < k_2 < \cdots), \tag{37}$$

причем из (36) и 4.3 сразу следует, что ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |c_j h_{k_j}(t)|^{2+\varepsilon} \tag{38}$$

сходится равномерно на отрезке [0,1] для любого $\varepsilon \in (0,1)$.

Убедимся, что последовательность $\{k_j\}_1^{\infty}$ имеет плотность нуль, а именно

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\ \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m} = 0. \tag{39}$$

При фиксирооанном m из 4.1 и 4.2 непосредственно следует, что на любом отрезке $[n, n + m]$ при достаточно большом n может содержаться только одно число вида k_j, следовательно

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\Lambda(n+m) - \Lambda(n)}{m} = \frac{1}{m}.$$

Отсюда непосредственно получаем (39). Остается убедиться, что ряд (37) удовлетворяет первому утверждению теоремы.

Пусть $f(t) \in \bar{S}[0,1]$, причем

$$E = \{t : |f(t)| < +\infty\},$$

$$E^+ = \{t : f(t) = +\infty\},$$
$$E^- = \{t : f(t) = -\infty\}.$$

Определим последовательность натуральных чисел $i_1 < i_2 < \cdots$ и последовательность функций $\{f_n(t)\}_1^\infty$ следующим образом. Положим

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t), & t \in E, \\ +1, & t \in E^+, \\ -1, & t \in E^-, \end{cases}$$

и исходя из C-свойства Лузина, найдем функцию $F_{i_1}(t) \in F$, такую, чтобы

$$\text{mes}\,\{t: |F_{i_1}(t) - f_1(t)| > \varepsilon_1\} \leqslant \varepsilon_1.$$

Если числа $i_1 < i_2 < \cdots < i_{n-1}$ и функции $f_1(t), \cdots, f_{n-1}(t)$ уже определены, то $f_n(t)$ и i_n определяются следующим образом: положим

$$f_n(t) = \begin{cases} f_{n-1}(t) - P(F_{i_{n-1}}, t), & t \in E, \\ +1, & t \in E^+, \\ -1, & t \in E^-, \end{cases}$$

и снова воспользовавшись C-свойством Лузина, найдем функцию $F_{i_n}(t)$ такую, чтобы $i_n > i_{n-1}$ и вместе с тем

$$\text{mes}\,\{t: |F_{i_n}(t) - f_n(t)| \geqslant \varepsilon_n\} \leqslant \varepsilon_n.$$

Итак, существуют последовательности $\{i_n\}_1^\infty$ и $\{f_n(t)\}_1^\infty$, которые удовлетворяют следующим условиям:

1) $$i_1 < i_2 < \cdots < i_n < \cdots; \tag{40}$$

2) $$f_n(t) = \begin{cases} f_{n-1}(t) - P(F_{i_{n-1}}, t), & t \in E \\ +1, & t \in E^+, \\ -1, & t \in E^-; \end{cases} \tag{41}$$

3) $$\text{mes}\,\{t: |F_{i_n}(t) - f_n(t)| > \varepsilon_n\} \leqslant \varepsilon_n \tag{42}$$

для любого $n \geqslant 1$, причем предполагается, что $f_0(t) \equiv f(t)$ и $P(F_{i_0}, t) \equiv 0$.

Составим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(F_{i_n}, t). \tag{43}$$

Если в ряде (43) раскроем внутренние суммы, то в силу (40), 4.1 и 4.2 получим некоторый подряд

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} c_{j_\mu} h_{k_{j_\mu}}(t) \tag{44}$$

ряда (37). Убедимся, что ряд (44) суммируется методом (С, 1) к $f(t)$ п. в. на отрезке [0,1].

Положим

$$H_n = \{t : |F_{i_n}(t) - f_n(t)| \leqslant \varepsilon_n\}. \tag{45}$$

Из соотношений (36), 4.4 и (42) непосредственно следует, что

$$\operatorname{mes} E = \operatorname{mes} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E), \tag{46}$$

$$\operatorname{mes} E^+ = \operatorname{mes} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E^+), \tag{47}$$

$$\operatorname{mes} E^- = \operatorname{mes} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E^-) \tag{48}$$

Положим $q_s = \sum_{n=1}^{s} p_{l_n}$, $q_0 = p_0 = 0$ и пусть $\nu \in [q_s, q_{s+1})$. Тогда $\sigma_\nu(t)$ — $(C, 1)$-средние ряда (44) в произвольной точке $t \in [0, 1]$ можно представить в виде

$$\sigma_\nu(t) = \frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu}\sum_{\mu=1}^{l} c_{j_\mu} h_{k_{j_\mu}}(t) = \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{l=q_\lambda+1}^{q_{\lambda+1}}\sum_{\mu=1}^{l} c_{j_\mu} h_{k_{j_\mu}}(t) +$$

$$+ \frac{1}{\nu}\sum_{l=q_s+1}^{\nu}\sum_{\mu=1}^{l} c_{j_\mu} h_{k_{j_\mu}}(t) =$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{l=q_\lambda+1}^{q_{\lambda+1}}\left\{\sum_{n=1}^{\lambda} P(F_{l_n}, t) + \sum_{j=1}^{l-q_\lambda} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j^{(l_{\lambda+1})}}(t)\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\nu}\sum_{l=q_s+1}^{\nu}\left\{\sum_{n=1}^{s} P(F_{l_n}, t) + \sum_{j=1}^{l-q_s} c_j^{(l_{s+1})} h_{k_j^{(l_{s+1})}}(t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}(q_{\lambda+1} - q_\lambda)\sum_{n=1}^{\lambda} P(F_{l_n}, t) + \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j^{(l_{\lambda+1})}}(t) +$$

$$+ \frac{1}{\nu}(\nu - q_s)\sum_{n=1}^{s} P(F_{l_n}, t) + \frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu-q_s}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{s+1})} h_{k_j^{(l_{s+1})}}(t). \tag{49}$$

Положим

$$\gamma_\nu(t) = \sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{1}{\nu}\sum_{n=1}^{\lambda} p_{l_{\lambda+1}} P(F_{l_n}, t) + \frac{\nu - q_s}{\nu}\sum_{n=1}^{s} P(F_{l_n}, t), \tag{50}$$

$$\beta_\nu(t) = \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=0}^{s-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j^{(l_{\lambda+1})}}(t) +$$

$$+ \frac{1}{\nu}\sum_{l=1}^{\nu-q_s}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{s+1})} h_{k_j^{(l_{s+1})}}(t). \tag{51}$$

Рассмотрим бесконечную матрицу $\|\alpha_{\nu\lambda}\|$ (ν — индекс строк, λ — индекс столбцов), где

$$\alpha_{\nu\lambda}=\begin{cases}\frac{1}{\nu}\,p_{l_{\lambda+1}}, & \lambda\in[0,\ s-1],\\ \frac{1}{\nu}\,(\nu-q_s), & \lambda=s,\\ 0, & \lambda\geqslant s+1,\end{cases}$$

при $\nu\in[q_s,\ q_{s+1})$.

Для каждого фиксированного λ имеем

$$\lim_{\nu\to\infty}\alpha_{\nu\lambda}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}\,p_{l_{\lambda+1}}=0.$$

Вместе с тем

$$\sum_{\lambda=0}^{s-1}\frac{1}{\nu}\,p_{l_{\lambda+1}}+\frac{1}{\nu}(\nu-q_s)=\frac{1}{\nu}\left\{\sum_{\lambda=0}^{s-1}p_{l_{\lambda+1}}+\nu-q_s\right\}=\frac{1}{\nu}\,\{q_s+\nu-q_s\}=1.$$

Кроме того, очевидно, что $\alpha_{\nu\lambda}>0$ для всех ν и λ. Таким образом, матрица $\|\alpha_{\nu\lambda}\|$ является вполне регулярной матрицей. Следовательно, согласно известной теореме (см., например, [10], стр. 75) будем иметь, что любой сходящийся к конечной или бесконечной сумме ряд суммируется матрицей $\|\alpha_{\nu\lambda}\|$ к той же сумме. Отсюда, так как $\sigma_\nu(t)=\gamma_\nu(t)+\beta_\nu(t)$, то для того, чтобы доказать суммируемость ряда (44) методом (C, 1) к $f(t)$ п. в. на отрезке [0.1], достаточно убедиться, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}P(F_{l_n},\ t)=f(t) \tag{52}$$

п. в. на [0,1] и, вместе с тем

$$\lim_{\nu\to\infty}\beta_\nu(t)=0 \text{ п. в. на } E, \tag{53}$$

$$|\beta_\nu(t)|\leqslant\text{const п. в. на } E^+\cup E^-. \tag{54}$$

Пусть t_0—произвольная точка множества

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{n=m}^{\infty}(G_{l_n}\cap H_n\cap E), \tag{55}$$

тогда существует m_0 такое, что

$$t_0\in\bigcap_{n=m_0}^{\infty}(G_{l_n}\cap H_n\cap E). \tag{56}$$

Так как $t_0\in E$, следовательно, в силу (41) имеем

$$|f(t_0)-\sum_{n=1}^{m}P(F_{l_n},\ t_0)|=|f_1(t_0)-\sum_{n=1}^{m}P'(F_{l_n},\ t_0)|=$$

$$= |f_2(t_0) - \sum_{n=2}^{m} P(F_{l_n}, t_0)| = \cdots = |f_{m-1}(t_0) - \sum_{n=m-1}^{m} P(F_{l_n}, t_0)| =$$

$$= |f_m(t_0) - P(F_{l_m}, t_0)| \leqslant |f_m(t_0) - F_{l_m}(t_0)| + |F_{l_m}(t_0) - P(F_{l_m}, t_0)|.$$

Если теперь $m > m_0$, то воспользовавшись соотношениями 4.4, (45) и (56) получаем

$$|f(t_0) - \sum_{n=1}^{m} P(F_{l_n}, t_0)| \leqslant 2\varepsilon_m.$$

Следовательно, (52) имеет место в произвольной точке множества (55) и в силу (46) почти в каждой точке множества E.

Пусть теперь t_0 — произвольная точка множества

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E^+). \tag{57}$$

Тогда

$$t_0 \in \bigcap_{n=m_0}^{\infty} (G_{l_n} \cap H_n \cap E^+) \tag{58}$$

для некоторого $m_0 \geqslant 1$. Так как $t_0 \in E^+$, следовательно, воспользовавшись соотношениями (36), 4.4, (41) и (42), при $m > m_0$ получаем

$$\sum_{n=1}^{m} P(F_{l_n}, t_0) \geqslant \sum_{n=1}^{m_0-1} P(F_{l_n}, t_0) + \sum_{n=m_0}^{m} [F_{l_n}(t_0) - \varepsilon_{l_n}] \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{m_0-1} P(F_{l_n}, t_0) + \sum_{n=m_0}^{m} [f_n(t_0) - \varepsilon_n] - \sum_{n=m_0}^{m} \varepsilon_n > \sum_{n=1}^{m_0-1} P(F_{l_n}, t_0) +$$

$$+ \sum_{n=m_0}^{m} (1 - \varepsilon_n) - 1 > m - m_0 - 2 + \sum_{n=1}^{m_0-1} \cdots.$$

Отсюда сразу следует, что (52) имеет место в произвольной точке множества (57) и в силу (47) почти в каждой точке множества E^+.

Доказательство справедливости (52) п. в. на E^- проводится аналогично. Убедимся в справедливости (53). Пусть t_0 удовлетворяет соотношению (56). Тогда (52) имеет место в точке t_0 и $|f(t_0)| < +\infty$. Отсюда, в силу (36), (42) и 4.4, сразу получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} |F_{l_n}(t_0)| < +\infty.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ зафиксируем $n_0 > m_0$, такое, чтобы

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} |F_{l_n}(t_0)| < \varepsilon \tag{59}$$

и вместе с тем

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \varepsilon_n < \varepsilon. \tag{60}$$

Пусть теперь $s > n_0$ и $\nu \in [q_s, q_{s+1})$. Тогда воспользовавшись 4.5 будем иметь

$$|\beta_\nu(t_0)| \leqslant \frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j}^{(l_{\lambda+1})}(t_0)\right| +$$

$$+\frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=n_0}^{s-1} p_{l_{\lambda+1}}\left|\frac{1}{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j}^{(l_{\lambda+1})}(t_0)\right| +$$

$$+\frac{1}{\nu}(\nu-q_s)\left|\frac{1}{\nu-q_s}\sum_{l=1}^{\nu-q_s}\sum_{j=1}^{l} c_j^{(l_{\lambda+1})} h_{k_j}^{(l_{\lambda+1})}(t_0)\right| \leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l}\cdots\right| + \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=n_0}^{s-1} p_{l_{\lambda+1}}\{|F_{l_{\lambda+1}}(t_0)| + \varepsilon_{\lambda+1}\} +$$

$$+\frac{1}{\nu}(\nu-q_s)\{|F_{l_{s+1}}(t_0)| + \varepsilon_{s+1}\}. \qquad (61)$$

Отсюда, учитывая (59) и (60), получаем

$$|\beta_\nu(t_0)| \leqslant \frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l}\cdots\right| + \sum_{\lambda=n_0}^{s}|F_{l_{\lambda+1}}(t_0)| +$$

$$+\sum_{\lambda=n_0}^{s}\varepsilon_{\lambda+1} < \frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l}\cdots\right| + 2\varepsilon.$$

Так как первое слагаемое последнего выражения стремится к нулю, когда $\nu \to \infty$, а ε — произвольное, следовательно (53) имеет место в каждой точке множества (55) и в силу (46) почти в каждой точке множества E.

Если же t_0 принадлежит множеству (57), то имеет место (58), а также неравенство (61), где $s > m_0$ и $\nu \in [q_s, q_{s+1})$. Следовательно, учитывая (36), (41) и (45), будем иметь

$$|\beta_\nu(t_0)| \leqslant \frac{1}{\nu}\left|\sum_{\lambda=0}^{n_0-1}\sum_{l=1}^{p_{l_{\lambda+1}}}\sum_{j=1}^{l}\cdots\right| + \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=n_0}^{s-1} p_{l_{\lambda+1}}\{1+2\varepsilon_{\lambda+1}\} +$$

$$+\frac{1}{\nu}(\nu-q_s)\{1+2\varepsilon_{s+1}\} < \frac{1}{\nu}\sum_{\lambda=1}^{s-1} p_{l_{\lambda+1}} + \frac{1}{\nu}(\nu-q_s) + 2 =$$

$$= \frac{1}{\nu}\{q_s + \nu - q_s\} + 2 = 3$$

для достаточно больших ν.

Отсюда, в силу (47), получаем, что (54) имеет место п. в. на E^+. Случай множества E^- рассматривается аналогичным образом.

Таким образом, имеют место соотношения (52) — (54). Теорема 1 доказана.

Армянский государственный
педагогический институт им. Х. Абовяна Поступила 9.X.1980

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ. Հաարի շարքերով $+\infty$-ի ներկայացման մասին (C, 1) գումարման եղանակով *(ամփոփում)*

Հայտնի է, որ Հաարի լրիվ սիստեմով շարքերը չեն կարող հանրագումարվել $+\infty$-ի և ոչ մի (C, $\alpha>-1$) գումարման եղանակով դրական չափ ունեցող բազմությունների վրա։ Ներկա աշխատանքի հիմնական արդյունքը հետևյալն է՝ գոյություն ունի

$$\Omega \sim \sum_{l=1}^{\infty} a_l X_{k_l}(x) \quad (k_1<k_2<\cdots)$$

շարք, որը (C, 1) եղանակով հանրագումարվում է $+\infty$-ի համարյա ամենուրեք (0,1)-ի վրա, ընդ որում Ω-ն կարելի է կառուցել այնպիսին, որ $\{k_l\}$ հաջորդականությունը ունենա 0 խտություն, իսկ a_l-երը ձգտեն 0-ի թույլատրելիին մոտ արագությամբ։

L. A. SHAHINIAN. *On the summation to $+\infty$ of Haar's series by the (C, 1) method*
(summary)

It is known that Haar's series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k X_k(x)$$

cannot be summated to $+\infty$ by any methods $(C, \alpha > -1)$ on the sets of positive measure.

In this paper we have constructed

$$\Omega \sim \sum_{l=1}^{\infty} a_l X_{k_l}(x) \quad (k_1<k_2<\cdots)$$

such, that Ω is $(C, 1)$ summable to $+\infty$ *a. e.* on the (0,1) and $a_l \to 0$ with the rate that is near to admissible.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. А. Шагинян.* О суммируемости к бесконечности тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша, Мат. сб., 108 (150), № 3, 1979, 457—470.
2. *А. А. Талалян* и *Ф. Г. Арутюнян.* О сходимости рядов по системе Хаара к $+\infty$, Мат. сб., 66 (108), 1965, 240—247.
3. *Л. А. Шагинян.* О суммируемости рядов по системе Хаара методами (C, α) и (H, k), ДАН АрмССР, LVII, № 4, 1973, 206—211.
4. *А. А. Талалян.* О рядах, универсальных относительно перестановок, Изв. АН СССР, сер. матем., 24, № 4, 1960, 567—604.
5. *Ф. Г. Арутюнян.* О рядах по системе Хаара, ДАН АрмССР, 42, № 3, 1966, 134—140.
6. *М. Кац.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, ИИЛ, М., 1963.

7. *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, Изд. «Наука», М., 1974.

8. *J. J. Price*. Sparse subsets of orthonormal systems, Proceedings of the Amer. Math. Soc., 35, № 1, 1972, September.

9. *М. Б. Петровская*. О нуль-рядах по системе Хаара и множествах единственности, Изв. АН СССР, сер. матем., 28 : 4, 1964, 773—798.

10. *Г. Харди*. Расходящиеся ряды, ИИЛ, М., 1951.