С. А. ГРИГОРЯН

МАКСИМАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

0°. Пусть B — банахова алгебра и A — замкнутая подалгебра алгебры B . Говорят, что A является максимальной подалгеброй алгебры B , если каждая замкнутая подалгебра алгебры B , содержащая алгебру A , совпадает либо с A , либо с B . В случае, когда A — равномерная алгебра на некотором компакте X и $B = C(X)$, алгебру A называют максимальной.

Примером максимальной алгебры может служить алгебра, полученная с помощью реализации диск-алгебры на окружность (теорема Вермера).

Этот результат дал толчок появлению работ о максимальных подалгебрах банаховых алгебр. Диапазон исследований, посвященных этой тематике, можно проследить, например, по работам К. Гофмана и И. Зингера [3], Ф. Р. Бонсола [4], Е. А. Горина [5], Е. А. Горина и В. М. Золотаревского [6], Е. М. Чирки [7], Р. Блюментала [8], П. Паепа [9] и др.

В данной заметке также рассматриваются вопросы максимальнойности, в частности, обобщается следующий результат: если $R(K)$ — равномерная алгебра на K , порожденная рациональными функциями и $P(K)$ — равномерная алгебра на K , порожденная полиномами, то в случае, когда K — круговое кольцо, $P(K)$ является максимальной подалгеброй в $R(K)$.

1°. Пусть G — компактная абелева группа, группой характеров которой является некоторая подгруппа Γ аддитивной группы вещественных чисел R . Рассмотрим компакт $X = G \times [1/2, 1]$ — прямое произведение группы G на отрезок $[1/2, 1]$. Каждому $\alpha \in \Gamma$ поставим в соответствие непрерывную на X функцию $\varphi_\alpha: \varphi_\alpha(g \times r) = \alpha(g) \cdot r^\alpha$, $g \times r \in X$. Полученное семейство функций обозначим через Φ . Очевидно, на Φ можно задать групповую структуру так, что отображение $\alpha \rightarrow \varphi_\alpha$ есть изоморфизм группы Γ на группу Φ .

Пусть A и B — равномерные алгебры на X , порожденные функциями из $\Phi_0 = \{\varphi_\alpha \in \Phi, \alpha \geq 0\}$ и Φ соответственно.

Данная работа посвящена изучению этих алгебр. В частности, доказывается, что A является максимальной подалгеброй алгебры B , т. е. любая замкнутая подалгебра алгебры B , содержащая A , совпадает либо с A , либо с B .

Интерес, возникший к этим алгебрам, объясняется тем, что в случае, когда G — единичная окружность, а $\Gamma = Z$, алгебра A сопа-

дает с $P(K)$ — равномерной алгеброй на компакте $K = \{z \in \mathbb{C}; 1/2 \leq |z| \leq 1\}$, порожденной полиномами, а B совпадает с $R(K)$ — равномерной алгеброй на K , порожденной рациональными функциями с полюсами вне K .

В дальнейшем для любого замкнутого множества $F \subset X$ через A_F будем обозначать равномерное замыкание сужения алгебры A на множество F , а через G_α будем обозначать слой $G \times \{\alpha\}$, $1/2 \leq \alpha \leq 1$.

Лемма 1. Для равномерной алгебры A выполняются следующие условия:

а) пространство максимальных идеалов M_A алгебры A получается из прямого произведения $G \times [0, 1]$ путем отождествления в точку слоя $G \times \{0\}$;

б) граница Шилова ∂A алгебры A — есть компакт G_1 ;

в) алгебра A_{G_α} является максимальной алгеброй Дирихле, $1/2 \leq \alpha \leq 1$.

Доказательство. Для доказательства леммы укажем другой метод построения алгебры A , отличный от вышеуказанного.

Пусть D — равномерная алгебра на G , порожденная характеристиками из $\Gamma_0 = \{\alpha \in \Gamma, \alpha > 0\}$. Пространство максимальных идеалов M_D алгебры D с точностью до гомеоморфизма совпадает с M_A , и гельфандовское представление алгебры A на M_A есть в точности гельфандовское представление алгебры D на это же пространство. Поэтому равномерная алгебра A получается из сужения гельфандовского представления $\tilde{D}$ алгебры D на множество $X \subset M_A$, т. е. $\tilde{D}_X = A$. Для $\tilde{D}_X$ условия а), б) и в) верны (см. [1], стр. 219–226), следовательно, эти условия верны и для алгебры A . Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $x_0 \in X$. Тогда найдется такая замкнутая окрестность $V \subset X$ точки x_0 , что:

а) $A_V = B_V$;

б) $M_{A_V} = V$.

Доказательство. а). Пусть $\varphi \in \Phi_0$, и W — замкнутая полиномиально выпуклая окрестность точки $\varphi(x_0)$ и $V = \{x \in X, \varphi(x) \in W\}$. Заметим, что поскольку $\varphi(x_0) \neq 0$, можно предположить, что $0 \notin W$. Тогда, применив теорему Мергеляна и теорему 5.1 из [1], стр. 23, получим $\varphi_V \in A_V^{-1}$. Полугруппа $\Gamma_0 = \{\alpha \in \Gamma, \alpha \geq 0\}$ задает полный архимедов порядок на Γ . Поэтому Φ_0 архимедово упорядочивает Φ , а так как $\varphi|_V \in A_V^{-1}$, получим $\Psi|_V \in A_V$ для любого $\Psi \in \Phi$. Следовательно, $A_V = B_V$.

Условие б) немедленно следует из построения множества V и леммы 1, а). Лемма доказана.

Лемма 3. Для алгебры B справедливы следующие утверждения:

а) пространство максимальных идеалов M_B алгебры B совпадает с X ;

б) граница Шилова ∂B алгебры B есть объединение множеств G_1 и $G_{1/2}$;

в) $B_{\sigma_a} = C(G_a)$ для любого $a \in [1/2, 1]$;

г) равномерное замыкание $\text{Re}^0 B$ сужения $\text{Re} B$ на ∂B является гиперплоскостью в $C_R(\partial B)$ —пространстве всех непрерывных вещественнозначных функций на ∂B .

Доказательство. Справедливость условий а), б) и в) немедленно следует из построения алгебры B и леммы 1. Докажем условие г).

Рассмотрим на ∂B функцию

$$\psi(x) = \begin{cases} 1; & x \in G_1 \\ 0; & x \in G_{1/2}. \end{cases}$$

Пусть K — круговое кольцо в $\mathbb{C}^1$ с центром в начале координат. Тогда линейная оболочка $\text{Re} R(K)$ и функции $\log|z|$ плотны в $C_R(\partial B)$, где ∂R — граница Шилова алгебры $R(K)$ (см. [1], стр. 159). Воспользовавшись этим фактом, покажем, что линейная оболочка $\text{Re}^0 B$ и ψ плотны в $C_R(\partial B)$. Действительно, из только что указанного утверждения следует, что для любого $\varphi \in \Phi$ функции вида

$$\varphi^0 = \begin{cases} \text{Re } \varphi; & x \in G_1 \\ 0; & x \in G_{1/2} \end{cases}, \quad \varphi_0 = \begin{cases} 0; & x \in G_1 \\ \text{Re } \varphi; & x \in G_{1/2} \end{cases}$$

принадлежат замыканию линейной оболочки $\text{Re}^0 B$ и функции ψ . А поскольку A_{σ_i} — алгебра Дирихле, $i = 1, 1/2$ (лемма 1), то линейная оболочка функций φ^0 и φ_0 , $\varphi \in \Phi$, плотна в $C_R(\partial B)$. Покажем, что ψ не принадлежит $\text{Re}^0 B$. В противном случае нашлась бы функция $f \in B_{\partial B}$, для которой $|\text{Re} f - \psi| < 1/4$. Поскольку $\psi|_{\sigma_1} \equiv 1$, $\psi|_{\sigma_{1/2}} \equiv 0$, в комплексной плоскости найдутся два полиномиально выпуклых непесекающихся множества F_1 и F_2 , таких, что $f(G_1) \subset F_1$ а $f(G_{1/2}) \subset F_2$. Теперь, применив теорему Ока-Вейля, получим, что функцию, равную 0 на F_1 и 1 на F_2 , можно приблизить полиномами на множестве $F_1 \cup F_2$. А это означает, что существует функция $g \in B_{\partial B}$, равная 0 на G_1 и 1 на $G_{1/2}$. Но по условию в) данной леммы это означает, что $B_{\partial B} = C(\partial B)$. Пришли к противоречию с условием а). Следовательно, $\text{Re}^0 B$ — гиперплоскость в $C_R(\partial B)$. Лемма доказана.

Следствие 1. Пусть $f \in B$ такая, что $f|_{\sigma_1} \equiv 0$. Тогда $f \equiv 0$.

Доказательство. Мера μ_0 , заданная на $G_1 \cup G_{1/2}$, $\mu_0|_{\sigma_1} = \sigma$, $\mu_0|_{G_{1/2}} = -\sigma$, где σ — нормированная мера Хаара группы G , ортогональна к алгебре B , так как для любого $\varphi \in \Phi$, $\int \varphi d\mu_0 = 0$. Предположим, что существует $f \in B$ такая, что $f|_{\sigma_1} \equiv 0$, $f|_{\sigma_{1/2}} \neq 0$. Тогда из условия г) леммы 3 следует

$$f \cdot B = \{g \in C(G_1 \cup G_2); g|_F = 0\},$$

где

$$F = \{x \in G_1 \cup G_2; f(x) = 0\}.$$

Поскольку $f|_{\sigma_{1/2}} \neq 0$, то найдется открытое множество U в $G_{1/2}$ и положительная функция $g \in f \cdot B$, равная 1 на U . Тогда

$$\int_X g d\gamma_0 \geq \int_U g d\gamma > 0.$$

Пришли к противоречию.

Лемма 4. Пусть $f \in B$. Предположим, что для некоторого α , $1/2 \leq \alpha \leq 1$, $f|_{\sigma_\alpha}$ принадлежит A_{σ_α} . Тогда $f \in A$.

Доказательство. Пусть μ — такая регулярная борелевская мера на X , что $\text{supp } \mu = G_1 \cup G_\alpha$, $\mu|_{G_1} = \nu$, $\mu|_{G_\alpha} = -\nu$, где ν — нормированная мера Хаара группы G . Мера μ ортогональна к B , следовательно и к A . А поскольку мера $\gamma = -\mu|_{G_\alpha}$ является представляющей мерой некоторого мультипликативного функционала алгебры A (так как $\int_X \varphi d\gamma = 0$ для всех $\varphi \in \Phi_0 \setminus \{1\}$) и $f|_{\sigma_\alpha} \in A_{\sigma_\alpha}$, то для любого $g \in A$

имеем

$$\int_X f \cdot g d\gamma = \int_{\sigma_\alpha} f g d\gamma = \int_{\sigma_\alpha} f d\gamma \cdot \int_{\sigma_\alpha} g d\gamma.$$

Рассмотрим теперь меру $\gamma_0 = \mu|_{G_\alpha}$, которая является также представляющей мерой алгебры A . Так как $\gamma_0 - \gamma$ ортогональна к B , то для всех $g \in A$ имеем

$$\int_{\sigma_\alpha} f g d\gamma_0 = \int_{\sigma_\alpha} f g d\gamma,$$

но

$$\int_{\sigma_\alpha} f d\gamma = \int_{\sigma_\alpha} f d\gamma_0, \quad \int_{\sigma_\alpha} g d\gamma = \int_{\sigma_\alpha} g d\gamma_0.$$

Повтому

$$\int_{\sigma_\alpha} f g d\gamma_0 = \int_{\sigma_\alpha} f d\gamma_0 \cdot \int_{\sigma_\alpha} g d\gamma_0,$$

A_{σ_α} — максимальная алгебра и G_1 — граница Шилова алгебры A , следовательно, $f|_{\sigma_\alpha} \in A_{\sigma_\alpha}$. Теперь, применив следствие леммы 3, получим $f \in A$. Лемма доказана.

Воспользовавшись леммами 1—4 докажем следующую теорему.

Теорема 1. Алгебра A является максимальной подалгеброй алгебры B .

Доказательство. Пусть D — равномерная алгебра на X , порожденная функциями из A и некоторой функцией $g \in B$. Покажем, что D совпадает либо с A , либо с B . Рассмотрим непрерывное ото-

бражение $\pi: M_D \rightarrow M_A$; $\pi(m)(g) = m(g)$, $g \in A$ и покажем, что $\pi^{-1}(X) = X$. Пусть $m \in M_D$ такое, что $\pi(m) \in G_1$. Поскольку каждая точка множества G_1 есть обобщенная точка пика для A (лемма 1), а, следовательно, и для D , то носитель представляющей меры функционала m совпадает с $\pi(m)$. Поэтому $m = \pi(m)$. Таким образом, $\pi^{-1}(G_1) = G_1$.

Пусть $\varphi \in \Phi_0$ и π_φ — отображение из M_D в C ; $\pi_\varphi(m) = m(\varphi)$. При таком отображении образом X будет круговое кольцо вида $K = \{z \in C; \beta \leq |z| \leq 1\}$. Пусть теперь $m_0 \in M_D$ такое, что $\pi(m_0) \in X \setminus \partial B$. Не теряя общности можно предположить, что $\beta < \pi_\varphi(m_0) < 1$. Тогда множество $V = \left\{ z \in K; |\arg z| \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ будет замкнутой окрестностью точки $\pi_\varphi(m_0)$.

Рассмотрим два замкнутых в M_B множества:

$$V_1 = \{m \in M_D; \pi_\varphi(m) \in V\}$$

и

$$V_2 = \{m \in X; \pi_\varphi(m) \in V\}.$$

Из леммы 2 следует, что алгебра $A_2 = \{f \circ \pi; f \in A_{V_1}\}$ есть замкнутая подалгебра алгебры $A_1 = D_{V_1}$ и, кроме того, для любого $g_1 \in A_1$ найдется такое $g_2 \in A_2$, что $(g_1 - g_2)|_V = 0$. Граница Шоке алгебры A_1 , в силу теоремы Росси о локальном принципе максимума модуля, содержится в $\pi_\varphi^{-1}(\partial V)$, где ∂V — топологическая граница V .

Пусть ν — представляющая мера Иенсена для m_0 алгебры A_1 , сосредоточенная на ∂A_1 . Тогда мера ν

$$\nu(E) = \int \chi_{\pi_\varphi^{-1}(E)} d\mu,$$

где $\chi_{\pi_\varphi^{-1}(E)}$ — характеристическая функция множества $\pi_\varphi^{-1}(E)$, сосредоточена на ∂V и является представляющей мерой для точки $\pi_\varphi(m_0) \in \text{int } V$ равномерной алгебры $P(\partial V)$, порожденной полиномами на ∂V . Алгебра $P(\partial V)$ — максимальная подалгебра в $C(\partial V)$ и поэтому $\nu(F) > 0$, где $F = \{z \in V; |z| = 1\}$. Если теперь $m_0 \neq \pi(m_0)$, то из вышесказанного следует, что найдется $g \in A_1$ такое, что $g|_V = 0$, $m_0(g) \neq 0$, $\pi(m_0)(g) = 0$. Тогда, поскольку μ — мера Иенсена

$$\log |m_0(g)| < \int_{\pi_\varphi^{-1}(F)} \log |g| d\mu + \int_{V_1 \setminus \pi_\varphi^{-1}(F)} \log |g| d\mu.$$

Первый интеграл равен $-\infty$, так как $\pi_\varphi^{-1}(F) \subset V_2$. Отсюда $m_0(g) = 0$. Пришли к противоречию. Таким образом, если $m \in M_D$ такое, что $\pi(m) \in X \setminus G_{1/2}$, то $m = \pi(m)$. Наконец, если $M_D = X$ и все функции из Φ обратимы в D , то D совпадает с B . Если же $M_D \supset X$, то граница Шилова сужения гельфандовского представления алгебры D на множество $F = \overline{M_D} \setminus X$ совпадает с $G_{1/2}$. Но алгебра $A_{G_{1/2}}$ максимальна в

$C(G_{1/2})$ (лемма 1), поэтому $D_{a_{1/2}} = A_{a_{1/2}}$. Теперь, применив лемму 4, получим, что D совпадает с A . Теорема доказана.

Теорема 2. *Равномерная алгебра $B_{\partial V}$ является максимальной подалгеброй алгебры $C(\partial V)$.*

Доказательство. Для каждого $\varphi \in \Phi$ рассмотрим две функции

$$\varphi_0 = \begin{cases} \varphi & \text{на } G_1 \\ 0 & \text{на } G_{1/2} \end{cases}, \quad \varphi^0 = \begin{cases} 0 & \text{на } G_1 \\ \varphi & \text{на } G_{1/2}. \end{cases}$$

Очевидно, $\varphi_0 + \varphi^0 = \varphi|_{\partial V}$.

Функции $\varphi^0, \varphi_0, \varphi \in \Phi$ образуют ортогональный базис в $L^2(|\mu_0|)$, где μ_0 — мера, используемая в доказательстве следствия 1. Каждую функцию $f \in L^2(|\mu_0|)$ можно формально представить в виде ряда

$$\sum \alpha(\varphi_0) \varphi_0 + \sum \beta(\varphi^0) \varphi^0,$$

$$\alpha(\varphi_0) = \int f \bar{\varphi}_0 d|\mu_0|, \quad \beta(\varphi^0) = \int f \bar{\varphi}^0 d|\mu_0|.$$

Отметим, что функция $f \in C(\partial V)$ принадлежит $B_{\partial V}$ тогда и только тогда, когда $\alpha(\varphi_0) = \beta(\varphi^0)$ для всех $\varphi \in \Phi$. Этот факт объясняется тем, что любую функцию из $B_{\partial V}$ можно аппроксимировать линейными комбинациями функций из Φ . Обратно, если для некоторой функции $f \in C(\partial V)$, $\alpha(\varphi_0) = \beta(\varphi^0)$ для всех $\varphi \in \Phi$, то формальный ряд функции f имеет вид

$$\sum \alpha(\varphi_0) \varphi_0 + \sum \beta(\varphi^0) \varphi^0 = \sum \alpha(\varphi_0) \varphi|_{\partial V}.$$

Поэтому с помощью сумм подобных средним Чезаро можно построить последовательность из линейных комбинаций функций из Φ , которая равномерно на ∂V сходится к f .

Теперь покажем, что $B_{\partial V}$ — максимальная алгебра.

Пусть $f \in C(\partial V)$ не принадлежит $B_{\partial V}$. Это означает, что найдется такое $\varphi \in \Phi$, что $\alpha(\varphi_0) \neq \beta(\varphi^0)$. Не теряя общности можно предположить, что

$$\varphi_0 = \begin{cases} 1 & \text{на } G_1, \\ 0 & \text{на } G_{1/2} \end{cases}, \quad \varphi^0 = \begin{cases} 0 & \text{на } G_1 \\ 1 & \text{на } G_{1/2} \end{cases}.$$

Тогда

$$\int_X f d\mu_0 = \int_{G_1} f d\mu_0 - \int_{G_{1/2}} f d\mu_0 = \alpha(\varphi_0) - \beta(\varphi^0) \neq 0.$$

Это означает, что мера μ_0 не ортогональна к f , хотя ортогональна к алгебре $B_{\partial V}$. И поскольку μ_0 вещественна, то по лемме 3 г) линейные комбинации функций из $\text{Re } B_{\partial V}$ и функции $\text{Re } f$ плотны в $C_R(\partial V)$. Поэтому равномерная алгебра $D = [B_{\partial V}, f]$, порожденная функциями из $B_{\partial V}$ и функцией f , является алгеброй Дирихле на ∂V , и следовательно, существует такая функция $g \in D$, что $|\text{Re } g - 1| < 1/4$ на G_1 и $|\text{Re } g| < \frac{1}{4}$ на $G_{1/2}$. Это означает, что найдутся два полиномиально

выпуклых непересекающихся множества F_1 и F_2 комплексной плоскости, для которых

$$g(G_1) \subset F_1, g(G_{1/2}) \subset F_2.$$

Применив, как при доказательстве леммы 3, теорему Ока-Вейля, получим, что существует функция из D , равная 0 на G_1 и 1 на $G_{1/2}$. А так как $B_{\partial D} \subset D$ и $B_{G_1} = C(G_1)$, $B_{G_{1/2}} = C(G_{1/2})$, то $D = C(\partial B)$. Теорема доказана.

2°. Как следствие из теорем 1 и 2 укажем два утверждения для почти-периодических функций, определенных в некоторой полосе комплексной плоскости.

Пусть $z = x + iy$ — комплексная переменная. Множество всех z , для которых $x = x_0$, будем называть прямой линией.

Множество всех z , для которых x принадлежит отрезку $[a; b]$, будем называть полосой.

Пусть Γ^0 — аддитивная подгруппа группы вещественных чисел R и $[0, a]$ — некоторая полоса в комплексной плоскости. Обозначим через B_0 множество всех тех равномерно почти-периодических на $[0, a]$ и аналитических в $\text{int}[0, a]$ функций, у которых показатели экспонент в ряду Дирихле принадлежат Γ^0 , и через A_0 — все те функции из B_0 , у которых показатели экспонент ряда Дирихле принадлежат $\Gamma_+ = \{x \in \Gamma^0; x > 0\}$.

Множества A_0 и B_0 являются банаховыми алгебрами в sup норме. Нетрудно проверить, что алгебры A_0 и B_0 реализуются на множестве вида $X = G^0 \times [1/2, 1]$, где G^0 — есть группа характеров к группе Γ^0 и, кроме того, при этой реализации алгебры A_0 и B_0 перейдут в алгебры A и B , построенные в п. 1°.

Иными словами, существует изоморфизм между алгебрами вида A_0 и B_0 и алгебрами вида A и B . Доказательство этого факта следует из [2].

Повтому верны следующие два утверждения.

Теорема 3. Пусть функция $f \in B_0$ не принадлежит A_0 . Тогда любую функцию $g \in B_0$ можно равномерно по всей полосе $[0, a]$ приблизить полиномами от f с коэффициентами из A_0 .

Обозначим через C_0 все те равномерно почти-периодические комплекснозначные функции на прямых $x=0$ и $x=a$, у которых показатели экспонент ряда Дирихле принадлежат Γ^0 .

Теорема 4. Пусть функция $f \in C_0$ не продолжается аналитически в полосу $[0, a]$. Тогда любую функцию $g \in C_0$ можно равномерно по прямым $x=0$, $x=a$ приблизить полиномами от f с коэффициентами из B_0 .

Ս. Ա. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Արելյան կամպակտ խմբի բնութագրերից ծնված մաքսիմալ հանրա-
Եաշիվելե (ամփոփում)

Հողվածում հետազոտվում են արելյան կամպակտ խմբերի բնութագրերից ծնված հատուկ հավասարաչափ հանրահաշիվների հատկությունները: Ստացված հանրահաշիվները հանդիսա-
նում են դասական՝ $R(K)$ և $P(K)$ հանրահաշիվների ընդհանրացումը կամպլեքս C^1 հար-
թուքյան K շրջանային օղակում:

S. A. GRIGORIAN. *Maximal algebras generated by characters
of compact abelian group (summary)*

The properties of special uniform algebras generated by characters of abelian compact groups are investigated. The obtained algebras are generalizations of the classic $R(K)$ and $P(K)$ algebras in the circle ring of C^1 complex plane.

ЛИТЕРАТУРА

1. Т. Гамелин. Равномерные алгебры, «Мир», 1973.
2. R. Aron. A banach algebra generalization of conformal mappings of the disc' Trans. Amer. Math. Soc., 6, 81, № 2, 1956, 501—513.
3. K. Hoffman, I. Singer. Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$. Amer. J. Math., 79, 1957 295—305.
4. F. F. Bonsall. Maximal subalgebras of Banach (*)-algebras, J. London Math. Soc. 40, 1965, 540—550.
5. E. A. Горин. Максимальные подалгебры коммутативных банаховых алгебр с инволюцией, Матем. заметки, 1, № 2, 1967, 173—178.
6. E. A. Горин, В. М. Золотаревский. Максимальные инвариантные подалгебры в алгебрах с инволюцией, Матем. сб., 85, № 3, 1971, 373—387.
7. E. М. Чирка. Приближение голоморфными функциями на гладких многообразиях в C^n , Матем. сб., 79, № 1, 1969, 101—123.
8. R. Blumental. Maximality in function algebras, Canad. J. Math., 22, 1970, 1002—1004.
9. P. J. Raerve. Maximality in function algebras, J. London Math. Soc., 22, 1980, 345—354.