ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 5, 1981 Математика

В. М. МАРТИРОСЯН

ЭФФЕКТИВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В H^∞ ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА БИОРТОГОНАЛИЗАЦИИ М. М. ДЖРБАШЯНА

§ 0. Введение

0.1. М. М. Джрбашяном [1] была поставлена следующая общая задача кратной интерполяции.

Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_k| < 1)$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$ — произвольные комплексные числа и $s_j \geqslant 1$ $(j = 1, 2, \cdots)$ — кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$.

Выявить критерии для $\{\alpha_k\}_1^\infty$ и $\{\gamma_k\}_1^\infty$, обеспечивающие существование функций $f(z)$ из класса H_p $(0 < p < +\infty)$ Харди, удовлетворяющие интерполяционным условиям

$$f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = \gamma_k \quad (k = 1, 2, \cdots), \tag{0.1}$$

и построить аппарат для эффективного представления решений такого рода.

В том специальном случае, когда $\{\alpha_k\}_1^\infty$ — суть различные точки круга $|z| < 1$ и, таким образом, $s_j = 1$ $(1 \leqslant j < +\infty)$, эта задача сводится к интерполяционной задаче

$$f(\alpha_k) = \gamma_k \ (k = 1, 2, \cdots) \tag{0.2}$$

с простыми узлами $\{\alpha_k\}_1^\infty$.

Критерии существования решения задачи (0.2) в классе H^∞ ограниченных в круге $|z| < 1$ функций, либо в классах H_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ были установлены в работах У. Хеймана [2], Д. Ньюмана [3], Л. Карлесона [4], Г. Шапиро и А. Шилдса [5] (см. [6], а также [7], где приведены подробные литературные указания).

В работе В. Кабайла [8] было получено эффективное решение задачи (0.1) в классах H_p $(0 < p < 1)$.

В случае, когда различные точки последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$ появляются *двукратно*, либо с *одинаковой кратностью*, в классе H_2 задача была рассмотрена в работах [9], [10] и [11], *но вновь лишь в постановке существования ее решения.*

Следует отметить, что эти работы, посвященные задаче (0.2), значительно опираются на тонкие результаты теории гильбертовых пространств. В частности, работа Чальмерса [11], в которой, хотя и далеко не в наилучшей формулировке, дан полный ответ на вопрос о *существовании решения* интерполяционной задачи в классе H_2, существенно опирается на известные результаты Н.К. Бари [12] о базисах в гильбертовых пространствах, а также на двусторонние оценки Шура собственных чисел для произведений эрмитово-положительных матриц.

0.2. В работе М. М. Джрбашяна [1] был предложен новый аналитический метод для полного и эффективного решения общей интерполяционной задачи (0.1) в классе H_2. Этот метод основан на построении специальных систем аналитических в круге $|z|<1$ функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$, биортогональных на окружности $|z|=1$, ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$, подчиненной условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|)<+\infty. \tag{0.3}$$

Отметим, что система $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ является несколько модифицированным вариантом построенной в работе М. М. Джрбашяна [13] системы $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$, также биортогональной с $\{r_k(z)\}_1^\infty$ на окружности $|z|=1$.

Для последовательностей $\{\alpha_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих обобщенному условию равномерной разделимости

$$\inf_{k>1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\right\}>0 \tag{0.4}$$

и условию ограниченности кратностей

$$\sup_{k>1}\{s_k\}<+\infty \tag{0.5}$$

применением систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\Omega_k^*(z)\}_1^\infty$ М. М. Джрбашяном [1] было установлено совпадение пространства последовательностей

$$\{(f^{(s_k-1)}(\alpha_k))_{k=1}^{\infty}: f\in H_2\}$$

с пространством последовательностей комплексных чисел $\gamma\equiv\{\gamma_k\}_1^\infty$ таких, что

$$\|\gamma\|_2^2=\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\alpha_k|^2)^{2(s_k-1)+1}|\gamma_k|^2<+\infty.$$

При этом было установлено, что эти же условия (0.4) и (0.5) достаточны для эффективного построения решения задачи (0.1) в виде суммы ряда

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\,\Omega_k^*(z), \tag{0.6}$$

сходящегося в метрике H_2.

В работе [1] была также выявлена полная внутренняя характеристика того подпространства $H_2[\alpha_k]$ пространства H_2, в котором задача (0.1) имеет единственное решение, причем это решение задается ( ) .6).

0.3. С целью проверить возможности своего метода биортогонализации в применении к задаче кратной интерполяции, М. М. Джрбашяном было предложено рассмотреть задачу (0.1) в классах H_p в круге, в полуплоскости и в угловых областях (в этом случае $\{a_k\}_1^\infty$ — это последовательность точек из круга, полуплоскости или угловой области соответственно).

Следует здесь же отметить, что задачу (0.1) для различных областей нельзя свести одну к другой путем конформной пересадки, в частности, ввиду наличия кратностей.

В цикле работ М. М. Джрбашяна [1, 14, 15], Ф. А. Шамояна [16], Г. М. Айрапетяна [17—19], А. М. Джрбашяна [20], Ш. А. Григорян [21] и автора [22—24] применением этого метода было получено полное решение задачи (0.1) в классах H_p в указанных областях. При этом было дано эффективное построение решений этой задачи, записываемых в виде рядов по системам $\{\Omega_k(z)\}_1^\infty$ М. М. Джрбашяна или по системам, являющимся их модификациями.

В этой связи следует особо выделить случай $1 < p < +\infty$. В этом случае при условии равномерной разделимости (для соответствующей области) последовательности $\{a_k\}_1^\infty$ и при условии ограниченности кратностей (0.5) была дана полная внутренняя характеристика тех подпространств пространств H_p в соответствующих областях, в которых решение задачи (0.1) существует, единственно и эффективным образом строится. Более того, в этом случае было также установлено, что если хотя бы одно из условий равномерной разделимости или ограниченности кратностей нарушается, то пространство последовательностей

$$\{(f^{(s_k-1)}(a_k))_{k=1}^\infty : f \in H_p\}$$

не совпадает ни с каким идеальным банаховым пространством последовательностей (т. е. таким пространством I, что из $\{a_k\}_1^\infty \in I$ и $|b_k| \leqslant |a_k|$, $k > 1$, следует $\{b_k\}_1^\infty \in I$).

0.4. Данная работа посвящена эффективному решению интерполяционной задачи (0.1) в классе H^∞ ограниченных аналитических в круге $|z| < 1$ функций, при условии ограниченности кратностей (0.5) и при обобщенном условии равномерной разделимости (0.4).

На вопрос о существовании решения этой задачи впервые был дан полный ответ в работе А. М. Джрбашяна [20]. Там было установлено, что если последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию (0.5), то для совпадения классов последовательностей

$$\{((1-|a_k|^2)^{s_k-1} f^{(s_k-1)}(a_k))_{k=1}^\infty : f \in H^\infty\} = l^\infty$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось также условие (0.4) (l^∞ — это пространство ограниченных последовательностей комплексных чисел).

Эффективное построение решения интерполяционной задачи (0.2) в H^∞ в случае простых узлов $\{\alpha_k\}_1^\infty$ (т. е. $s_k = 1$, $k > 1$) получено недавно американским математиком П. Джонсом (устное сообщение).

Применением метода биортогонализации М. М. Джрбашяна в данной работе построена система ограниченных аналитических в круге $|z|<1$ функций $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$, вновь биортогональных на окружности $|z|=1$ с той же системой рациональных дробей, введенных М. М. Джрбашяном

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k=1, 2, \cdots),$$

ассоциированных с последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$, подчиненной условию Бляшке (0.3).

Следует отметить, что при построении системы $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ мы разлагаем в ряд Тейлора не функцию

$$\omega_k(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{p_k}}{B(z)},$$

как это делается в работе М. М. Джрбашяна [13], а функцию

$$\tau_k(z)=\omega_k(z)(1-\bar{\alpha}_k z)^{p_k} F(z; \alpha_k)$$

($B(z)$ — это произведение Бляшке, определяемое по формуле (1.2), p_k — кратность появления числа α_k во всей последовательности $\{\alpha_j\}_1^\infty$, $F(z; \alpha_k)$ определяется по формулам (1.6)—(1.7)). Такого рода прием применялся в теории полиномов Фабера и их обобщений [25].

В леммах 1 и 3 устанавливаются важные интерполяционные свойства функций $\widetilde{\Omega}_k(z)$ и сумм вида

$$R_m(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k \widetilde{\Omega}_k(z),$$

аналогичные свойствам функций $\Omega_k(z)$, $\Omega_k^*(z)$ и соответствующих им сумм [13], [1].

В лемме 2 устанавливается биортогональность на окружности $|z|=1$ систем $\{r_k(z)\}_1^\infty$ и $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$.

В леммах 4 и 5 приводятся некоторые известные из работ [6] и [1] оценки, необходимые нам для дальнейшего изложения.

При условиях (0.4) и (0.5) в леммах 6 и 7 путем дальнейшего обобщения надлежащим способом их работ [1], [15] устанавливаются важные оценки для коэффициентов, участвующих в представлениях функций $\widetilde{\Omega}_k(z)$.

Основным результатом данной статьи является теорема 1. В ней устанавливается, что если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ подчинена усло_ виям (0.4) и (0.5), а $\{\gamma_k\}_1^\infty \in l^\infty$ — произвольная последовательность, то ряд

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|^2)^{1-s_k} \gamma_k \widetilde{\Omega}_k(z)$$

сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга $|z| < 1$ и определяет функцию $f \in H^\infty$, удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:

$$(1 - |\alpha_k|^2)^{s_k - 1} f^{(s_k - 1)}(\alpha_k) = \gamma_k \; (k = 1, 2, \cdots).$$

Заметим, что можно также получить оценку модуля функции $f(z)$. Но поскольку эта оценка, как и все известные до сих пор оценки интерполирующей функции, не является точной, мы ее не приводим.

§ 1. Необходимые леммы

1.1. (a) Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(0 \leqslant |\alpha_k| < 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел из единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$.

Для произвольного целого $j \geqslant 1$ обозначим через s_j кратность появления числа α_j на отрезке $\{\alpha_k\}_1^j$, а через p_j — кратность появления числа α_j во всей последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$. Очевидно, что

$$1 \leqslant s_j \leqslant p_j \leqslant +\infty \quad (j \geqslant 1).$$

Легко также видеть, что если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию Бляшке

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |\alpha_k|) < +\infty, \tag{1.1}$$

то число p_j конечно при любом целом $j \geqslant 1$.

Напомним, что при этом условии бесконечное произведение

$$B(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z} \frac{\overline{\alpha}_k}{|\alpha_k|} \tag{1.2}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет там ограниченную по модулю единицей аналитическую функцию $B(z)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$. При этом точка $z = \alpha_k$ является для $B(z)$ нулем кратности p_k.

Наряду с произведением Бляшке (1.2) введем в рассмотрение также функции

$$B_k(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ \alpha_j \neq \alpha_k}}^{\infty} \frac{\alpha_j - z}{1 - \overline{\alpha}_j z} \frac{\overline{\alpha}_j}{|\alpha_j|} \equiv B(z) \left[\frac{\alpha_k - z}{1 - \overline{\alpha}_k z} \frac{\overline{\alpha}_k}{|\alpha_k|} \right]^{-p_k} \quad (k \geqslant 1). \tag{1.3}$$

Очевидно, что $B_k(z)$ аналитична и ограничена при $|z| < 1$ и не обращается в нуль в точке $z = \alpha_k$.

Отметим также, что как функция $B(z)$, так и функции $B_k(z)$ определены лишь при условии Бляшке (1.1). Поскольку эти функции необходимы для наших дальнейших целей, то ниже будем предполагать, что последовательность $\{a_k\}_1^\infty$ удовлетворяет этому условию.

(б) Наряду с $\{a_k\}_1^\infty$ будем рассматривать последовательность $\{z_n\}_1^\infty$ попарно различных точек этой последовательности.

Ввиду нашего предположения относительно $\{a_k\}_1^\infty$, последовательность $\{z_n\}_1^\infty$ также будет удовлетворять условию Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)<+\infty. \tag{1.1'}$$

В силу этого члены последовательности $\{z_n\}_1^\infty$ можем считать расположенными в порядке неубывания модулей. Таким образом

$$z_{n_1}\neq z_{n_2},\quad n_1\neq n_2; \tag{1.4}$$

$$|z_{n_1}|<|z_{n_2}|,\quad n_1<n_2. \tag{1.5}$$

Рассмотрим функции

$$F_n(z)=\exp\left\{-\sum_{j>n}(1-|z_j|^2)\frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\}\quad (n=1, 2,\cdots). \tag{1.6}$$

Поскольку из условия (1.1′) вытекает абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$\Psi_n(z)=\sum_{j>n}(1-|z_j|^2)\frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z},\ |z|<1\ (n=1, 2,\cdots)$$

внутри D и так как

$$\mathrm{Re}\left\{(1-|z_j|^2)\frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\}=\frac{(1-|z_j|^2)(1-|\bar{z}_j z|^2)}{|1-\bar{z}_j z|^2}>0,$$
$$|z|<1\ (j=1, 2,\cdots),$$

то функции $F_n(z)(n=1, 2,\cdots)$ аналитичны и ограничены в единичном круге и не обращаются там в нуль.

Положим

$$F(z;a_k)=F_n(z)\left(\frac{1-|a_k|^2}{1-\bar{a}_k z}\right)^{p_k+1},\ \text{при}\ a_k=z_n. \tag{1.7}$$

Отметим, что

$$F(z;a_{k_1})\equiv F(z;a_{k_2}),\ \text{если}\ a_{k_1}=a_{k_2}.$$

1.2. (а). Из определений (1.3) и (1.7) функций $B_k(z)$ и $F(z;a_k)$ вытекает, что произведение $B_k(z)F(z;a_k)$ аналитично в единичном круге и не обращается в нуль в некоторой окрестности точки $z=a_k$. Поэтому для любого целого $k>1$, положив

$$\tau_k(z)=\frac{1}{B_k(z)F(z;a_k)}, \tag{1.8}$$

можем утверждать, что в достаточно малой окрестности точки $z=\alpha_k$ эта функция разлагается в степенной ряд

$$\tau_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu, \quad |z-\alpha_k|<\eta, \tag{1.9}$$

где

$$a_\nu(\alpha_k)=\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\left\{\frac{1}{B_k(z)F(z;\alpha_k)}\right\}_{z=\alpha_k} \quad (0\leqslant\nu<+\infty;\ k>1). \tag{1.10}$$

Введем, наконец, в рассмотрение полиномы

$$q_k(z)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu \quad (k=1, 2,\cdots) \tag{1.11}$$

и последовательность $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ аналитических и ограниченных в единичном круге $\mathbf{D}$ функций, положив

$$\widetilde{\Omega}_k(z)\equiv\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}q_k(z)}{(s_k-1)!\,\tau_k(z)}\equiv$$

$$\equiv\frac{B_k(z)F(z;\alpha_k)(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu \tag{1.12}$$

$$(k=1,\ 2,\cdots).$$

Лемма 1. *Функции системы* $\{\widetilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$ *обладают следующими интерполяционными свойствами*:

$$\widetilde{\Omega}_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\delta_{k,j}=\begin{cases}1, & \text{при } k=j,\\ 0, & \text{при } k\neq j,\end{cases} \quad (k, j=1, 2,\cdots). \tag{1.13}$$

Доказательство. Сначала заметим, что из (1.11) и (1.9) следует равенство

$$q_k(z)=\tau_k(z)-(z-\alpha_k)^{p_k-s_k+1}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_\varkappa(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\varkappa, \quad |z-\alpha_k|<\eta,$$

где $b_\varkappa(\alpha_k)=a_{\varkappa+p_k-s_k+1}(\alpha_k)$ $(\varkappa\geqslant 0)$. Отсюда на основании (1.8) и определения (1.12) функций $\widetilde{\Omega}_k(z)$ заключаем, что в достаточно малой окрестности точки $z=\alpha_k$ справедливо представление

$$\widetilde{\Omega}_k(z)=\frac{(z-\alpha_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}-\frac{B_k(z)F(z;\alpha_k)}{(s_k-1)!}(z-\alpha_k)^{p_k}\sum_{\varkappa=0}^{\infty} b_\varkappa(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\varkappa, \tag{1.14}$$

$$|z-\alpha_k|<\eta.$$

Так как в точке $z=\alpha_k$ функция $(z-\alpha_k)^{p_k}$ имеет нуль кратности $p_k>s_k$, то из (1.14) следуют равенства

$$\tilde{\Omega}_k^{(s_k-1)}(\alpha_k)=1 \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Если $\alpha_j=\alpha_k$, но $j\neq k$, то $s_j\neq s_k$, и из (1.14) $\tilde{\Omega}_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0$.

Наконец, если $\alpha_j\neq\alpha_k$, то из (1.12) вытекает, что $\tilde{\Omega}_k(z)$ вместе с функцией $B_k(z)$ имеет в точке $z=\alpha_j$ нуль кратности $p_j\geqslant s_j$. Следовательно

$$\tilde{\Omega}_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=0, \text{ при } \alpha_j\neq\alpha_k,$$

и лемма доказана.

б) Следуя М. М. Джрбашяну [13], с нашей последовательностью $\{\alpha_k\}_1^\infty$ будем ассоциировать также систему рациональных функций $\{r_k(z)\}_1^\infty$, положив

$$r_k(z)=\frac{(s_k-1)!\, z^{s_k-1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{s_k}} \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{1.15}$$

Лемма 2. *Системы функций*

$$\{r_k(z)\}_1^\infty \text{ и } \{\tilde{\Omega}_k(z)\}_1^\infty$$

биортогональны на единичной окружности $|z|=1$ в смысле

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} r_j(\zeta)\overline{\tilde{\Omega}_k(\zeta)}\,|d\zeta|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{r_j(\zeta)}\,\tilde{\Omega}_k(\zeta)\,|d\zeta|=$$

$$=\begin{cases}1, & \text{при } k=j,\\ 0, & \text{при } k\neq j,\end{cases} \quad (k, j=1, 2, \cdots). \tag{1.16}$$

Доказательство. Поскольку функция $\tilde{\Omega}_k(z)$ аналитична и ограничена в D, то она представима интегралом Коши

$$\tilde{\Omega}_k(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\tilde{\Omega}_k(\zeta)}{1-\bar{\zeta}z}\,|d\zeta|, \quad |z|<1. \tag{1.17}$$

Заметив теперь, что

$$\frac{d^{s_j-1}}{dz^{s_j-1}}\left\{\frac{1}{1-\bar{\zeta}z}\right\}_{z=\alpha_j}=\left\{\overline{\frac{(s_j-1)!\,\zeta^{s_j-1}}{(1-\zeta\bar{z})^{s_j}}}\right\}_{z=\alpha_j}=\overline{r_j(\zeta)}, \tag{1.18}$$

(s_j-1)-кратным дифференцированием интеграла (1.17) по параметру z, мы получим

$$\left\{\frac{d^{s_j-1}}{dz^{s_j-1}}\tilde{\Omega}_k(z)\right\}_{z=\alpha_j}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\tilde{\Omega}_k(\zeta)\,\overline{r_j(\zeta)}\,|d\zeta| \quad (j, k=1, 2, \cdots).$$

Переписав эти равенства в виде

$$\overline{\Omega}_k^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{r_j(\zeta)}\,\widetilde{\Omega}_k(\zeta)\,|d\zeta|\ (k,\ j=1,\ 2,\cdots),$$

на основании леммы 1 получаем (1.16), и лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть* $\{\gamma_k\}_1^m$ $(1\leqslant m<+\infty)$ — *произвольная конечная последовательность комплексных чисел. Тогда регулярная и ограниченная в круге* D *функция*

$$R_m(z)=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,\overline{\Omega}_k(z) \tag{1.19}$$

удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$R_m^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\gamma_j\ (1\leqslant j\leqslant m). \tag{1.20}$$

Доказательство. Функция $R_m(z)$ в круге D допускает представление

$$R_m(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R_m(\zeta)}{1-\overline{\zeta}\,z}|d\zeta|,\ |z|<1.$$

Отсюда в силу (1.18), (1.19) и соотношений биортогональности (1.16) получим

$$R_m^{(s_j-1)}(\alpha_j)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}R_m(\zeta)\,\overline{r_j(\zeta)}\,|d\zeta|=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\overline{\Omega}_k(\zeta)\,\overline{r_j(\zeta)}\,|d\zeta|=\gamma_j\,(1\leqslant j\leqslant m),$$

т. е. равенства (1.20).

Замечание. Эту лемму можно было доказать и непосредственным применением леммы 1. Лемму 2 мы привели с целью показать, что система $\{\overline{\Omega}_k(\zeta)\}_1^\infty$ является результатом эффективной биортогонализации системы рациональных функций $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$.

1.3. (а) Последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty$ $(0\leqslant|\alpha_k|<1)$ условимся относить к классу $\Delta(\delta)$, если при некотором δ $(0<\delta<1)$ она удовлетворяет условию

$$\inf_{k\geqslant1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\overline{\alpha}_j\alpha_k}\right|\right\}\geqslant\delta. \tag{1.21}$$

Отметим здесь же, что в этом случае последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет также условию Бляшке (1.1), обеспечивающему существование определенных выше функций $B_k(z)$ и $F(z;\alpha_k)$.

Отметим также, что если числа последовательности $\{a_k\}_1^\infty$ попарно различны, то условие (1.21) принимает вид

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\infty}\left|\frac{a_j-a_k}{1-\bar{a}_j a_k}\right|\right\}\geqslant\delta$$

и известно под названием *условие равномерной разделимости* последовательности $\{a_k\}_1^\infty$.

Выше мы условились под $\{z_n\}_1^\infty$ понимать последовательность всех отличных друг от друга чисел последовательности $\{a_k\}_1^\infty$. Поэтому свойство (1.21) можно записать также в виде

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right|^{q_n}\right\}\geqslant\delta, \tag{1.21'}$$

где q_n — кратность появления чисел z_n во всей последовательности $\{a_k\}_1^\infty$, причем очевидно, что

$$\sup_{k\geq 1}\{p_k\}=\sup_{n\geq 1}\{q_n\}.$$

Заметим теперь, что если $\{a_k\}_1^\infty\in\Delta(\delta)$, то для $\{z_n\}_1^\infty$ мы будем иметь

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right|\right\}>\delta. \tag{1.22}$$

Это означает, что если $\{a_k\}_1^\infty\in\Delta(\delta)$, то и подавно $\{z_n\}_1^\infty\in\Delta(\delta)$.

Но если предполагать, что

$$\sup_{k\geq 1}\{p_k\}=\sup_{n\geq 1}\{q_n\}=P<+\infty, \tag{1.23}$$

то справедливо и обратное утверждение, поскольку в этом случае

$$\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right|^{q_n}\geqslant\left(\prod_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{\infty}\left|\frac{z_n-z_k}{1-\bar{z}_n z_k}\right|\right)^P (k\geqslant 1).$$

Поскольку равномерно разделимые последовательности, как известно, существуют (см. [6], стр. 289—290), то предыдущие замечания подтверждают, что класс $\Delta(\delta)$ содержит последовательности, удовлетворяющие условию (1.23). Но более того, воспользовавшись известным примером равномерно разделенной последовательности (см. [6], стр. 289—290), легко можно убедиться в том, что класс $\Delta(\delta)$ содержит последовательности, для которых $\sup\{p_k\}=\infty$. Из сказанного, в частности, следует, что условия (1.23) и (1.21) независимы.

Ради удобства дальнейшего изложения приведем еще следующее определение.

Последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ условимся относить к классу $\Delta(\delta; P)$, если $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta(\delta)$ и выполняется условие

$$\sup_{k\geq 1}\{p_k\} = P < +\infty. \tag{1.24}$$

Наконец, через Δ обозначим класс последовательностей $\{\alpha_k\}_1^\infty$ таких, что при некотором δ $(0<\delta<1)$ и некотором натуральном P выполняется $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta(\delta; P)$.

Таким образом, $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия

$$\inf_{k\geq 1}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\left|\frac{\alpha_j-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_j\alpha_k}\right|\right\} > 0, \tag{1.25}$$

$$\sup_{k\geq 1}\{p_k\} < +\infty. \tag{1.26}$$

б) Приведем теперь формулировки двух известных результатов в предположении, что $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta(\delta)$.

Лемма 4. ([6], стр. 287). *Если последовательность $\{z_n\}_1^\infty$ удовлетворяет условию* (1.22), *то*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2} \leq 1+2\log\frac{1}{\delta}\quad (n=1, 2,\cdots). \tag{1.27}$$

Прежде чем сформулировать следующий результат, введем в рассмотрение последовательность функций

$$\Delta_k(z) = \frac{1}{B_k(z)} \equiv \prod_{\substack{j=1\\ \alpha_j\neq\alpha_k}}^{\infty}\frac{1-\bar{\alpha}_j z}{\alpha_j - z}\,\frac{|\alpha_j|}{\bar{\alpha}_j}\quad (k=1, 2,\cdots). \tag{1.28}$$

Лемма 5. [1] *Если последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty$ удовлетворяет условию* (1.21), *то справедливы неравенства*

$$(1-|\alpha_k|^2)^s\,|\Delta_k^{(s)}(\alpha_k)| \leq C_s(\delta)\quad (0\leq s<+\infty;\ 1\leq k<+\infty), \tag{1.29}$$

где $C_s(\delta)$ — положительные постоянные, зависящие исключительно от s и δ.

1.4 (а). Наряду с последовательностью $\{\Delta_k(z)\}_1^\infty$ функций, определенных по формуле (1.28), введем в рассмотрение также функции

$$\Phi(z; \alpha_k) = \frac{1}{F(z; \alpha_k)}\quad (k=1, 2,\cdots) \tag{1.30}$$

и заметим, что ввиду определения (1.8) функций $\tau_k(z)$ можем написать

$$\tau_k(z) = \Delta_k(z)\,\Phi(z; \alpha_k)\quad (k=1, 2,\cdots). \tag{1.31}$$

Отметим также, что в силу (1.6), (1.7) и (1.30) справедливы равенства

$$\Phi(z;\alpha_k)=\left(\frac{1-\bar{\alpha}_k z}{1-|\alpha_k|^2}\right)^{p_k+1}\exp\left\{\sum_{j>n}(1-|z_j|^2)\frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\}\ (k>1), \tag{1.32}$$

где $\{z_n\}_1^\infty$ — последовательность попарно различных чисел последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$, расположенная в порядке неубывания модулей. Докажем лемму.

Лемма 6. *Если* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta(\delta)$ (*т. е. имеет место* (1.21)), *то справедливы неравенства*

$$(1-|\alpha_k|^2)^r\,|\Phi^{(r)}(\alpha_k;\alpha_k)|\leqslant M_r(\delta)(p_k+1) \tag{1.33}$$

$$(0\leqslant r<+\infty,\ 1\leqslant k<+\infty),$$

где $M_r(\delta)$ — *положительные постоянные, зависящие исключительно от* r *и* δ.

Доказательство. Проверим сначала справедливость неравенств (1.33) при $r=0$.

Пусть $\alpha_k=z_n$, где $\{z_n\}_1^\infty$ — определенная по $\{\alpha_k\}_1^\infty$ последовательность.

Учитывая, что

$$\operatorname{Re}\left\{(1-|z_j|^2)\frac{1+\bar{z}_j z_n}{1-\bar{z}_j z_n}\right\}=\frac{(1-|z_j|^2)(1-|\bar{z}_j z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2},$$

на основании (1.32) можем написать:

$$|\Phi(\alpha_k;\alpha_k)|=\exp\left\{\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(1-|\bar{z}_j z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}\right\}. \tag{1.34}$$

Однако $|z_j|\geqslant|z_n|$ при $j\geqslant n$, значит

$$1-|\bar{z}_j z_n|^2\leqslant 2(1-|z_n|^2)\ (j\geqslant n),$$

откуда заключаем, что

$$\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(1-|\bar{z}_j z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}<2\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}\leqslant 2\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right),$$

причем последняя оценка получена на основании неравенства (1.27). Отсюда и из (1.34) следует

$$|\Phi(\alpha_k;\alpha_k)|\leqslant\exp\left\{2\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right)\right\}\ (k=1,2,\cdots), \tag{1.35}$$

т. е. неравенства (1.33) при $r=0$.

Применим теперь полную индукцию. Предположим, что неравенства (1.33) справедливы при $0\leqslant r\leqslant\nu$, т. е.

$$(1-|\alpha_k|^2)^r\,|\Phi^{(r)}(\alpha_k;\alpha_k)|\leqslant(p_k+1)\,M_r(\delta)\quad(0\leqslant r\leqslant\nu;\ k\geqslant1), \tag{1.36}$$

где $M_r(\delta)>0$ зависят только от r и δ. Докажем справедливость неравенства (1.33) при $r=\nu+1$. С этой целью заметим сначала, что взяв логарифмическую производную функции $\Phi(z;\ \alpha_k)$, приходим к тождеству

$$\Phi'(z;\ \alpha_k) = \Phi(z;\ \alpha_k)\left\{-\frac{(p_k+1)\bar{\alpha}_k}{1-\bar{\alpha}_k z} + 2\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)\bar{z}_j}{(1-\bar{z}_j z)^2}\right\}(k=1,\ 2,\cdots). \tag{1.37}$$

Положив

$$\Psi(z;\ \alpha_k) = -\frac{(p_k+1)\bar{\alpha}_k}{1-\bar{\alpha}_k z} + 2\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)\bar{z}_j}{(1-\bar{z}_j z)^2}, \tag{1.38}$$

будем иметь

$$\Psi^{(m)}(z;\ \alpha_k) = -\frac{(p_k+1)\,m!\,(\bar{\alpha}_k)^{m+1}}{(1-\bar{\alpha}_k z)^{m+1}} + 2\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(m+1)!\,(\bar{z}_j)^{m+1}}{(1-\bar{z}_j z)^{m+2}}. \tag{1.39}$$

Следовательно, если учесть также, что $\alpha_k = z_n$, можем написать

$$|\Psi^{(m)}(\alpha_k;\ \alpha_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{m!\,(p_k+1)}{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}} + 2(m+1)!\sum_{j>n}\frac{1-|z_j|^2}{|1-\bar{z}_j z_n|^{m+2}}\quad \begin{pmatrix}0\leqslant m<+\infty,\\ 1\leqslant k<+\infty\end{pmatrix}. \tag{1.40}$$

Однако

$$|1-\bar{z}_j z_n| > 1-|z_j|\,|z_n| > 1-|z_n| > \frac{1}{2}(1-|z_n|^2),$$

откуда заключаем, что

$$\frac{1-|z_j|^2}{|1-\bar{z}_j z_n|^{m+2}} \leqslant \frac{2^m}{(1-|z_n|^2)^m}\cdot\frac{1-|z_j|^2}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}.$$

Подставив эти неравенства в (1.40), получаем

$$|\Psi^{(m)}(\alpha_k;\ \alpha_k)| \leqslant$$

$$< \left\{\frac{(p_k+1)\,m!}{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}} + \frac{2^{m+1}(m+1)!}{(1-|z_n|^2)^{m+1}}\sum_{j>n}\frac{(1-|z_j|^2)(1-|z_n|^2)}{|1-\bar{z}_j z_n|^2}\right\}. \tag{1.41}$$

Если теперь вспомним, что $\alpha_k = z_n$ и воспользуемся неравенствами (1.27), то из (1.41) заключаем, что

$$|\Psi^{(m)}(\alpha_k;\ \alpha_k)| \leqslant$$

$$\leqslant\left\{(p_k+1)\,m! + 2^{m+1}(m+1)!\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right)\right\}\frac{1}{(1-|\alpha_k|^2)^{m+1}}\begin{pmatrix}0\leqslant m<+\infty,\\ 1\leqslant k<+\infty\end{pmatrix}. \tag{1.42}$$

Вернемся теперь к формуле (1.37). Из этой формулы и из (1.38) следует, что

$$\Phi'(z;\ \alpha_k) = \Phi(z;\ \alpha_k)\ \Psi(z;\ \alpha_k)\quad (k=1,\ 2,\cdots).$$

Продифференцировав обе части этого тождества ν раз по z, получим

$$\Phi^{(\nu+1)}(z;\ \alpha_k)=\sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r\, \Phi^{(r)}(z;\ \alpha_k)\ \Psi^{(\nu-r)}(z;\ \alpha_k),$$

откуда заключаем, что

$$|\Phi^{(\nu+1)}(\alpha_k;\ \alpha_k)|\leqslant \sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r\, |\Phi^{(r)}(\alpha_k;\ \alpha_k)|\ |\Psi^{(\nu-r)}(\alpha_k;\ \alpha_k)|.$$

Воспользовавшись теперь предложением индукции (1.36) и неравенствами (1.42), можем написать

$$|\Phi^{(\nu+1)}(\alpha_k;\ \alpha_k)|\leqslant$$

$$\leqslant (p_k+1)\left\{\sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r M_r(\delta)\, B_{\nu+1-r}(\delta)\right\}\frac{1}{(1-|\alpha_k|^2)^{\nu+1}}\ (k=1,\ 2,\cdots),$$

причем постоянная

$$M_{\nu+1}(\delta)=\sum_{r=0}^{\nu} C_\nu^r M_r(\delta)\, B_{\nu-r}(\delta)$$

зависит исключительно от $\nu+1$ и δ, поскольку таковыми являются $M_r(\delta)(0\leqslant r\leqslant\nu)$, в силу предположения индукции, а

$$B_{\nu-r}(\delta)=(\nu-r)!+2^{\nu-r+1}(\nu-r+1)!\left(1+2\log\frac{1}{\delta}\right).$$

Таким образом, неравенства (1.33) справедливы также для $r=\nu+1$, и лемма доказана.

б) Теперь дадим оценки коэффициентов разложения (1.9) в предположении, что последовательность $\{\alpha_k\}_1^\infty\in\Delta$.

Лемма 7. *Если при некоторых* $P(1\leqslant P<+\infty)$ *и* $\delta\ (0<\delta<1)$ *последовательность* $\{\alpha_k\}_1^\infty$ *удовлетворяет условиям* (1.21) *и* (1.24), *то для коэффициентов разложения* (1.9):

$$\tau_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu(\alpha_k)(z-\alpha_k)^\nu,\ |z-\alpha_k|<\eta,$$

справедливы неравенства

$$|a_\nu(\alpha_k)|\leqslant a(\delta;\ P)(1-|\alpha_k|^2)^{-\nu}$$

$$(0\leqslant\nu\leqslant p_k;\ 1\leqslant k<+\infty), \tag{1.43}$$

где $a(\delta;\ P)$ — *положительная постоянная, зависящая исключительно от* δ *и* P.

Доказательство. В силу (1.31) можем написать тождество

$$\tau_k^{(\nu)}(z)=\sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s\, \Delta_k^{(s)}(z)\, \Phi^{(\nu-s)}(z;\ \alpha_k)\ (\nu=0,1,\ 2,\cdots),$$

откуда на основании оценок (1.29) и (1.33) заключаем, что

$$|\tau_k^{(\nu)}(\alpha_k)| \leqslant \left\{ \sum_{s=0}^{\nu} C_\nu^s \, C_s(\delta)(p_k+1) \, M_{\nu-s}(\delta) \right\} (1-|\alpha_k|^2)^{-\nu},$$

$$(0 < \nu < +\infty; \ 1 \leqslant k < +\infty). \tag{1.44}$$

Учитывая еще, что

$$a_\nu(\alpha_k) = \frac{1}{\nu!} \tau_k^{(\nu)}(\alpha_k) \quad (0 \leqslant \nu < +\infty; \ 1 \leqslant k < +\infty),$$

ввиду условия $\sup\{p_k\} = P < +\infty$, из (1.44) получаем неравенства (1.43), и лемма доказана.

§ 2. Основная теорема

Перейдем теперь к доказательству основного результата данной работы.

Теорема 1. *Пусть* $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$, *т. е. выполняются условия* (1.25) *и* (1.26).

Если $\{c_k\}_1^\infty \in l^\infty$ *— произвольная последовательность комплексных чисел, то ряд*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (1-|\alpha_k|^2)^{1-s_k} c_k \tilde{\Omega}_k(z), \ |z| < 1, \tag{2.1}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет функцию $f \in H^\infty$, *удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:*

$$(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1} f^{(s_k-1)}(\alpha_k) = c_k \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{2.2}$$

Доказательство: Сначала отметим, что ввиду условия $\{\alpha_k\}_1^\infty \in \Delta$ эта последовательность удовлетворяет условиям (1.21) и (1.24) при некоторых δ $(0 < \delta < 1)$ и P $(1 \leqslant P < +\infty)$.

Далее, ввиду определения (1.12) функции $\tilde{\Omega}_k(z)$ и определения (1.6)—(1.7) функции $F(z; \alpha_k)$ можем написать

$$|\tilde{\Omega}_k(z)| \leqslant \frac{|F_n(z)|}{(s_k-1)!} \left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|} \right)^{p_k+1} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)| \, |z-\alpha_k|^{\nu+s_k-1}. \tag{2.3}$$

Однако

$$\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|} \right)^{p_k-1} \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)| \, |z-\alpha_k|^{\nu+s_k-1} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)| (1-|\alpha_k|^2)^{p_k-1} \left| \frac{z-\alpha_k}{1-\bar{\alpha}_k z} \right|^{\nu+s_k-1} \left(\frac{1}{|1-\bar{\alpha}_k z|} \right)^{p_k-s_k-\nu} \leqslant \tag{2.4}$$

$$\leqslant \sum_{\nu=0}^{p_k-s_k} |a_\nu(\alpha_k)|\,(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-1}\left(\frac{1}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-s_k-\nu}.$$

С другой стороны, если $|z|<1$, то

$$(1-|\alpha_k|^2)^{p_k-1}\left(\frac{1}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-s_k-\nu}=\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-s_k-\nu}(1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-|\alpha_k|}\right)^{p_k-s_k-\nu}(1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1}\leqslant$$

$$\leqslant 2^{p_k-s_k-\nu}(1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1}\leqslant 2^P(1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1}.$$

Отсюда и из (2.4) следует, что

$$\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|a_\nu(\alpha_k)|\,|z-\alpha_k|^{\nu+s_k-1}\leqslant$$

$$< 2^P\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|a_\nu(\alpha_k)|\,(1-|\alpha_k|^2)^{\nu+s_k-1}.$$

Если еще учесть оценки (1.43), то будем иметь

$$\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|}\right)^{p_k-1}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}|a_\nu(\alpha_k)|\,|z-\alpha_k|^{\nu+s_k-1}\leqslant$$

$$\leqslant P2^P a(\delta;P)(1-|\alpha_k|^2)^{s_k-1}\quad(k=1,2,\cdots).$$

Из этих оценок на основании (2.3) имеем

$$|(1-|\alpha_k|^2)^{1-s_k}c_k\tilde{\Omega}_k(z)|\leqslant$$

$$\leqslant A(\delta;P)\,\|\{c_k\}_1^\infty\|_\infty\left|\left(\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-\bar{\alpha}_k z}\right)^2F_n(z)\right|,\ |z|<1\ (k=1,2,\cdots),\tag{2.5}$$

где $A(\delta;P)$ — положительная постоянная, зависящая исключительно от δ и P, а

$$\|\{c_k\}_1^\infty\|_\infty=\sup_{k>1}\{|c_k|\}<+\infty.$$

Теперь напомним, что через $\{z_n\}_1^\infty$ мы обозначили последовательность попарно различных чисел последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$. Отсюда, во-первых, следует, что

$$\frac{1-|\alpha_k|^2}{|1-\bar{\alpha}_k z|}=\frac{1-|z_n|^2}{|1-\bar{z}_n z|}\quad(k=1,2,\cdots).\tag{2.6}$$

С другой стороны, в силу условия (1.24) число z_n появляется в последовательности $\{\alpha_k\}_1^\infty$ не более, чем P раз.

Из сказанного на основании (2.5) заключаем, что ряд (2.1) мажорируется рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} PA(\delta;\ P)\,\|\{c_k\}_1^{\infty}\|_{\infty} \left|\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^2 F_n(z)\right|,\ |z|<1. \tag{2.7}$$

Весьма простое доказательство сходимости ряда

$$\varphi(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^2 F_n(z),\ |z|<1, \tag{2.8}$$

было предложено недавно в работе [26]. Ради удобства читателя мы воспроизведем здесь это доказательство.

Пусть $a_n \geqslant 0$,

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n<+\infty,\quad S_k=\sum_{n=1}^{k} a_n.$$

Поскольку $a_n \leqslant e^{a_n}-1$, то положив $S_0=0$, можем написать

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left\{-\sum_{j>n} a_n\right\}=e^{-S}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{S_{n-1}} \leqslant$$

$$\leqslant e^{-S}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{a_n}-1\right) e^{S_{n-1}}=e^{-S}\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{S_n}-e^{S_{n-1}}\right)=e^{-S}\left(e^{S}-1\right)<1. \tag{2.9}$$

Заметим теперь, что при $|z|<1$

$$\left|\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^2\right| \leqslant \operatorname{Re}\left\{(1-|z_n|^2)\frac{1+\bar{z}_n z}{1-\bar{z}_n z}\right\}=\frac{(1-|z_n|^2)(1-|\bar{z}_n z|^2)}{|1-\bar{z}_n z|^2},$$

откуда на основании (1.6) и (2.9) заключаем, что ряд (2.8) сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет функцию $\varphi \in H^{\infty}$.

Из приведенных выше рассуждений на основании (2.5) и (2.7) следует, что ряд (2.1) сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет функцию $f \in H^{\infty}$.

Наконец, равенства (2.2) вытекают из леммы 3, и теорема доказана.

Отметим, что когда члены последовательности $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ попарно различны (т. е. $s_k=1$, $k \geqslant 1$) и расположены в порядке возрастания модулей, тогда $\{\alpha_k\}_1^{\infty}$ и $\{z_n\}_1^{\infty}$ совпадают. В этом случае из теоремы 1, в частности, получаем следующее утверждение.

Теорема 1′. *Пусть $\{z_n\}_1^{\infty}$ — последовательность попарно различных чисел, расположенная в порядке неубывания модулей и удовлетворяющая условию* (1.22).

Если положить

$$\tilde{G}_n(z)=\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^2 \exp\left\{-\sum_{j>n}(1-|z_j|^2)\,\frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\}\ (n \geqslant 1), \tag{2.10}$$

то для любой последовательности $\{c_k\}_1^{\infty} \in l^{\infty}$ ряд

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{B_n(z)}{B_n(z_n)}\,\frac{\widetilde{G}_n(z)}{\widetilde{G}_n(z_n)} \tag{2.11}$$

сходится абсолютно и равномерно внутри единичного круга и определяет функцию $f \in H^\infty$, удовлетворяющую следующим интерполяционным данным:

$$f(z_n)=c_n\ (n=1,\,2,\cdots).$$

Это утверждение доказано в совместной работе С. А. Виноградова, Е. А. Горина и С. В. Хрущева [26]. Еще раньше Петером Джонсом было доказано такое же утверждение, с той лишь разницей, что в ряде (2.11) вместо функций $\widetilde{G}_n(z)$ он рассматривал функции

$$G_n(z)=\left(\frac{1-|z_n|^2}{1-\bar{z}_n z}\right)^3 \exp\left\{-\sum_{j>n}(1-|z_j|^2)\,\frac{1+\bar{z}_j z}{1-\bar{z}_j z}\right\}\ (n\geqslant 1).$$

Автор признателен профессору В. П. Хавину за это сообщение.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 19.V.1981

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. H^∞ դասում՝ բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծումը Մ. Մ. Ջրբաշյանի բիօրթոգոնալիզացիայի մեթոդի կիրառումով *(ամփոփում)*

Մ. Մ. Ջրբաշյանի բիօրթոգոնալիզացիայի մեթոդի կիրառումով ներկա աշխատանքում կառուցվում է ֆունկցիաների որոշակի մի սիստեմ և այդ ֆունկցիաների միջոցով էֆեկտիվորեն կառուցվում են միավոր շրջանում հոլոմորֆ ու սահմանափակ ֆունկցիաների դասում սահմանափակ պատիկություններով ինտերպոլյացիոն խնդրի լուծումները։ Այդ խնդրի լուծումների գոյության վերաբերյալ հարցին վերջնական պատասխանը առաջին անգամ տրվել է Ա. Մ. Ջրբաշյանի կողմից [20]։

Տվյալ աշխատանքը հանդիսանում է Մ. Մ. Ջրբաշյանի կողմից սկսած և իր ու իր աշակերտների կողմից շարունակված հետազոտությունների շրջանակի շարունակությունը կոմպլեքս հարթության տարբեր տիրույթների դասերում բազմապատիկ ինտերպոլյացիոն խնդրի էֆեկտիվ լուծման վերաբերյալ։

V. M. MARTIROSIAN. *Effective solution of the simultaneous interpolation problem in H^∞ by the biorthogonalisation method of M. M. Djrbashian* (summary)

Using the biorthogonalisation method of M. M. Djrbashian a certain system of functions is constructed, which provides solutions for the simultaneous interpelation problem in H^∞. Earlier [20] A. M. Djrbashian gave the answer to the question of existence of solutions for this problem.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы и решение интерполяционной задачи с узлами ограниченной кратности в классе H_φ, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», IX, № 5, 1974, 339—373.

2. *W. K. Hayman.* Interpolation by bounded functions, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 8, 1959, 277—290.
3. *D. J. Newman.* Interpolation in H^∞, Trans. Amer. Math. Soc., 92, 1959, 501—507.
4. *L. Carleson.* An interpolation problem for bounded analytic functions, Amer. J. Math., 80, 1958, 921—930.
5. *H. S. Shapiro, A. L. Shields.* On some interpolation problems for analytic functions, Amer. J. Math., 83, 1961, 513—532.
6. *К. Гофман.* Банаховы пространства аналитических функций, ИИЛ, М., 1963.
7. *P. Duren.* Theory of H^p-spaces, Ac. Press, New York and London, 1970.
8. *В. П. Кабайла.* Интерполяционные последовательности для классов H_p в случае $p < 1$, Лит. матем. ж., III, № 1, 1963, 141—147.
9. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in H_2, Michigan Math. J., 14, 1967 65—70.
10. *J. Rosenbaum.* Simultaneous interpolation in H_2, II, Pacific J. Math., **27, 1968,** 607—610.
11. *B. L. Chalmers.* Some interpolation problem in Hilbert spaces, Michigan Math. J., 18, 1971, 41—49.
12. *Н. К. Бари.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Ученые записки МГУ, 48, «Математика», 1951, 69—107.
13. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», VIII, № 1, 1973, 384—409.
14. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классе H_+^p. ДАН СССР, 234, № 3, 1977, 517—520.
15. *М. М. Джрбашян.* Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах H_p в полуплоскости, Изв. АН СССР, «Математика», 43, № 6, 1978, 1322—1384.
16. *Ф. А. Шамоян.* Теоремы вложения, связанные с задачей кратного интерполирования в пространствах H_p, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XI, № 2, 1976, 124—131.
17. *Г. М. Айрапетян.* О базисе рациональных функций в подпространствах Харди $H_p (1 < p < +\infty)$, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», VIII, № 6, 1973, 429—450.
18. *Г. М. Айрапетян.* О базисности некоторых биортогональных систем в комплексной области, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», X, № 2, 1975, 133—152.
19. *Г. М. Айрапетян.* Кратная интерполяция и базисность некоторых биортогональных систем рациональных функций в классах H_p Харди, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 4, 1977, 262—277.
20. *А. М. Джрбашян.* Кратная интерполяция в классах H^p, $0 < p \leqslant +\infty$, ДАН СССР, 234, № 6, 1977, 1253—1256.
21. *Ш. А. Григорян.* Об одном свойстве функций из H^p $(0 < p < +\infty)$ в полуплоскости, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 5, 1977, 335—340.
22. *В. М. Мартиросян.* Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм. ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.
23. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
24. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в $H_p[\alpha; \omega]$, ДАН СССР, 245, № 1, 1979, 24—27.
25. *М. М. Джрбашян.* Разложения по системам рациональных функций с фиксированными полюсами, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», II, № 1, 1967, 3—51.
26. *С. А. Виноградов, Е. А. Горин, С. В. Хрущев.* Свободная интерполяция в H^∞ методом Петера Джонса, Записки научных семинаров ЛОМИ.