ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 4, 1981 Математика

С. С. СЕКТ

РОСТ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ В ХАРАКТЕРИСТИКАХ М. М. ДЖРБАШЯНА. I

Изучение обобщенных характеристик роста и распределения значений мероморфных функций, введенных М. М. Джрбашяном в [1], представляет большой интерес в свете результатов, полученных А. А. Гольдбергом и В. Д. Мохонько в [2]. Невыполнение 1-ой основной теоремы для характеристик М. М. Джрбашяна налагает большие ограничения при их изучении.

Пусть функция $\omega(x)$ принадлежит классу Ω_∞, определенному М. М. Джрбашяном в [1].

Основные результаты статьи содержатся в теоремах 1 и 2.

Следуя Р. Неванлинна, введем понятие ω-дефекта мероморфной функции $f(z)$ в смысле М. М. Джрбашяна

$$\delta_\infty(a, f) = \lim_{r\to\infty} \frac{\tilde{m}_\infty(r, a, f)}{\tilde{T}_\infty(r, f)}. \tag{1.1}$$

При $a=0$ и $a=\infty$ следует (см. формулу (2.18′) в [1]):

$$0 \leqslant \delta_\infty(a, f) \leqslant 1.$$

Для доказательства аналога соотношения дефектов в случае роста $\omega(x) \in \Omega_\infty$ нам понадобятся характеристики А. Дингхаса m_∞, N_∞ и T_∞. Для них справедливо (подробнее см. [2], [3[):

$$N_\infty(r, a, f) = \tilde{N}_\infty(r, a, f),\ \tilde{m}_\infty(r, a, f) \leqslant m_\infty(r, a, f). \tag{1.2}$$

Первая основная теорема для характеристик К. Дингхаса сохраняет силу.

Теперь докажем теорему.

Теорема 1. *Если $\omega(x) \in \Omega_\infty$ такова, что для любого фиксированного $\nu > 1$*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\omega(\nu t)} = \alpha(\nu) < \infty, \tag{1.3}$$

то для любой мероморфной функции $f(z)$, имеющей конечный нижний ω-порядок λ_∞, измеренный относительно $\tilde{T}_\infty(r, f)$

$$\lambda_\infty = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln \tilde{T}_\infty(r, f)}{\ln r}, \tag{1.4}$$

справедливы следующие утверждения:

а). *Множество* ω-*дефектных значений*

$D_\infty(f)=\{a:\delta_\infty(a,f)>0\}$ *не более чем счетно;*

б). *Величины* ω-*дефектов подчинены условию*

$$\sum_{\{a\}}\delta_\infty(a,f)\leqslant c(\nu,f),$$

где $c(\nu,f)$ — *положительная постоянная.*

Прежде чем приступить к доказательству теоремы, установим некоторые вспомогательные факты.

Лемма 1.1. *Пусть* $f(z)$ — *мероморфная функция. Если для любого фиксированного* $\nu>1$ *выполняется* (1.3), *то*

$$\widetilde{N}_\infty(r,a,f)\leqslant(c(\nu/(\nu-1))\,\widetilde{T}_\infty(\nu r,f)\tag{1.5}$$

справедливо для любого $a:0<|a|<\infty$.

Доказательство. Пусть $a\neq0$ и $a\neq\infty$. Используя теорему 4 из [1], получаем

$$\widetilde{N}_\infty(r,a,f)=\widetilde{m}_\infty(r,f-a)-\widetilde{m}_\infty(r,a,f)+\widetilde{N}_\infty(r,f)=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln_\infty|f(re^{i\theta})-a|\,d\theta+\widetilde{N}_\infty(r,f),\tag{1.6}$$

в силу определения функций $\widetilde{m}_\infty(r,a,f)$, $\ln_\infty|f(re^{i\theta})|$. С использованием очевидного неравенства

$$\ln^+|f-a|\leqslant\ln^+|a|+\ln^+|f|+\ln 2$$

формула (1.6) примет вид

$$\widetilde{N}_\infty(r,a,f)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^r\ln^+|f(\tau e^{i\theta})|\,a\,(-\omega(\tau))+\right.$$

$$\left.+\omega(r)\ln^+|f(re^{i\theta})|\right]d\theta+\widetilde{N}_\infty(r,f)+\ln^+|a|+\ln 2,\tag{1.7}$$

так как $\omega(0)=1$.

Применим формулу (1.19) теоремы 2 М. М. Джрбашяна ([1]) к гармонической функции $\ln|f(z)|$, где $f(z)$—целая. Получим

$$\ln|f(z)|=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}S_R(e^{i\theta}z;\omega)\ln_\infty|f(Re^{i\theta})|\,d\theta,$$

$$0<R<\infty,\ 0\leqslant t<R,\ z=te^{i\varphi},\ 0\leqslant\varphi\leqslant2\pi,$$

где

$$S_R(z;\omega)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^k}{\Delta_k(R)},$$

$$\Delta_k(R) = R\int_0^R \omega(x)\,x^{k-1}\,dx,\quad k=1,\,2,\cdots.$$

Имеем

$$\ln^+|f(te^{i\varphi})| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_R(e^{-i\theta}te^{i\varphi};\,\omega)|\,|\ln_\omega|\,f(Re^{i\theta})|\;|d\theta. \tag{1.8}$$

Далее

$$\int_0^r \ln^+|f(te^{i\varphi})|\,d(-\omega(t)) + \omega(r)\ln^+|f(re^{i\varphi})| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\tilde{m}_\omega(R,f) + \tilde{m}_\omega\left(R,\frac{1}{f}\right)\right)\left\{1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(R)}\right\}, \tag{1.9}$$

$$R>0,\ 0\leqslant r<R,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

Формула (1.9) легко получается подстановкой в левую часть соотношения (1.8) и проведением простых преобразований с учетом того, что

$$|\ln_\omega|f(Re^{i\theta})|\,| \leqslant \ln_\omega^+|f(Re^{i\theta})| + \ln_\omega^+\{|f(Re^{i\theta})|^{-1}\}.$$

Применив результат (1.9) к формуле (1.7), получим, обозначив $R=\nu r$, $\nu>1$, фиксированное:

$$\tilde{N}_\omega(r,a,f) \leqslant 2\,\tilde{T}_\omega(\nu r,f)\left(1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)}\right). \tag{1.10}$$

Здесь мы воспользовались очевидными неравенствами

$$\tilde{m}_\omega(r,f) \leqslant \tilde{T}_\omega(r,f),\quad \tilde{m}_\omega(r,0,f) \leqslant \tilde{T}_\omega(r,f).$$

Пусть теперь для $k>p+1$

$$\Delta_k(r) = \int_0^r \omega(t)\,t^{k-1}\,dt \underset{r\to\infty}{\to} \infty, \tag{1.11}$$

а для $k<p$

$$\Delta_k(\infty) = \lim_{r\to\infty}\int_0^r \omega(t)\,t^{k-1}\,dt < \infty, \tag{1.12}$$

где p — фиксированное натуральное число.

Тогда (1.10) примет вид

$$\tilde{N}_\omega(r,a,f) \leqslant 2\,\tilde{T}_\omega(\nu r,f)\left(1+2\sum_{k=1}^{p}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)} + \sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)}\right)$$

и с учетом (1.12) получаем

$$\widetilde{N}_\infty(r, a, f) \leqslant 2\, \widetilde{T}_\infty(\nu r, f)\left(c + 2\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)}\right), \tag{1.13}$$

где $c = c(\nu)$ — постоянная.

Из условия (1.3) следует

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\left(\int_0^r \omega(t)\, t^{k-1}\, dt \Big/ \int_0^{\nu r} \omega(t)\, t^{k-1}\, dt\right) \leqslant \alpha(\nu)\, \nu^{-k},\ k > 1. \tag{1.14}$$

Действительно, для любого $t \geqslant t_0(\varepsilon)$

$$\omega(t)/\omega(\nu t) \leqslant (1+\varepsilon)\, \alpha(\nu),\ \varepsilon > 0.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^r \omega(t)\, t^{k-1}\, dt \leqslant (1+\varepsilon)\, \alpha(\nu) \int_{t_0}^r \omega(t\nu)\, t^{k-1}\, dt,\ t_0 > 0,$$

т. е.

$$\int_0^r \omega(t)\, t^{k-1}\, dt \leqslant (1+\varepsilon)\, \alpha(\nu) \int_0^r \omega(t\nu)\, t^{k-1}\, dt + c(\alpha, \varepsilon),$$

где $c(\alpha, \varepsilon)$ — постоянная.

Таким образом

$$\int_0^r \omega(t)\, t^{k-1} dt \Big/ \int_0^r \omega(t\nu)\, t^{k-1}\, dt \leqslant (1+\varepsilon)\, \alpha(\nu) + o(1).$$

Отсюда

$$\int_0^r \omega(t)\, t^{k-1}\, dt \Big/ \int_0^{\nu r} \omega(t)\, t^{k-1}\, dt = \int_0^r \omega(t)\, t^{k-1}\, dt \Big/ \left(\nu^k \cdot \int_0^r \omega(t\nu)\, t^{k-1}\, dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon)\, \alpha(\nu)\, \nu^{-k} + o(1),$$

что и доказывает (1.14).

С учетом (1.14) соотношение (1.13) примет вид

$$\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Delta_k(r)}{\Delta_k(\nu r)} = \sum_{k=p+1}^{\infty} \left(\int_0^r \omega(t)\, t^{k-1}\, dt \Big/ \int_0^{\nu r} \omega(t)\, t^{k-1}\, dt\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\alpha(\nu)}{\nu^k} \leqslant \alpha(\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^k} = \frac{\alpha(\nu)}{\nu - 1};\ \nu > 1$$

и

$$\widetilde{N}_\infty(r, a, f) \leqslant 2\, \widetilde{T}_\infty(\nu r, f)\,(c + 2\alpha(\nu)/(\nu - 1)) =$$

$$= (c(\nu)/(\nu - 1))\, \widetilde{T}_\infty(\nu r, f),$$

что и завершает доказательство леммы.

Справедлива также

Лемма 1.2. *Если мероморфная функция $f(z)$ имеет конечный нижний ω-порядок λ_ω, то для любого $\nu > 1$ существует последовательность $r_k = r_k(\nu) \uparrow \infty$ такая, что при $n > n_0$*

$$\widetilde{T}_\omega(\nu r_n, f) \leqslant \nu^{\lambda_\omega + \alpha_1} \widetilde{T}_\omega(r_n, f). \tag{1.15}$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующей леммы в классическом случае (см., например, [4], стр. 19).

Доказательство теоремы 1. Оценим $\sum\limits_{k=1}^{q} \widetilde{m}_\omega(r, a_k, f)$, где $a_1, \cdots, a_q$ — различные числа из расширенной комплексной плоскости. Так как верно (1.2), то

$$\sum_{\{a\}} \widetilde{m}_\omega(r, a_k, f) \leqslant \sum_{\{a\}} m_\omega(r, a_k, f). \tag{1.16}$$

А. А. Гольдбергом и В. Д. Мохонько установлен следующий аналог 2-ой основной теоремы для характеристик А. Дингхаса ([2], теорема 2):

Теорема 1.1. *Пусть $a_1, \cdots, a_q$ — различные числа из расширенной комплексной плоскости, $f(z)$ — мероморфная функция. Если выполняется хоть одно из пяти условий, определяемых теоремой 1 ([2]), то вне множества конечной меры выполняется* $(r \to \infty)$

$$(q-2)\, T_\omega(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} \overline{N}_\omega(r, a_k, f_r) + O(\ln T_\omega(r, f) + \\ + \int_1^r \omega(t)\, d\ln t). \tag{1.17}$$

Если $f(z)$ — функция конечного порядка, то для любой функции $\omega(x)$ выполняется (без исключительных значений) $(r \to \infty)$

$$(q-2)\, T_\omega(r, f) \leqslant \sum_{k=1}^{q} \overline{N}_\omega(r, a_k, f) + O\left(\int_1^r \omega(t)\, d\ln t\right), \tag{1.18}$$

где $\overline{N}_\omega(r, a, f)$ строится аналогично классическому случаю.

Будем теперь считать, что аналог 2-ой основной теоремы выполняется.

Из формул (1.17) и (1.18) обычным образом следует

$$\sum_{k=1}^{q} m_\omega(r, a_k, f) < 2\, T_\omega(r, f) + s(r)$$

где $(r \to \infty)$

$$s(r)=\begin{cases} O\left(\int\limits_1^r \omega(t)\, d\ln t+\ln T_\infty(r, f)\right), & \lambda=\infty, \\ O\left(\int\limits_1^r \omega(t)\, d\ln t\right), & \lambda<\infty. \end{cases} \tag{1.19}$$

По условиям теоремы функция $f(z)$ имеет конечный нижний ω-порядок, что не предполагает конечности нижнего порядка функции $f(z)$.

После повторного применения формул (1.17) и (1.18) соотношение (1.16) примет вид

$$\sum_{k=1}^{q} \tilde{m}_\infty(r, a_k, f) \leqslant \frac{2}{q-2} \sum_{k=1}^{q} \bar{N}_\infty(r, a_k, f)+s(r), \tag{1.20}$$

где $s(r)$ определяется по (1.19).

По формуле (1.5) леммы 1.1 в условиях нашей теоремы (т. е. справедливо (1.3)) имеем

$$\sum_{k=1}^{q} \bar{m}_\infty(r, a_k, f) \leqslant \frac{4}{q-2} \tilde{T}_\infty(r, f)+\frac{2q}{q-2} \frac{c(\nu)}{\nu-1} \tilde{T}_\infty(\nu r, f)+s(r).$$

Применяя формулу (1.15) леммы 1.2, окончательно получим

$$\sum_{k=1}^{q} \bar{m}_\infty(r, a_k, f) \leqslant c(\nu, f)\, \tilde{T}_\infty(r, f)+s(r). \tag{1.21}$$

Легко видеть, что

$$s(r)(\tilde{T}_\infty(r, f))^{-1} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.22}$$

На основании двух последних формул может оценить $\sum\limits_{\{a\}} \delta_\infty(a_k, f)$:

$$\sum_{k=1}^{q} \delta_\infty(a_k, f)=\sum_{k=1}^{q} \varliminf_{r\to\infty} \tilde{m}_\infty(r, a_k, f)(\tilde{T}_\infty(r, f))^{-1} \leqslant$$

$$\leqslant \varliminf_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{q} \bar{m}_\infty(r, a_k, f)(\tilde{T}_\infty(r, f))^{-1} \leqslant c(\nu, f),$$

т. е.

$$\sum_{k=1}^{q} \delta_\infty(a_k, f) \leqslant c(\nu, f). \tag{1.23}$$

Из неравенства (1.23) обычным образом следует, что множество $D_\infty(f)$ ω-дефектных значений в смысле М. М. Джрбашяна не более чем счетно. Теорема 1 доказана.

Из классической теории Р. Неванлинна известна

Лемма 1.3. *Для любой мероморфной функции $f(z)$ и для любого компакта K положительной плоской меры*

$$\int_K \ln^+ \{|f(z)-a|\}^{-1}\, d\mu(a) \leqslant C(K),$$

где $\mu(a)$ — *распределение положительной единичной массы, решающее для* K *проблему Робена* (см., например, [4], стр. 34).

Отсюда сразу получаем, что

$$\int_K \ln_\infty^+ \{|f(z)-a|\}^{-1}\, d\mu(a) \leqslant C(K)$$

и

$$\int_K \tilde{m}_\infty(r, a, f)\, d\mu(a) \leqslant C(K). \tag{1.24}$$

Теорема 2. *Для любой мероморфной функции* $f(z)$ *и при произвольной порождающей функции* $\omega(x) \in \Omega_\infty$ *множество* ω-*дефектных значений* $D_\infty(f)$ *имеет емкость нуль.*

Доказательство. Пусть E — замкнутое множество, точки a которого представляют ω-дефектные значения в смысле М. М. Джрбашяна мероморфной функции $f(z)$. Пусть E — положительной емкости и пусть $\mu(a)$ — распределение положительной единичной массы, решающее для E проблему Робена. Соответствующий логарифмический потенциал $u(f)$ имеет конечную верхнюю границу и из (1.24) после деления на $\tilde{T}_\infty(r, f)$ и предельного перехода $r \to \infty$, следует, что

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\tilde{T}_\infty(r, f)} \int_E \tilde{m}_\infty(r, a, f)\, d\mu(a) = 0;$$

отсюда вытекает, что

$$\int_E \varliminf_{r\to\infty} \frac{\tilde{m}_\infty(r, a, f)}{\tilde{T}_\infty(r, f)}\, d\mu(a) = 0,$$

т. е.

$$\int_E \delta_\infty(a, f)\, d\mu(a) = 0. \tag{1.25}$$

Так как E выбиралось произвольно, то из (1.25) обычным образом следует, что множество $D_\infty(f)$ ω-дефектных значений в смысле М. М. Джрбашяна всегда имеет емкость нуль. Теорема доказана.

Харьковский государственный
университет им. А. М. Горького

Поступила 25. IV. 1980

Ս. Ս. ՍԵԿՏ. Մերոմորֆ ֆունկցիաների աճը Մ. Մ. Ջրբաշյանի բնութագրիչների տերմիններով *(ամփոփում)*

$\omega(x) \in \Omega_\infty$ ֆունկցիայի աստիճանային աճի դեպքում Մ. Մ. Ջրբաշյանի բնութագրիչների համար ապացուցվում է դեֆեկտների առնչության անալոգը։ Ցույց է տրվում կամայական մերոմորֆ ֆունկցիայի ω-դեֆեկտային արժեքների բազմության բացառիկությունը։ Հոդվածում օգտագործված բոլոր հիմնական նշանակումները և գաղափարները վերցված են [1] աշխատանքից։

S. S. SECT. *Growth of meromorphic funcitons in M. M. Djrbashian characteristics* (summary)

An analogue of the defects of relation for Djrbashian characteristics in case of power growth of $\omega(x) \in \Omega_\infty$ is proved. Exclusitiveness of the set of ω-defective values of an arbitrary meromorphic function is established.

All main conceipts and notatians of the paper are the same as in [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян*. Факторизация функций, мероморфных в конечной плоскости, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», V, № 6, 1970, 453—485.
2. *А. А. Гольдберг, В. Д. Мохонько*. Об обобщенных неванлинновских характеристиках, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XI, № 2, 1976, 132—154.
3. *A. Dinghas*. Uber eine Verallgemeinerung des Nevanlinnaschen Defektbegriftes Kgl. norske vid. selsk. Forhandl., 34, № 25, 1961, 116—123.
4. *В. П. Петренко*. Рост мероморфных функций, Харьков, изд. при ХГУ, изд. объед. «Вища школа», 1978, 136 с.