ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 4, 1981 Математика

Р. В. АМБАРЦУМЯН

О КОМБИНАТОРНЫХ ОСНОВАНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Настоящий краткий обзор представляет собой содержание доклада, прочитанного автором на научной сессии Отделения физико-математических наук АН Армянской ССР 29 января 1981 г. Последний пункт содержит ранее не публиковавшиеся результаты.

I. Классическая Интегральная Геометрия, развитая в трудах В. Бляшке [1] и его учеников [2] занимается в основном отысканием мер в пространствах геометрических элементов (прямые, плоскости и т. д.), инвариантных относительно группы преобразований основного пространства, а также вычислением интегралов по этим мерам. В отличие от классической, Комбинаторная Интегральная Геометрия (КИГ) не ограничивается рассмотрением инвариантных мер. Используя комбинаторные методы, здесь удается получать результаты (так называемые „диофантовы разложения") для широких классов мер. Часто их интерпретация для случаев инвариантных мер приводит к результатам, не известным в классической теории.

Следует отметить, что евклидова структура инцидентности не является обязательной для справедливости диофантовых разложений. Последние поэтому переносятся локально на общие римановы многообразия. Примеры диофантовых разложений, о которых идет речь, дает следующая теорема [3].

Обозначим через H_d пространство ($d-1$-мерных) гиперплоскостей в R^d. Пусть $\{P_i\}_1^n$ — конечная совокупность точек в R^d в общем расположении. Две гиперплоскости $h_1, h_2 \in H_d$ назовем *эквивалентными*, если они порождают одно и то же разбиение множества $\{P_i\}_1^n$. *Ограниченные* множества эквивалентных гиперплоскостей назовем *атомами*. Атомы будем обозначать через a_k.

Обозначим через $\{\sigma_l\}$ класс всех нечетномерных симплексов, которые имеют своими вершинами точки из $\{P_i\}_1^n$. Известно [3], что в случае *четного* d число таких симплексов совпадает с числом атомов.

Обозначим $[\sigma_l] = \{h \in H_d : h$ пересекает симплекс $\sigma_l\}$. Для каждой локально-финитной меры m на H_d, которая приписывает нулевую меру пучкам гиперплоскостей, проходящих через точки P_i, имеем

$$m([\sigma_l]) = \sum_k \delta_{lk} m(a_k), \tag{1}$$

где $\|\delta_{lk}\|$ есть квадратная матрица из нулей и единиц.

Теорема 1. *Матрица $\|\beta_{lk}\|$ обратима, т. е. существует матрица $\|c_{kl}\|=\|\beta_{lk}\|^{-1}$. Другими словами, имеет место разложение*

$$m(a_k)=\sum c_{kl}\, m([\sigma_l]), \qquad (2)$$

которое мы и называем „диофантовым". Применение этого термина в данном круге вопросов восходит к Дж. Сильвестру [4], который пытался определить коэффициенты c_{kl} в плоском случае. Название „диофантово" разложение оправдывается тем, что числа $c_{kl}\cdot a$, где a — определитель матрицы $\|\beta_{lk}\|$, суть целые.

Основные работы по КИГ принадлежат автору настоящей заметки (см. [3], [5—8]). В настоящее время различными аспектами КИГ занимается ряд других авторов (см. [8], а также [9, 10]). Отметим также, что энциклопедический труд [2] не содержит какого-либо материала по КИГ.

II. Приведем несколько результатов двумерной и трехмерной КИГ.

а) Известно, что на гладких римановых многообразиях каждая точка имеет окрестность, внутри которой существует единственный геодезический путь, соединяющий любые две точки из этой окрестности. Как велика может быть площадь этой окрестности?

Естественно поставить изопериметрическую задачу: фиксировать $L>0$ и пытаться найти верхнюю границу значений площади S т. н. дискоидов, натянутых на границу длины L. Многобразие D с краем называется *дискоидом*, если на D выполняется принцип существования и единственности геодезического пути. Как показано в [5], всегда

$$2\pi S\leqslant L^2,$$

равенство достигается на полусфере.

б) С помощью разложения (2) в двумерном случае в работе [6] получен следующий результат: всякая линейно-аддитивная, непрерывная псевдометрика $\rho(P_1, P_2)$ на плоскости порождается (единственной) локально-финитной, беспучковой мерой m в пространстве H_2 по формуле

$$\rho(P_1, P_2)=m(\{h\in H_2: h \text{ отделяет точку } P_1 \text{ от точки } P_2\}).$$

Таким образом, в [6] была продемонстрирована чисто комбинаторная природа этого результата. Эта же задача рассматривалась в [11] с применением некомбинаторных методов.

в) Имеет место (см. [3]) следующий принцип продолжения локальных псевдометрик на многообразиях.

Рассмотрим функцию F, определенную на множестве *геодезических путей* на некотором дифференцируемом римановом многообразии M. Требуется, чтобы M принадлежало бы т. н. классу Сантало. Основное требование, определяющее этот класс, состоит в том, что каждая геодезическая посещает каждый дискоид $D\subset M$ лишь конечное число раз.

Пусть локально (т. е. на каждом дискоиде $D \subset M$) функция представляет собой непрерывную псевдометрику, аддитивную вдоль геодезических. Если дискоид $D_0 \subset M$ посещается (хотя бы однажды) *всеми* геодезическими на M, то значения F на хордах дискоида D_0 однозначно определяет значения F на *всех* геодезических отрезках на M.

д) В трехмерном евклидовом пространстве найдено распределение числа вершин в случайном многоугольнике, возникающих при пересечении выпуклого многогранника случайной плоскостью. Результат записывается в виде „диофантовой" линейной комбинации произведений $\rho_s \cdot \beta_k$, где $\{\rho_s\}$ — расстояния между парами вершин многогранника, $\{\beta_k\}$ — двугранные углы между плоскостями, проходящими через тройки вершин многогранника [7]. Полученное выражение удобно для вычислений на ЭВМ.

е) КИГ имеет многочисленные применения в стохастической геометрии. С некоторыми из них можно познакомиться по статьям сборника [8].

III. На связь результата теоремы 1 в двумерном случае с классической формулой Гаусса-Боннэ в двумерном неевклидовом эллиптическом пространстве указал впервые А. Баддли в статье в сборнике [8]. В настоящем пункте, используя теорему 1, мы построим одно обобщение упомянутой формулы Гаусса-Боннэ, справедливое в эллиптических пространствах высших четных размерностей. Представляется, что наш результат принципиально отличен от обобщения формулы Гаусса-Боннэ. полученного Герглотцем, Черном, Аллендорфером и Вейлем, в том виде, как он приведен в [2]. Обозначим через E_d d-мерное неевклидово эллиптическое пространство. Существует гомеоморфизм

$$\gamma : H_d \to \mathrm{E}_d - \{0\}$$

(выброшенная точка (полюс) $0 \in \mathrm{E}_d$ произвольна), переводящий всякое множество (пучок) гиперплоскостей, проходящих через точку в гипер плоскость в E_d.

Пусть F — ограниченный выпуклый многогранник в R^d с вершинами $\{P_i\}$. Будем предполагать, что d—1-мерные грани многогранника F суть симплексы размерности $d-1$. Рассмотрим множества

$$[F] = \{h \in H_d : h \cap F \neq \varnothing\}.$$

$$[F]^c = \{h \in H_d : h \cap F = \varnothing\}.$$

Нетрудно установить, что:

а) $\gamma([F])$ есть собственный (т. е. не содержащий целиком ни одной гиперплоскости из E_d), геодезически выпуклый многогранник в E_d;

б) всякий собственный геодезически выпуклый многогранник Φ в E_d с простыми вершинами имеет вид

$$\Phi = \gamma\left([F]^c\right).$$

(Вершина называется простой, если в ней пересекаются ровно d $d-1$-мерные грани. Для построения нужного гомеоморфизма γ нужно выбирать полюс внутри Φ).

Запишем диофантово представление для $[F]$:

$$m([F]) = \sum c_l\, m([\sigma_l]). \tag{3}$$

Существование представления (3) выводится суммированием (2) по составляющим $[F]$ атомам. Далее, через m будем обозначать как меру на H_d, так и ее γ-образ на E_d. Если

$$m(\mathrm{E}_d) < \infty,$$

то из (3) находим

$$m(\Phi) = m(\mathrm{E}_d) - \sum c_l\, m(\nu_l),$$

где

$$\nu_l = \gamma([\sigma_l]).$$

Имеет место следующее

Предложение 1. Если ν_l не принадлежит границе Φ, то $c_l = 0$; если $\nu_l \subset \partial\Phi$, то значение c_l зависит только от числа вершин $s = s(l)$ симплекса σ_l и не зависит от выбора многогранника Φ.

Будем писать поэтому $c_l = x_s = x_s(d)$.

Доказательство предложения получается подробным рассмотрением процедуры суммирования по составляющим $[F]$ атомам.

Итак, для любого собственного многогранника $\Phi \subset \mathrm{E}_d$, с простыми вершинами, для всякой ограниченной меры на E_d, приписывающей нуль каждой гиперплоскости в E_d, выполняется (если d четное)

$$m(\Phi) = m(\mathrm{E}_d) - \sum_{s=2,\,4,\cdots,\,d} x_s \sum_{\dim \sigma_l = s-1} m(\nu_l). \tag{4}$$

В частности, m можно выбрать равным обычной объемной мере V_d в E_d. В этом случае

$$V_d(\nu_l) = \frac{V_d(\mathrm{E}_d)}{V_{s-1}(\mathrm{E}_{s-1})}\,\beta_l,$$

где β_l есть раствор $s-1$-мерного внешнего телесного угла при $d-s$-мерной грани $f_l \subset \partial\Phi$. Поясним, что множество ν_l ограничено γ-образами пучков с центрами в вершинах симплекса σ_l, f_l есть пересечение этих γ-образов, $V_d(\mathrm{E}_d)$ суть полуобъемы поверхностей обычных d-мерных единичных сфер.

Таким образом, комбинаторная интегральная геометрия предлагает следующее обобщение формулы Гаусса-Боннэ

$$V_d(\Phi) = V_d(\mathrm{E}_d) - V_d(\mathrm{E}_d) \sum_{s=2,\,4,\cdots,\,d} x_s\, V_{s-1}^{-1}(\dot{\mathrm{E}}_{s-1}) \sum_{\dim \sigma_l = s-1} \beta_l. \tag{4'}$$

В общем случае явный вид коэффициентов $x_s = x_s(d)$ остается неизвестным. Ниже мы обсудим способы их вычисления. Одна из возможностей состоит в решении системы (1), записанной для множества $\{P_i\}_{i=1}^{d+1}$ вершин d-мерного симплекса σ в R^d и в последующем суммировании результата по атомам, составляющим $[\sigma]$. В силу предложения 1, это дает решение задачи для произвольного Ф. Однако, система (1) имеет порядок $\binom{d+1}{2}+\binom{d+1}{4}+\dots+\binom{d+1}{d}$, т. е. порядок весьма велик даже для небольших значений d. Вопрос о сведении этой системы к системам меньших порядков требует специального исследования. Ниже мы укажем другой способ рассуждений, приводящий к системе линейных уравнений значительно меньшего порядка, причем непосредственно для величин x_s. Этот способ пригоден и в других случаях, скажем, для определения коэффициентов в (2). Он может быть назван способом „вырожденных симплексов".

Выберем $d+1$ точек $\{P_i\}$ *на плоскости* так, чтобы они образовывали выпуклый $d+1$-угольник. $\{P_i\}$ можно рассматривать как предельное положение вершин некоторой последовательности невырожденных d-мерных симплексов $\sigma^{(n)} \subset R^d$.

Пусть m — так называемая инвариантная мера в H_d, нормированная условием

$$m(\{h \text{ отделяет } P_1 \text{ от } P_2\}) = 2\rho(P_1, P_2),$$

где ρ—евклидово расстояние. В таком случае

$$\lim_{n\to\infty} m([\sigma^{(n)}]) = \sum a_i, \tag{5}$$

где a_i — длины сторон многоугольника $\{P_i\}_{i=1}^{d+1}$. Тот же предел можно вычислить почленным переходом к пределу в правой части соотношения (3), записанного для $F=\sigma^{(n)}$.

Симплексам меньших размерностей $\sigma_l \subset \partial\sigma^{(n)}$ припишем верхние индексы таким образом, чтобы существовали пределы

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_l^{(n)} = e_l,$$

где e_l — выпуклый многоугольник на R^2, множество его вершин принадлежит $\{P_i\}_{i=1}^{d+1}$, их число равно $s=s(l)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} m([\sigma_l^{(n)}])=$ длине периметра многоугольника e_l, то предел правой части (3) имеет вид

$$\sum Y_{ij}\,\rho(P_i, P_j). \tag{6}$$

Коэффициенты Y_{ij} следующим образом выражаются через неизвестные x_s.

Пусть продолжение отрезка $P_i P_j$ разбивает $\{P_i\}_{i=1}^{d+1}$ на два подмножества, одно из которых содержит k, а другое — $d-k-1$ точек (пусть $k < d - k - 1$). В таком случае отрезок $P_i P_j$ является стороной для $\binom{k}{s-2} + \binom{d-k-1}{s-2}$ s-угольников* типа s_l.

Согласно (5), сумма (6) равна единице, если $k=0$ (т. е. если $P_i P_j$ есть сторона многоугольника $\{P_l\}_{l=1}^{d+1}$) и нулю, если $k>0$. Возможные значения k суть $k=0, 1, 2, \cdots, \frac{d-2}{2}$.

Таким образом, получаем $d/2$ линейных уравнений для определения того же числа неизвестных $x_2, x_4, \cdots, x_d$:

$$\sum_{s=2, 4, \cdots, d} \left[\binom{k}{s-2} + \binom{d-k-1}{s-2}\right] x_s = u_k,$$

где

$$u_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k=0 \\ 0, & \text{если } k>0, \end{cases}$$

Решения этой системы для $d=2, 4, \cdots, 14$ составляют следующую таблицу:

	x_2	x_4	x_6	x_8	x_{10}	x_{12}	x_{14}
$d=2$	1/2						
$d=4$	− 1/4	1/2					
$d=6$	1/2	−1/4	1/2				
$d=8$	−17/8	1/2	−1/4	1/2			
$d=10$	31/2	−17/8	1/2	−1/4	1/2		
$d=12$	−691/4	31/2	−17/8	1/2	−1/4	1/2	
$d=14$	5461/2	−691/4	31/2	−17/8	1/2	−1/4	1/2

Вид этой таблицы дает основание предположить, что всегда

$$x_k(d) = x_2(d-k+2).$$

Отсюда вытекает рекуррентный алгоритм решения системы (7), основанный на нахождении $x_2(d)$, скажем из первого ($k=0$) уравнения системы (7), именно

$$2\, x_2(d) = 1 - \sum_{s=4, \cdots, d} \binom{d-1}{s-2} x_2(d-s+2).$$

Разумеется, этот алгоритм нуждается в полном обосновании.

---

* Это утверждение верно лишь в случае $s>2$. В случае $s=2$ (т. е. когда s_l есть пара точек) соответствующее число равно 1. Однако в этом случае периметр множества s_l следует считать равным удвоенному расстоянию между точками. Это обстоятельство учитывается автоматически равенством $\binom{k}{0} + \binom{d-k-1}{0} \equiv 2$.

Имея в виду предлагаемое решение, естественно ввести новые величины $\varkappa_r$:

$$\varkappa_r = x_2(r+2). \quad r=0,\ 2,\ 4,\cdots,$$

так что

$$\varkappa_0 = 1/2,\ \varkappa_2 = -1/4,\ \varkappa_4 = \frac{1}{2},\ \varkappa_6 = -17/8,\ \varkappa_8 = \frac{31}{2},\ \varkappa_{10} = -\frac{691}{4} \text{ и т. д.}$$

Наше обобщение (4′) формулы Гаусса-Бонна теперь запишется в виде

$$V_d(\Phi) = V_d(\mathrm{E}_d) - V_d(\mathrm{E}_d) \sum_{r=0,2,\cdots,d} \varkappa_r V_{d-r-1}(\mathrm{E}_{d-r-1}) \sum_{\dim f_l = r} \beta_l.$$

Здесь внешняя сумма берется по размерностям граней многогранника Φ; *коэффициенты $\varkappa_r$ зависят только от размерности r грани f_l и не зависят от (четной) размерности пространства E_d.*

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 18.III.1981

Ռ. Վ. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ. Ինտեգրալ երկրաչափության կոմբինատոր հիմքերի վերաբերյալ. *(ամփոփում)*

Հոդվածը սկսվում է կոմբինատոր ինտեգրալ երկրաչափության հիմնական արդյունքների համառոտ ամփոփումով։ Ապա դուրս է բերվում զույգաչափանի էլիպտական տարածություններում Գաուս-Բոննէ-ի բանաձևի մի նոր տարբերակ։ Նոր բանաձևը պարունակում է որոշ կոմբինատոր գործակիցներ, որոնց հաշվարկի մի ալգորիթմ է առաջարկվում։

R. V. AMBARTZUMIAN. *On combinatorial foundations of integral geometry* (summary)

The paper begins with a brief review of some basic results in Combinatorial integral Geometry. The concluding part of the paper is devoted to derivation of a new version of the Gauss — Bonnet formula' for convex polyhedrons in even-dimensional elliptical spaces. This new Gauss — Bonnet type formula involves certain combinatorial coefficients. An algorithm for their calculation is proposed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *W. Blaschke.* Vorlesungen uber Integralgeometrie, Teubner, Leipzig, 1936, 1937.
2. *L. A. Santalo.* Integral geometry and geometric probability, Addison—Wesley, 1976.
3. *R. V. Ambartzumian.* A Synopsis of Combinatorial Integral Geometry, Advances in Mathematics, 37, 1, July, 1980.
4. *J. J. Sylvester.* On a funicular solution of Buffons problem of the needle in its most general form, Acta Math., 14, 1981, 185—205.
5. *R. V. Ambartzumian.* Combinatorial solution of the Buffon—Sylvester problem, Z. Wahrscheinliehkeitstheorie und Verw, Gebiete, 29, 1974, 53—74.
6. *R. V. Ambartzumian.* A note on pseudometrics on the plane, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Varw. Gebiete, 37, 1976, 145—155.
7. *R. V. Ambartzumian.* The solution of the Buffon—Sylvester problem in R^3, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete, 27, 1973, 53—74.
8. Комбинаторные принципы в стохастической геометрии. Сборник статей под редакцией Р. В. Амбарцумяна, Изд. АН Армянской ССР, Ереван, 1980.

9. *F. Plefke.* Schnitte von zufälligen Geraden durch endliche Punktmengen in der Ebene, Studia Sci. Math. Hungarica, 11, 1976, 301—311.

10. *F. Plefke.* Masze für gerichtete Geraden und nicht-symmetrische Pseudometriken in der Ebene II. Monatshefte für Mathematik, 89, 1980, 45—56.

11. *А. В. Погорелов.* Полное решение четвертой проблемы Гильберта, ДАН СССР, 14, 1973, 46—49.