ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 4, 1981 Математика

Л. З. ГЕВОРКЯН

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ НЕКОТОРОГО СЕМЕЙСТВА НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

0°. В настоящей заметке метод, изложенный в [1], [2] применяется для исследования семейства операторов вида

$$(B_\alpha f)(x) = xf(x) + \alpha \int_0^x G(x-t) f(t)\, dt. \tag{1}$$

Хотя дальнейшее построение можно провести и в случае, когда $G(x)$ более или менее произвольная функция (см. п. 2.1), однако, чтобы сделать конструкцию особенно прозрачной, мы будем рассматривать случай, когда $G(x) \equiv 1$. Дело в том, что даже этому простейшему случаю посвящено большое число работ. Так, например, Сахнович еще в 1958 г. доказал, что операторы B_i и B_0 подобны в пространстве $L^2(0,1)$ [3], впоследствии Калиш доказал, что операторы B_α и $B_{\mathrm{Re}\,\alpha}$ при любом $\alpha \in \mathbb{C}$ подобны в любом пространстве $L^p(0,1)$ [4], затем Калиш в работе [5] доказал, что у оператора B_{-1} спектр простой и чисто точечный.

В работе [1] (см. также [2]) доказано, что если оператор A обладает циклическим вектором и порожденная им алгебра полупроста, то этот оператор изометрически изоморфен оператору умножения на независимую переменную, который и называется функциональной моделью оператора A.

1.1. Наша цель заключается в построении функциональной модели для семейства операторов вида

$$(B_\alpha f)(x) = xf(x) + \alpha \int^x f(t)\, dt, \tag{2}$$

действующего в пространстве $L^2(0,1)$, где α — произвольное комплексное число.

Заметим, что правая часть (2) сохраняет смысл и для обобщенных функций, если понимать фигурирующий там интеграл как регуляризованное в смысле [6] значение интеграла. При этом легко убедиться, что хотя при $\mathrm{Re}\,\alpha > 1/2$ функция $\xi_\alpha(x) = x^{-\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ не принадлежит пространству $L^2(0,1)$, однако

$$(B_\alpha \xi_\alpha)(x) = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x t^{-\alpha}\, dt = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Другими словами, действие оператора B_α на функцию ξ_α сводится к уменьшению индекса α на единицу. Поэтому, если ξ_α не принадлежит пространству $L^2(0,1)$, то его некоторая итерация $\xi_{\alpha-n}=B^n\xi_\alpha$ уже будет принадлежать $L^2(0,1)$.

Лемма 1.1. *Функция $\xi_{\alpha-n}$ является циклическим вектором оператора B_α.*

Для доказательства этого утверждения воспользуемся следующей теоремой единственности.

Теорема ([7], III, 298). Если в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z>0$ функция $f(z)$ аналитична и ограничена и обращается в нуль в точках $\{z_n\}$, $|z_n|>1$, $\mathrm{Re}\, z_n>0$, то тогда либо ряд

$$\sum \mathrm{Re}\, \frac{1}{z_n}$$

сходящийся, либо $f(z)\equiv 0$.

Пусть $\varphi\in L^2(0,1)$ — функция, ортогональная к $\{B^k\xi_{\alpha-n}\}_{k=0}^{\infty}$. Определим функцию $f(z)$ по формуле

$$f(z)=\int_0^1 t^z\,\overline{\varphi(t)}\,dt.$$

Легко можно доказать, что $f(z)$ — ограниченная в правой полуплоскости аналитическая функция. Из упомянутой ортогональности следует, что $f(k-\alpha)=0$ при всех $k=n,\ n+1,\cdots$. Поэтому в силу приведенной теоремы единственности из расходимости ряда $\sum\frac{1}{k-\alpha}$ заключаем, что $f(z)\equiv 0$, откуда, в свою очередь, следует, что $\varphi=0$.

Рассмотрим сопряженный оператор B_α^*, который имеет вид

$$(B_\alpha^* f)(x)=xf(x)+\bar\alpha\int_x^1 f(t)\,dt.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция

$$h_\lambda(x)=c\,\frac{\theta(\lambda-x)}{(\lambda-x)^{1-\alpha}}\quad (\theta(x)\text{ — функция Хевисайда}).$$

при $\alpha>0$ является собственной функцией оператора B_α^* с собственным значением, равным λ, однако она принадлежит пространству $L^2(0,1)$ лишь при $\mathrm{Re}\,\alpha>1/2$.

Собственные функции h_λ мы в отличие от [1], [2] будем нормировать условием $(\xi_\alpha,\ h_\lambda)_{L^2}=1$,

$$\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^x t^{-\alpha}(x-t)^{\alpha-1}\,dt=\frac{c}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 z^{-\alpha}(1-z)^{\alpha-1}\,dz=$$

$$=\frac{c\beta(1-\alpha,\ \alpha)}{\Gamma(1-\alpha)}=c\Gamma(\alpha)=1$$

(интеграл понимается в смысле регуляризованного значения). Таким образом, дробный интеграл Римана-Лиувилля J^{α} есть интегральный оператор с ядром $h_x(t)$, являющимся собственной функцией оператора B_{α}^{*}.

1.2. Покажем теперь, что оператор Римана-Лиувилля J^{α} $(\alpha>0)$ есть в точности дробная степень оператора дифференцирования в смысле теории операторов [8].

С этой целью напомним определение дробной степени оператора. Пусть A — замкнутый оператор в некотором пространстве H с плотной областью определения и замкнутая отрицательная полуось лежит в резольвентном множестве оператора A, а резольвента удовлетворяет неравенству

$$\|R_{\lambda}\|\leqslant\frac{c}{1+|\lambda|}\quad(\lambda<0),\tag{3}$$

тогда дробную степень $A^{-\alpha}$ оператора A можно определить формулой

$$A^{-\alpha}=\frac{\sin\alpha\pi}{\cdot\,\pi}\cdot\frac{(n-1)!}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}\int\limits_0^{\infty}\lambda^{n-1-\alpha}R_{-\lambda}^{n}\,d\lambda\quad(n-1<\alpha<n).\tag{4}$$

Положительные степени оператора A определяются как обратные к соответствующим отрицательным, причем они являются неограниченными операторами. При этом имеет место групповое свойство

$$A^{\alpha}A^{\beta}x=A^{\beta}A^{\alpha}x=A^{\alpha+\beta}x\quad(x\in D(A^{\gamma}),\ \gamma=\max\{\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\}),$$

и для любых чисел $\alpha<\beta<\gamma$ выполняется неравенство моментов

$$\|A^{\beta}x\|\leqslant c(\alpha,\ \beta,\gamma)\|A^{\alpha}x\|^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}}\cdot\|A^{\gamma}x\|^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}},\quad x\in D(A^{\gamma}).$$

В определении дробной степени $A^{-\alpha}$ α можно считать комплексным числом с $\operatorname{Re}\alpha>0$, причем $A^{-\alpha}$ является аналитической функцией в правой полуплоскости со значениями в $B(H)$.

Обозначим через $J^{-1}=d/dx$ оператор дифференцирования в пространстве $L^2(0,1)$ с областью определения

$$D=\{\varphi:\varphi(0)=0,\ \varphi\text{ — абсолютно непрерывна},\ \int\limits_0^1|\varphi'|^2\,dx<\infty\}.$$

Резольвента этого оператора имеет вид

$$(R_{\lambda}f)(x)=\int\limits_0^x e^{\lambda(x-t)}f(t)\,dt.$$

Оценим норму резольвенты. Для этого воспользуемся неравенством Юнга [9], которое в случае $L^2(0,1)$ принимает вид

$$\|g*h\|_{L^2}\leqslant\|g\|_{L^1}\|h\|_{L^2}.$$

Тогда

$$\|R_\lambda f\| \leqslant \frac{e^\lambda - 1}{\lambda} \|f\|,$$

откуда нетрудно получить необходимую оценку (3).

Таким образом, мы находимся в условиях применимости формулы (4), применяя которую будем иметь

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} d\lambda \int_0^x e^{-\lambda(x-t)} f(t)\, dt \quad (0 < \alpha < 1).$$

После перестановки пределов интегрирования и замены переменной окончательно получим

$$(J^\alpha f)(x) = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int_0^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \int_0^\infty z^{-\alpha} e^{-z} dz = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)\, dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{5}$$

Заметим, что это равенство остается справедливым и для $\alpha > 1$, если интеграл понимать в смысле регуляризованного значения [6]. Из неравенства Юнга легко следует, что оператор Римана-Лиувилля при $\alpha > 0$ действует из пространства $L^2(0,1)$ в пространство $L^2(0,1)$. Обозначим через H_α образ пространства $L^2(0,1)$ при отображении J^α Легко видеть, что J^α является взаимно-однозначным отображением $L^2(0,1)$ на H_α. Введем в H_α скалярное произведение

$$(f, g)_\alpha = (J^{-\alpha} f, J^{-\alpha} g)_0 = (J^{-\alpha} f, J^{-\alpha} g)_{L^2}.$$

Лемма 1.2. *Пространства H_α, $\alpha \geqslant 0$ образуют банахову шкалу гильбертовых пространств.*

Сначала докажем, что пространство H_β плотно вложено в H_α при $\beta > \alpha$. Действительно

$$H_\beta = J^\beta L^2 = J^\alpha J^{\beta-\alpha} L^2 \subset J^\alpha L^2 = H_\alpha.$$

Если же $\varphi \in H_\alpha$ ортогональна к H_β, то

$$(\varphi, H_\beta)_\alpha = (J^{-\alpha} \varphi, J^{\beta-\alpha} L^2)_0 = 0,$$

т. е. φ ортогональна к $H_{\beta-\alpha}$ (в смысле $L^2(0,1)$. Воспользовавшись леммой 1.1, легко можно доказать, что пространство H_γ при любом $\gamma > 0$ плотно в $L^2(0,1)$, откуда получим $J^{-\alpha}\varphi = 0$, $\varphi = 0$. Неравенство моментов принимает вид

$$\|x\|_\beta \leqslant c(\alpha, \beta, \gamma) \|x\|_\alpha^{\frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha}} \cdot \|x\|_\gamma^{\frac{\beta-\alpha}{\gamma-\alpha}}.$$

Эти два условия и означают, что пространства H_α, $\alpha \geqslant 0$ образуют банахову шкалу пространств [9].

Так как все пространства H_α гильбертовы, то естественно предположить, что пространства H_α образуют гильбертову шкалу пространств.

П р е д л о ж е н и е 1.3. *Шкала* $\{H_\alpha\}_{\alpha>0}$ *не является гильбертовой.*

В теории самосопряженных операторов хорошо известным является следующий факт [9].

Пусть H_0 и H_1 — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_0$ и $(\cdot,\cdot)_1$, причем пространство H_1 плотно в H_0 и $\|\cdot\|_1 \geqslant \|\cdot\|_0$.

Тогда существует самосопряженный оператор Q такой, что областью его определения служит пространство H_1 и $\|f\|_1 = \|Qf\|_0$.

Если через H_α обозначить область определения оператора Q^α, то скалярное произведение

$$(f,\ g)_\alpha = (Q^\alpha f,\ Q^\alpha g)_0$$

превращает H_α в гильбертово пространство, а шкалу $\{H_\alpha\}$ — в шкалу гильбертовых пространств.

В нашем случае пространство H_1 есть образ пространства $L^2(0,1)$ при отображении

$$(Jf)(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt,$$

т. е. состоит из абсолютно непрерывных функ[illegible], [illegible] нулю точке 0 и имеющих квадратично суммируемую производную. Так какв $\|J\| = 2/\pi$ (см. [10], задача 148), то

$$\|f\|_0 = \|Jf'\|_0 \leqslant 2/\pi \|f'\|_0 = 2/\pi \|f\|_1,$$

$$\|f\|_1 \geqslant \frac{\pi}{2} \|f\|_0 > \|f\|_0.$$

Теперь если мы по паре H_0, H_1 найдем оператор Q, то он будет иметь вид (с точностью до унитарного множителя) $(Qf)(x) = f'(1-x)$

Хотя и скалярное произведение

$$(Qf,\ Qg) = \int\limits_0^1 f'(1-x)\,\overline{g'(1-x)}\,dx$$

совпадает с тем скалярным произведением, которое есть в H_1, но тем не менее гильбертова шкала, построенная по оператору Q не совпадает с уже имеющейся шкалой. Это не так хотя бы потому, что квадрат оператора Q имеет вид $Q^2 = -d^2/dx^2$ при граничных условиях $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, а пространство H_2 в нашем случае состоит из функций φ, удовлетворяющих условиям

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \int\limits_0^1 |\varphi''|^2\,dx < \infty.$$

Известно, что существует единственная шкала гильбертовых пространств, соединяющая данные два пространства [9].

Замечание 1.4. Взяв оператор дифференцирования $K^{-1}=-d/dx$ с областью определения

$$D=\{\varphi:\varphi(1)=0,\ \varphi\text{ — абсолютно непрерывна, } \int_0^1|\varphi'|^2dx<\infty\}$$

мы тем же путем получили бы оператор дробного интегрирования Вейля K^α

$$(K^\alpha f)(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^1\frac{f(t)\,dt}{(t-x)^{1-\alpha}}.$$

Легко видеть, что операторы J^α и K^α являются сопряженными (в смысле $L^2(0,1)$). Если через H^α обозначить образ $L^2(0,1)$ при отображении K^α и там ввести скалярное произведение

$$_\alpha(f,\ g)=(K^{-\alpha}f,\ K^{-\alpha}g)_{L^2},$$

то мы получим банахову шкалу $\{H^\alpha\}_{\alpha>0}$. Шкалы $\{H_\alpha\}$ и $\{H^\alpha\}$ имеют общее начало — пространство $L^2(0,1)$. В известном смысле эти две шкалы совпадают в некоторой окрестности точки 0. Более точно имеет место следующее

Предложение 1.5. *Пусть* $0<\alpha<1/2$. *Тогда*

а) *множества* H_α *и* H^α *совпадают,*

б) *нормы* $\|\cdot\|_\alpha$ и $_\alpha\|\cdot\|$ *эквивалентны.*

Доказательство этого утверждения является непосредственным следствием теоремы, доказанной Джубергом [11], о том, что при $|\mathrm{Re}\,\alpha|<1/2$ оператор $J^{-\alpha}K^\alpha$ ограничен и ограниченно обратим в $L^2(0,1)$.

Выше мы отметили, что дробная степень оператора допускает продолжение до аналитической в правой полуплоскости вектор-функции. Это продолжение задается формулой (5), где под $(x-t)^{\alpha-1}$ понимается та ветвь многозначной функции, которая соответствует главной ветви логарифма. В этом случае ($\mathrm{Re}\,\alpha>0$) мы сохраним наши обозначения H_α и $(\cdot,\cdot)_\alpha$.

Предложение 1.6. *Пусть* $\alpha=a+ib$, *где* $a\geqslant 0$, $b\in R$. *Тогда*

а) *множества* H_α *и* H_a *совпадают,*

б) *нормы* $\|\cdot\|_\alpha$ *и* $\|\cdot\|_a$ *эквивалентны.*

Для доказательства этого утверждения достаточно использовать групповое свойство семейства J^α и известный результат о том, что оператор мнимого интегрирования ограничен и ограниченно обратим в $L^2(0,1)$ [12].

Из результатов работы [1] следует, что оператор J^α приводит семейство B_α к оператору умножения на независимую переменную. Впрочем, в рассматриваемом частном случае это нетрудно установить и непосредственно. В самом деле, для этого достаточно показать, что

$$J^\alpha(X+\alpha J)=XJ^\alpha, \tag{6}$$

где через X обозначен оператор умножения на x в пространстве $L^2(0,1)$.

Действительно, при $\operatorname{Re}\alpha>0$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{tf(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}+\frac{\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{-\alpha}}=\frac{x}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}}.$$

Рассмотрим теперь семейство B^*_α. Из равенства (6) получим

$$(X+\alpha K)K^{\bar\alpha}=K^{\bar\alpha}X,\quad K^{\bar\alpha}(X-\bar\alpha K)=XK^{\bar\alpha},$$

т. е. оператор K^α приводит семейство B^*_α к оператору умножения. Таким образом, мы приходим к следующей основной теореме.

Теорема 1.7. *Оператор дробного интегрирования J^α $\operatorname{Re}\alpha>0)$ устанавливает изометрический изоморфизм между оператором B_α и сужением оператора X на пространство H_α. Оператор дробного интегрирования Вейля K^α устанавливает изометрический изоморфизм между оператором $B^*_{-\alpha}$ и сужением оператора X на пространство H^α.*

Итак, для исследования семейства B_α при $\operatorname{Re}\alpha>0$ мы можем воспользоваться пространствами H_α, а при $\operatorname{Re}\alpha<0$ — пространствами $H^{-\alpha}$.

В следующем пункте мы покажем, что эти два случая могут быть объединены, если оператор Римана-Лиувилля рассматривать уже в пространстве обобщенных функций.

1.3. Обозначим через H^∞ пространство всех бесконечно дифференцируемых на $]0,1[$ функций, удовлетворяющих условию

$$\lim_{x\to 1-0} f^{(n)}(x)=0,\quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

Введем в H^∞ систему скалярных произведений

$$_\alpha(f,\,g)=(K^{-\alpha}f,\,K^{-\alpha}g)_{L^2}.$$

Обозначим через $H_{-\infty}$ пространство, сопряженное к H^∞, т. е. пространство всех антилинейных и непрерывных относительно каждой из норм $_\alpha\|\cdot\|$ функционалов над H^∞. Определим оператор Римана-Лиувилля произвольного порядка α над $H_{-\infty}$ по формуле

$$(J^\alpha\varphi,\,h)=(\varphi,\,\bar K^\alpha h),\quad \varphi\in H_{-\infty},\quad h\in H^\infty.$$

Естественность такого расширения оператора Римана-Лиувилля подтверждается тем, что если $\operatorname{Re}\alpha>0$ и $\varphi\in L^2$, то это определение эквивалентно данному выше определению J^α, если же $\operatorname{Re}\alpha<0$ и $\varphi\in H_{-\alpha}$, то J^α совпадает с $(J^{-\alpha})^{-1}$.

Далее, для любого α обозначим через H_α образ пространства $L^2(0,1)$ при отображении J^α и введем в H_α скалярное произведение

$$(f,\,g)_\alpha=(J^{-\alpha}f,\,J^{-\alpha}g)_{L^2}.$$

Тогда ясно, что пространство H_α при любом α изометрически изоморфно пространству $L^2(0,1)$. Определим умножение элементов пространства $H_{-\infty}$ на независимую переменную x по формуле

$$(x\cdot\varphi,\ h)=(\varphi,\ x\cdot h).$$

Это умножение совпадает с обычным (поточечным) умножением, когда $\varphi\in L^2(0,1)$.

Тогда из вышесказанного следует, что семейство B_α приводится к оператору умножения в системе пространств $\{H_\alpha\}$, $\alpha\in\mathbf{C}$.

1.4. В качестве простого приложения построенной модели найдем инвариантные подпространства оператора $\overset{\bullet}{B}_{-1}$ (а значит и B_{-1}). Для этого подробнее рассмотрим пространство $\overset{\bullet}{H}{}^1$. Оно совпадает с пространством абсолютно непрерывных функций с квадратично суммируемой производной, равных нулю в точке $x=1$. Обозначим через $AC^2(0,1)$ пространство всех абсолютно непрерывных функций с квадратично суммируемой производной. В пространстве $AC^2(0,1)$ можно ввести две эквивалентные нормы

$$\|f\|_1^2=|f(0)|^2+\int\limits_0^1|f'|^2\,dx,$$

$$\|f\|_2^2=|f(1)|^2+\int\limits_0^1|f'|^2\,dx.$$

Сужение первой нормы на H_1 совпадает с нормой этого пространства, сужение второй на $\overset{\bullet}{H}{}^1$—с нормой пространства $\overset{\bullet}{H}{}^1$. Найдем теперь инвариантные подпространства оператора $\overset{\bullet}{B}_{-1}$. Инвариантные подпространства оператора умножения x в пространстве $AC^2(0,1)$ описаны в [13], [14]. Они определяются замкнутыми подмножествами F отрезка $[0,1]$ и состоят из всех функций, равных нулю на F. Отсюда следует, что инвариантные подпространства оператора $\overset{\bullet}{B}_{-1}$ определяются замкнутыми подмножествами F отрезка $[0,1]$ и состоят из всех функций $f\in L^2(0,1)$, для которых

$$\int\limits_x^1 f(t)\,dt=0,\ \forall x\in F.$$

Это условие можно переписать в виде

$$\int\limits_0^1 f(t)\,\theta(x-t)\,dt=0.$$

Таким образом, это инвариантное подпространство является ортогональным дополнением к множеству $\{\theta(x-t)\}_{x\in F}$. Инвариантное подпространство оператора B_{-1} будет совпадать с замкнутой линейной оболочкой множества $\{\theta(x-t)\}_{x\in F}$. Отсюда получается следующая

Теорема 1.8. *Инвариантные подпространства оператора B_{-1} определяются открытыми подмножествами U отрезка* $[0,1[$ *и состоят из всех функций $f \in L^2(0,1)$, которые равны нулю на той компоненте связности множества U, которая содержит точку* 0, *а на остальных компонентах постоянны.*

Следует отметить, что как указано в работе [13], Бун-Хуа-Онг нашел решетку инвариантных подпространств оператора B_α при целых α, однако ни сам результат, ни ссылка на какую-либо публикацию не приводятся.

2.1. В этом пункте мы ограничимся изложением формальной схемы, позволяющей аналогичным образом рассматривать возмущения более общего вида.

Рассмотрим семейство операторов

$$(B_\alpha f)(x) = xf(x) + \alpha \int_0^x G(x-t) f(t)\, dt.$$

Предположим, что существует преобразование типа свертки с ядром $K_\alpha(x)$, которое приводит семейство B_α к оператору умножения, т. е.

$$(K_\alpha * B_\alpha f)(p) = p\,(K_\alpha * f)(p).$$

Применяя преобразование Лапласа, получим

$$\widetilde{K}_\alpha(-F' + \alpha\widetilde{G}F) = -\widetilde{K}'_\alpha F - \widetilde{K}_\alpha F',$$

где $\widetilde{K}_\alpha$, $\widetilde{G}$ и F — преобразование Лапласа $K(x)$, $G(x)$ и $f(x)$ соответственно. Решая это дифференциальное уравнение, получим

$$\widetilde{K}_\alpha = ce^{-\alpha\int \widetilde{G}\,dp},$$

откуда $K_\alpha(x)$ можно найти обратным преобразованием Лапласа.

Начнем с тривиального примера, когда $G(x) \equiv 1$. Тогда

$$\widetilde{K}_\alpha = \frac{c}{p^\alpha}.$$

Обратное преобразование дает $K_\alpha(x) = cx^{\alpha-1}/\Gamma(\alpha)$, т. е. мы опять получили ядро оператора Римана-Лиувилля.

Пусть теперь $G(x) = \cos ax$. Тогда

$$\widetilde{K}_\alpha = e^{-\alpha\int \frac{p\,dp}{p^2+a^2}}.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$K_\alpha(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\alpha/2)} \left(\frac{x}{2a}\right)^{\alpha/2-1/2} J_{\alpha/2-1/2}(ax),$$

где $J_m(z)$ — функция Бесселя первого рода.

Пусть $G(x) = J_0(ax)$, Тогда

$$\widetilde{K}_\alpha = \frac{1}{(p + \sqrt{p^2 + a^2})^\alpha}.$$

Для этой функции оригиналом является

$$K_\alpha(x) = \frac{\alpha a^{2\alpha}}{x} J_{-\alpha}(ax).$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 3.III.1979

Լ. Զ. ԳԵՎՈՐԳՅԱՆ. Ոչ-ինքնահամալուծ օպերատորների որոշակի փնջի ֆունկցիոնալ մոդելը *(ամփոփում)*

Ցույց է տրված, որ ոչ-ինքնահամալուծ օպերատորների որոշակի փունջը կոտորակային ինտեգրման օպերատորի միջոցով կարելի է բերել անկախ փոփոխականով բազմապատկման օպերատորի ընդհանրացված ֆունկցիաներ պարունակող Հիլբերտյան տարածությունների շկալայում։

L. Z. GEVORGIAN. *The functional model of certain bundle of non-selfadjoint operators* (summary)

It has been shown that a certain bundle of non-self-adjoint operators can be bought by the operator of fractional integration into operator of multiplication by independent variable on the scale of Hilbert spaces, consisting of generalized functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Л. З. Геворкян.* Функциональная модель для некоторого класса несамосопряженных операторов, ДАН АрмССР, 70, № 4, 1980, 212—215.
2. *Л. З. Геворкян.* О представимости операторов в виде оператора умножения на независимую переменную, Дифференциальные уравнения с частными производными, «Наука», Новосибирск, 1980.
3. *Л. А. Сахнович.* Приведение несамосопряженных операторов с непрерывным спектром к диагональному виду, Мат. сб. 44, 1958, 180—186.
4. *G. K. Kalisch.* On similarity of certain operators, Colloq. Math. János Bolai, 5 Hilbert space operators and operator algebras, Tihang (Hungarg), 1970, North Holland Publ. Co. Amsterdam—London, 1972.
5. *G. K. Kalisch.* On operators on Banach spaces with arbitrary prescribed poin spectrum, Proc. Amer. Math. Soc., 34, 1972, 207—208.
6. *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов.* Обобщенные функции, вып. 2, Пространства основных и обобщенных функций, Физматгиз, 1958.
7. *Г. Полиа, Г. Сеге.* Задачи и теоремы из анализа, т. I, «Наука», 1978.
8. *С. Г. Крейн.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве «Наука», 1967.
9. *С. Г. Крейн, Ю. И. Петунин, Е. М. Семенов.* Интерполяция линейных операторов, «Наука», 1978.
10. *П. Халмош.* Гильбертово пространство в задачах. «Мир», 1970.
11. *R. K. Juberg.* The spectra for operators of a basic collection, Bull. Amer. Math. Soc., 79, № 4, 1973, 821—824.

12. *Л. А. Сахнович*. Треугольные интегро-дифференциальные операторы с разностным ядром, Сиб. мат. ж., 19, № 4, 1978, 871—877.

13. *O. Sarason*. Invariant subspaces, in Math. Surveys, vol. 13, Topics in operator theory, 2nd edition. Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1979.

14. *Л. З. Геворкян*. Функциональная модель и инвариантные подпространства некоторого класса строго циклических операторов, Изв. АН АрмССР, «Математика», XIV, № 1, 1979, 42—48.