ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 4, 1981 Математика

Э. П. МЕЛИКСЕТЯН

# ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ СЛАБО СВЯЗАННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

## Введение

Пусть $D$ — односвязная область, ограниченная аналитической кривой Г. В работе рассматривается следующая задача.

Задача Дирихле. Найти в области $D$ дважды непрерывно дифференцируемое решение слабо связанной эллиптической системы дифференциальных уравнений

$$AU_{xx}+BU_{xy}+CU_{yy}=0, \tag{1}$$

непрерывное в замкнутой области $D+\Gamma$ и удовлетворяющее граничному условию

$$U(x, y)|_\Gamma=f(x, y), \tag{2}$$

где $A$, $B$ и $C$ — постоянные, вещественные квадратные матрицы $n$-го порядка, $f(x, y)=\{f_1(x, y), \cdots, f_n(x, y)\}$ — заданная на Г вещественная, непрерывная вектор-функция, а $U(x, y)=\{U_1(x, y), \cdots$ $\cdots, U_n(x, y)\}$ — искомое вещественное решение. Понятие слабой связанности эллиптической системы дано в монографии А. В. Бицадзе [1].

В случае, когда $f(x, y)\in C^1_\alpha(\Gamma)$, а решение $U(x, y)$ ищется, в классе $C^1_\alpha(D+\Gamma)$, задача (1)—(2) исследована в монографии [1], в которой показано, что если $f(x, y)\in C^1_\alpha(\Gamma)$, то решение задачи (1)—(2) в классе $C^1_\alpha(D+\Gamma)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_\Gamma f(x, y)\,\psi_j(x, y)\,ds=0 \quad (j=1, \cdots, m), \tag{3}$$

где $\psi_j(x, y)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые вектор-функции, а $s$ — длина дуги контура Г.

Задача Дирихле для одного эллиптического уравнения, когда граничные данные принадлежат классам $L_p$ $(p>1)$ и в классах Соболева, исследована в работах Б. В. Хведелидзе [6], В. П. Михайлова [7], В. С. Виноградова [8].

Пусть вектор-функция $f(x, y)\in C^1_\alpha(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3), тогда в классе $C'_\alpha(D+\Gamma)$ решение $U(x, y)$ представляется в виде (см. [1]).

$$U(x, y) = \int_{\gamma} K(z, t) f(t)\, dt + \sum_{j=1}^{m} C_j U_j(x, y),\ z = x + iy \in D, \tag{4}$$

где $U_1(x, y), \cdots, U_m(x, y)$ — бесконечно дифференцируемые в $D + \Gamma$ линейно независимые решения однородной $(f(x, y) \equiv 0)$ задачи (1)—(2); $K(z, t)$—некоторая бесконечно дифференцируемая квадратная матрица $n$-го порядка при $z \in D$, $t \in \Gamma$, причем при соблюдении условия (3), оператор

$$K(f) \overset{\text{def}}{=} \int_{\gamma} K(z, t) f(t)\, dt,\ z \in D,\ t \in \Gamma \tag{5}$$

является частным решением задачи (1)—(2).

Основной целью данной работы является: показать, что вышеуказанные результаты монографии [1] остаются в силе, если $f(x, y) \in C(\Gamma)$, а решение ищется в классе $C(D + \Gamma) \cap C^2(D)$.

В настоящей работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. *Если* $f(t) \in C^\infty(\Gamma)$, *то решение* $U(x, y)$ *задачи* (1)—(2) *принадлежит классу* $C^\infty(D + \Gamma)$.

Теорема 2. *Оператор* (5) *удовлетворяет оценке*

$$|K(f)| \leqslant c \max_{t \in \Gamma} |f(t)|,\ \{f(t) \in C^\infty(\Gamma)\}, \tag{6}$$

*где $c$—некоторая постоянная, не зависящая от $f(t)$.*

Теорема 3. *Для разрешимости задачи* (1)—(2) *при непрерывных граничных условиях необходимо и достаточно выполнение условия* (3), *при этом решение задачи* (1)—(2) *дается формулой* (4).

Работа состоит из двух параграфов. В § 1 приводятся некоторые леммы, необходимые для доказательства вышеуказанных теорем, а § 3 содержит доказательства теорем 1, 2 и 3.

## § 1. Некоторые вспомогательные предложения

Рассмотрим на окружности $|t| = 1$ интегральное уравнение

$$\varphi(t) + \int_{|\tau|=1} K_1(t, \tau) \varphi(\tau)\, d\tau + \int_{|\tau|=1} K_2(t, \tau) \overline{\varphi(\tau)}\, d\tau = F(t), \tag{7}$$

где $F(t) = \{F_1(t), \cdots, F_n(t)\}$—заданная непрерывная вектор-функция, а $\varphi(t) = \{\varphi_1(t), \cdots, \varphi_n(t)\}$ — искомое непрерывное решение, при этом $K_j(t, \tau)$, $(j = 1, 2)$—бесконечно дифференцируемые квадратные матрицы $n$-го порядка по $t$ и $\tau$ соответственно на $|t| = 1$ и $|\tau| = 1$; вектор-функция $\overline{\varphi(t)}$—комплексно сопряженная к $\varphi(t)$.

В теории интегральных уравнений (см. [2]) доказано, что если для вектор-функции $F(t)$ уравнение (7) имеет решение, то частное решение определяется формулой

$$\varphi(t) = F(t) + \int\limits_{|\tau|=1} M_1(t, \tau) F(\tau) d\tau + \int\limits_{|\tau|=1} M_2(t, \tau) \overline{F(\tau)} d\tau, \tag{8}$$

где $M_j(t, \tau)$, $(j=1, 2)$ — некоторые бесконечно дифференцируемые матрицы по $t$ и $\tau$ соответственно на $|t|=1$ и $|\tau|=1$, не зависящие от $F(t)$.

В качестве $F(t)$ возьмем функцию

$$F(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ |z|<1}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \ |t|=1, \ \zeta = \xi + i\eta, \tag{9}$$

где $f(\zeta)$ — действительная, бесконечно дифференцируемая вектор-функция. Согласно формуле Сохоцкого—Племеля (см. [3])

$$F(t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - t}, \tag{10}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Подставляя $F(t)$ из (10) в (8) и меняя порядок интегрирования, получим

$$\varphi(t) = F(t) + \int\limits_{|\zeta|=1} M_3(t, \zeta) f(\zeta)\, d\zeta, \tag{11}$$

где $M_3(t, \zeta)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая матрица по $t$ и $\zeta$ на $|t|=1$ и $|\zeta|=1$, не зависящая от $f(t)$.

Формула (11) остается в силе, если

$$F(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ |z|<1}} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \ |t|=1. \tag{12}$$

Пусть функция $z = \alpha(t)$ конформно отображает единичный круг $|t| < 1$ в область $D$, а $\mu$—некоторая постоянная, причем $|\mu| < 1$. Так как граница $\Gamma$ области $D$ является аналитической кривой, то $\alpha(t)$ аналитически продолжается в некоторую окрестность окружности $|t|=1$;

$$\alpha'(t) \neq 0 \text{ при } |t| \leqslant 1 \text{ (см. [4])}.$$

Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *Существует такое кольцо* $1 - \varepsilon \leqslant |t| \leqslant 1 + \varepsilon$, *что функции* $z = \alpha(t)$ *и* $z = \alpha(t) + \mu \cdot \overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{t}}\right)}$ *конформно отображают это кольцо в некоторые двусвязные области* $D_1$ *и* $D_2$ *соответственно.*

Лемма 2. *Функция*

$$\sigma(t, \tau) \equiv \frac{\alpha(t) - \alpha(\tau) + \mu\left(\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{t}}\right)} - \overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}\right)}{t - \tau} \tag{13}$$

*является аналитической по $t$ и $\tau$ в некоторой окрестности окружности $|t|=1$ и $|\tau|=1$; в этой окрестности имеют место оценки*

$$|\sigma(t,\tau)|>\delta,\quad \left|\frac{\partial^k\sigma(t,\tau)}{\partial t^k}\right|\leqslant c_k,\quad (k=1,2,\cdots), \tag{14}$$

*где $c_k$ и $\delta$ — некоторые постоянные, не зависящие от $t$ и $\tau$.*

Доказательства лемм 1 и 2 очевидны.

Лемма 3. *Пусть функции $z=\alpha(t)$ и $z=\alpha(t)+\mu\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar t}\right)}$ конформно отображают кольцо $1-\varepsilon<|t|<1+\varepsilon$ в некоторые двусвязные области $D_1$ и $D_2$ соответственно, тогда если $t$ и $\tau$ находятся в кольце $1-\varepsilon\leqslant|t|\leqslant 1+\varepsilon$ и удовлетворяют уравнению*

$$\alpha(\tau)+\mu\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}=\alpha(t)+\mu\overline{\alpha(t)}, \tag{15}$$

*то имеют место следующие неравенства:*

$$|\tau-t|\leqslant c_1\,|1-|t||\tag{16}$$

$$|\tau-t|\leqslant c_2\,|1-|\tau||,\tag{17}$$

$$|\zeta-t|\leqslant c_3\,|\zeta-\tau|,\ \text{при}\ |\zeta|=1,\tag{18}$$

$$|\zeta-\tau|\leqslant c_4\,|\zeta-t|,\ \text{при}\ |\zeta|=1,\tag{19}$$

*где $c_j$ $(j=1,2,3,4)$ — некоторые постоянные, не зависящие от $t$, $\tau$ и $\zeta$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$q(\tau)\overset{\text{def}}{=}\alpha(\tau)+\mu\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)},\quad 1-\varepsilon<|\tau|<1+\varepsilon. \tag{20}$$

Из уравнения (15) следует, что $\tau$ и $t$ выражаются друг через друга следующим образом:

$$\tau=\beta_0(t)\ \text{и}\ t=\gamma_0(\tau), \tag{21}$$

где

$$\beta_0(t)=\beta(\alpha(t)+\mu\overline{\alpha(t)}), \tag{22}$$

$$\gamma_0(\tau)=\gamma\left(\frac{1}{1-|\mu|^2}\cdot(q(\tau)-\mu\overline{q(\tau)})\right), \tag{23}$$

причем $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ аналитические функции, обратные к функциям $q(t)$ и $\alpha(t)$ соответственно в кольце $1-\varepsilon\leqslant|t|\leqslant 1+\varepsilon$.

Из уравнения (15) нетрудно заметить, что

$$\tau=t,\ \text{если}\ |\tau|=1\ \text{или}\ |t|=1. \tag{24}$$

Из (21) и (24) имеем

$$\beta_0(t)\equiv t,\ \text{если}\ |t|=1;\quad \gamma_0(\tau)\equiv\tau,\ \text{если}\ |\tau|=1. \tag{25}$$

Следовательно

$$\beta_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\equiv\frac{t}{|t|} \text{ при } t\neq 0 \text{ и } \gamma_0\left(\frac{\tau}{|\tau|}\right)\equiv\frac{\tau}{|\tau|}, \text{ при } \tau\neq 0. \tag{26}$$

Из (21), (22) и (26) получим

$$|\tau-t|=|\beta_0(t)-t|=\left|\beta_0(t)-\beta_0\left(\frac{t}{|t|}\right)+\frac{t}{|t|}-t\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\beta_0(t)-\beta_0\left(\frac{t}{|t|}\right)\right|+|1-|t||\leqslant\left|\beta\left(\alpha(t)+\mu\overline{\alpha(t)}\right)-\right. \tag{27}$$

$$\left.-\beta\left(\alpha\left(\frac{t}{|t|}\right)+\mu\overline{\alpha\left(\frac{t}{|t|}\right)}\right)\right|+|1-|t||\leqslant c_1|1-|t||,$$

где $c_1$ — некоторая постоянная, не зависящая от $t$.

Оценка (17) получается аналогично. Теперь получим оценку (18). Ясно, что

$$|1-|\tau||\leqslant|\zeta-\tau|, \text{ при } |\zeta|=1. \tag{28}$$

Из (17) и (28) получим

$$|\zeta-t|\leqslant|\zeta-\tau|+|\tau-t|\leqslant|\zeta-\tau|+c_2|1-|\tau||\leqslant$$

$$\leqslant|\zeta-\tau|+c_2|\zeta-\tau|=c_3|\zeta-\tau|, \text{ при } |\zeta|=1, \tag{29}$$

где $c_2$ и $c_3$ — некоторые постоянные, не зависящие от $\zeta$, $t$ и $\tau$. Аналогично доказывается справедливость неравенства (19).

Лемма 3 доказана.

## § 2. Доказательства основных результатов

Замечание 1. Если $f(t)$ бесконечно дифференцируема в окрестности граничной точки $t_0\in\Gamma$, то вектор-функция (5) также является бесконечно дифференцируемой в окрестности точки $t_0$ области $D+\Gamma$ (см. [1]).

Доказательство теоремы 1. Пусть $U(x, y)$ является решением задачи (1)—(2) и $f(x, y)\in C^\infty(\Gamma)$. Покажем, что $U(x, y)\in C^\infty(D+\Gamma)$. Предположим, что точка $(0, 0)\in D$ и область $D$ звездна относительно начала координат.

Рассмотрим функцию

$$V_R(x, y)=U(Rx, Ry),\ 0<R<1. \tag{30}$$

Ясно, что вектор-функция $V_R(x, y)$ бесконечно дифференцируема в области $D+\Gamma$, удовлетворяет системе (1) и

$$V_R(x, y)=U(Rx, Ry), \text{ при } z=x+iy\in\Gamma. \tag{31}$$

Следовательно, $V_R(x, y)$ является бесконечно дифференцируемым в $D+\Gamma$ решением задачи (1)—(2) при $f(x, y)=U(Rx, Ry)$, поэтому оно дается формулой (4), т. е.

$$V_R(x, y) = \int_\Gamma K(z, t)\, U(R\xi, R\eta)\, dt + \sum_{j=1}^{m} C_j(R)\, U_j(x, y), \tag{32}$$

где $z = x + iy \in D$, $t = \xi + i\eta$, а $C_1(R), \cdots, C_m(R)$ — постоянные, зависящие от $R$.

Так как $U(x, y) = f(x, y)$ на $\Gamma$, то

$$\lim_{R \to 1} U(R\xi, R\eta) = f(\xi, \eta), \ (\xi, \eta) \in \Gamma. \tag{33}$$

Покажем, что числа $C_1(R), \cdots, C_m(R)$ имеют предел при $R \to 1$. Поскольку $U_1(x, y), \cdots, U_m(x, y)$ линейно независимы, то существуют такие точки $(x_1, y_1), \cdots, (x_m, y_m)$, что

$$\begin{vmatrix} U_1(x_1, y_1), & \cdots, & U_m(x_1, y_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ U_1(x_m, y_m), & \cdots, & U_m(x_m, y_m) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{34}$$

Подставив в (32) $x = x_j$, $y = y_j$ $(j = 1, \cdots, m)$ и решая полученную систему уравнений относительно $C_1(R), \cdots, C_m(R)$, убедимся, используя (30) и (33), что полученное решение этой системы имеет предел при $R \to 1$, который обозначим соответственно через $C_1, \cdots, C_m$.

Итак, переходя в (32) к пределу при $R \to 1$ и используя (30) и (33), получим

$$U(x, y) = \int_\Gamma K(z, t)\, f(t)\, dt + \sum_{j=1}^{m} C_j\, U_j(x, y). \tag{35}$$

Из (35) согласно замечанию 1 имеем, что $U(x, y) \in C^\infty(D + \Gamma)$ Если же область $D$ звездна относительно какой-то внутренней точки $(x_0, y_0)$, то при помощи замены переменных $\xi = x - x_0$ и $\eta = y - y_0$ сведем этот случай к предыдущему.

Замечание 2. Если область $D$ звездна и граничные значения решения $U(x, y)$ системы (1) бесконечно дифференцируемы в окрестности точки $t_0$ границы $\Gamma$, то аналогично можно показать, что $U(x, y)$ бесконечно дифференцируема в окрестности $t_0$ замкнутой области $D + \Gamma$.

В общем случае, так как граница области $D$ бесконечно дифференцируема, то для любой точки $t_0 \in \Gamma$ можно указать звездную область $D_0 \in D$ с бесконечно дифференцируемой границей, которая содержит окрестность точки $t_0$ области $D$. Согласно замечанию 2, $U(x, y)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки $t_0$ замкнутой области $D_0 + \Gamma_0$ и так как $t_0$ произвольная точка границы, то отсюда следует утверждение теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f(t) \in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3), тогда, согласно формуле (3) задача (1)—(2)

имеет решение, и по теореме 1 все решения принадлежат классу $C^\infty(D+\Gamma)$.

Построим такое частное решение задачи (1)—(2) $U(x, y) \equiv K_0(f)$ вида (5), которое удовлетворяло бы оценке

$$|K_0(f)| \leqslant c \max_{(x,\, y) \in \Gamma} |f(x, y)|, \tag{36}$$

где $c$ — некоторая постоянная, не зависящая от $f(x, y)$.

В работе (см. [5]) показано, что решения системы (1), первые производные которых удовлетворяют условию Гельдера в $D+\Gamma$, даются формулой

$$U(x, y) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{e_j+r} \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \ln \left( 1 - \frac{x + \lambda_j y}{\xi + \lambda_j \eta} \right) \Phi_{e_j+r}(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{\beta_{jr}^{(p)}}{\pi i} \int_\Gamma \frac{(y-\eta)^p\, \Phi_{e_j+r-p}(t)\, dt}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^p} \right\} + c_0 \quad (z = 0 \in D), \tag{37}$$

где $\lambda_1, \cdots, \lambda_\nu$ — корни характеристического уравнения $de + (A + B\lambda + c\lambda^2) = 0$ с положительными мнимыми частями, $k_1, \cdots, k_\nu$ — их кратность; $e_1 = 0$, $e_j = k_1 + \cdots + k_{j-1}$ $(j = 2, \cdots, n)$, $k_1 + \cdots + k_\nu = n$, $\delta_1, \cdots, \delta_n$ — постоянные $n$-мерные векторы, причем действительные числа $\beta_{jr}^{(p)}$ и векторы $\delta_1, \cdots, \delta_n$ определяются через коэффициенты системы (1), а $\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t)$ — произвольные аналитические функции в области $D$, удовлетворяющие условию Гельдера в $D+\Gamma$, $c_0$—произвольный действительный постоянный $n$-мерный вектор. Под логарифмической функцией при данном $t = \xi + i\eta \in \Gamma$ подразумевается непрерывная ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$.

Система (1) называется слабо связанной, если векторы $\delta_1, \cdots, \delta_n$ линейно независимы (см. [1]).

Отметим, что если $U(x, y) \in C^\infty(D+\Gamma)$, то в представлении (37) функции $\Phi_j(z)$ также принадлежат классу $C^\infty(D+\Gamma)$.

Подставляя решение $U(x, y)$ из (37) в граничное условие (2), получим

$$\operatorname{Re} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{e_j+r} \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \ln \left( 1 - \frac{x + \lambda_j y}{\xi + \lambda_j \eta} \right) \Phi_{e_j+r}(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{p=1}^{r-1} \frac{\beta_{jr}^{(p)}}{\pi i} \int_\Gamma \frac{(y-\eta)^p\, \Phi_{e_j+r}(t)\, dt}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^p} \right\} + c_0 = f(x, y),\ z = x + iy \in \Gamma. \tag{38}$$

Легко заметить, что

$$\ln \left( 1 - \frac{x + \lambda_j y}{\xi + \lambda_j \eta} \right) - \ln \left( 1 - \frac{x + iy}{\xi + i\eta} \right) \in C^\infty(\Gamma),$$

$$\frac{(y-\eta)^p}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^p} \in C^\infty(\Gamma), \tag{39}$$

по переменной $t=\xi+i\eta$ и $z=x+iy$ на контуре Г. Следовательно, уравнение (38) можно представить в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\delta_k\left(-\frac{1}{\pi i}\right)\int_{\Gamma}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\Phi_k(t)\,dt\right]+\int_{\Gamma}K(z,t)\Phi(t)\,dt\right\}+c_0=f(z),$$

$$(z\in\Gamma), \tag{40}$$

где $K(z, t)$ — квадратные матрицы $n$-го порядка, элементы которых бесконечно дифференцируемы по $z$ и $t$ на Г, а $\Phi(t)=\{\Phi_1(t),\cdots$ $\cdots, \Phi_n(t)\}$.

Пусть функция $z=\alpha(\tau)$ конформно отображает единичный круг $|\tau|<1$ на область $D$ с аналитической границей Г. Сделаем в уравнении (40) замену переменных по формулам

$$t=\alpha(\tau),\quad z=\alpha(\tau_0). \tag{41}$$

Получим

$$\operatorname{Re}\left\{\sum_{k=1}^{n}\delta_k\left[\left(-\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\ln\left(1-\frac{\alpha(\tau_0)}{\alpha(\tau)}\right)\Phi_k(\alpha(\tau))\cdot\alpha'(\tau)\,d\tau\right]+\right.\right.$$

$$\left.+\int_{|\tau|=1}K_1(\alpha(\tau_0),\alpha(\tau))\cdot\Phi(\alpha(\tau))\cdot\alpha'(\tau)\,d\tau\right\}+c_0=f(\alpha(\tau_0)),\ |\tau_0|=1. \tag{42}$$

Легко проверить, что

$$\ln\left(1-\frac{\alpha(\tau_0)}{\alpha(\tau)}\right)-\ln\left(1-\frac{\tau_0}{\tau}\right)\in C^{\infty}\ (|z|=1)\ \text{по } \tau \text{ и } \tau_0 \text{ при } |\tau|=1,\ |\tau_0|=1. \tag{43}$$

Следовательно, формулу (42) можно представить в виде

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}\left\{\delta_k\left[\left(-\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\ln\left(1-\frac{\tau_0}{\tau}\right)\psi_k(\tau)\,d\tau\right]+\int_{|\tau|=1}K_1(\tau,\tau_0)\,\psi(\tau)\,d\tau\right\}+$$

$$+c_0=f_1(\tau_0), \tag{44}$$

где

$$\psi_k(\tau)=\Phi_k(\alpha(\tau))\cdot\alpha'(\tau);\ f_1(\tau_0)=f(\alpha(\tau_0)),\ |\tau_0|=1, \tag{45}$$

а $K_1(\tau_0, \tau)$ — некоторая вполне определенная бесконечно дифференцируемая матрица по $\tau_0$ и $\tau$ на окружности $|\tau|=1$ и $|\tau_0|=1$.

Ясно, что $\psi_k(\tau)$ являются аналитическими функциями в единичном круге $|\tau|\leqslant 1$.

Рассмотрим функцию

$$F(\tau_0,\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=1}\frac{K_1(\zeta,\tau)\,d\zeta}{\zeta-\tau_0},\ |\tau_0|\neq 1. \tag{46}$$

Функция $F(\tau_0, \tau)$ является кусочно-аналитической по $\tau_0$. По формуле Сохоцкого—Племеля (см. [3])

$$K_1(\tau_0, \tau) = \lim_{\substack{t\to\tau_0\\ |t|<\tau_0}} \left[F(t, \tau) - F\left(\frac{1}{\bar t}, \tau\right)\right] = \alpha(\tau_0, \tau) - \overline{\beta(\tau_0, \tau)} \tag{47}$$

$$(|\tau_0| = 1),$$

где функции $\alpha(\tau_0, \tau)$ и $\beta(\tau_0, \tau)$ бесконечно дифференцируемые при $|\tau_0| \leqslant 1$, $|\tau| = 1$ и аналитические по $\tau_0$ при $|\tau_0| < 1$. Используя (47), из (44) получим

$$\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{n}\left\{\delta_k\left[\left(-\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\ln\left(1-\frac{\tau_0}{\tau}\right)\psi_k(\tau)\,d\tau\right] + \int_{|\tau|=1}\alpha(\tau_0, \tau)\,\psi(\tau)\,d\tau - \right.$$

$$\left. - \int_{|\tau|=1}\beta(\tau_0, \tau)\,\overline{\psi(\tau)}\,d\bar\tau\right\} + c_0 = f_1(\tau_0), \quad |\tau_0| = 1. \tag{48}$$

По формуле Шварца (см. [4]), из (48) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\delta_k\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\ln\left(1-\frac{\tau_0}{\tau}\right)\psi_k(\tau)\,d\tau\right\} + \int_{|\tau|=1}\alpha(\tau_0, \tau)\,\psi(\tau)\,d\tau -$$

$$- \int_{|\tau|=1}\beta(\tau_0, \tau)\,\overline{\psi(\tau)}\,d\bar\tau + c_0 = F_1(\tau_0) + ic_1; \; |\tau_0| < 1, \tag{49}$$

где

$$F_1(\tau_0) \equiv \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{(\tau+\tau_0)\,f_1(\tau_0)\,d\tau}{(\tau-\tau_0)\,\tau}, \; |\tau_0| < 1. \tag{50}$$

Из формулы (49) при $\tau_0 = 0$ имеем

$$c_0 + ic_1 = \int_{|\tau|=1}\beta(0, \tau)\,\overline{\psi(\tau)}\,d\bar\tau - \int_{|\tau|=1}\alpha(0, \tau)\,\psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau}. \tag{51}$$

Выражение (49) продифференцируем по $\tau_0$ и имея ввиду формулу Коши (см. [4]), получим

$$2\sum_{k=1}^{n}\delta_k\,\psi_k(\tau_0) + \int_{|\tau|=1}\alpha_1(\tau_0, \tau)\,\psi(\tau)\,d\tau - \int_{|\tau|=1}\beta_1(\tau_0, \tau)\,\overline{\psi(\tau)}\,d\bar\tau = F_1'(\tau_0), \tag{52}$$

где функции $\alpha_1(\tau_0, \tau)$ и $\beta_1(\tau_0, \tau)$ являются производными по $\tau_0$ соответственно от функций $\alpha(\tau_0, \tau)$ и $\beta(\tau_0, \tau)$ при $|\tau_0| < 1$.

В формуле (52) сделаем замену функций $\psi_k(\tau_0)$ на функции $\omega_k(\tau_0)$ по формуле

$$2\sum_{k=1}^{n}\delta_k\,\psi_k(\tau_0) = (\omega_1(\tau_0), \cdots, \omega_n(\tau_0)) \equiv \omega(\tau_0). \tag{53}$$

В результате получим

$$\omega(\tau_0) = \int_{|\tau|=1}\beta_2(\tau_0, \tau)\,\overline{\omega(\tau)}\,d\bar\tau - \int_{|\tau|=1}\alpha_2(\tau_0, \tau)\,\omega(\tau)\,d\tau + F_1'(\tau_0), \tag{54}$$

где $\beta_2(\tau_0, \tau)$ и $\alpha_2(\tau_0, \tau)$ аналитичны по $\tau_0$ в круге $|\tau_0| < 1$ и бесконечно дифференцируемы при $|\tau_0| \leqslant 1$, $|\tau| = 1$. Так как левая и правая части уравнения (54) аналитичны по $\tau_0$, то достаточно потребовать равенства на границе $|\tau_0| = 1$, т. е.

$$\omega(t) = \int_{|\tau|=1} \beta_2(t, \tau)\overline{\omega(\tau)}\, d\tau - \int_{|\tau|=1} \alpha_2(t, \tau)\,\omega(\tau)\, d\tau + F_1'(t), \quad |t| = 1, \tag{55}$$

где

$$F_1'(t) = \lim_{\tau \to t} F_1'(\tau) \quad \text{на} \quad |\tau_0| = 1. \tag{56}$$

Так как правая часть равенства (55) — аналитическая функция по $t$ при $|t| < 1$ и бесконечно дифференцируемая при $|t| \leqslant 1$, то любое непрерывное на $|t| = 1$ решение $\omega(t)$ уравнения (55) является граничным значением аналитической в области $|t| < 1$ функции, принадлежащей классу $C^\infty(D + \Gamma)$.

Поэтому уравнение (55) в классе непрерывных функций эквивалентно уравнению (54) в классе аналитических функций. Следовательно, задача (1) — (2) эквивалентна уравнению (55) в классе непрерывных функций. Так как $f(t) \in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3), то задача (1) — (2) в классе $C_\alpha^1(D + \Gamma)$ имеет решение, в результате уравнение (55) также имеет решение. Следовательно, по теории интегральных уравнений (см. [2]), частное решение уравнения (55) будет иметь вид (11), т. е.

$$\omega(t) = F_1'(t) + \int_{|\zeta|=1} M_3(t, \zeta) f_1(\zeta)\, d\zeta, \quad |t| = 1, \tag{57}$$

где $M_3(t, \zeta)$ — некоторая бесконечно дифференцируемая матрица по $t$ и $\zeta$.

Подставляя в (57) значение функций $\omega(t)$ из (53), получим

$$2\sum_{k=1}^{n} \delta_k \psi_k(t) = F_1'(t) + \int_{|\zeta|=1} M_3(t, \zeta) f_1(\zeta)\, d\zeta, \tag{58}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{2}\delta^{-1}\Bigl(F_1'(t) + \int_{|\zeta|=1} M_3(t, \zeta) f_1(\zeta)\, d\zeta\Bigr), \tag{59}$$

где

$$\psi(t) = \{\psi_1(t), \cdots, \psi_n(t)\}.$$

Далее, подставляя $\psi(t)$ из (59) в (45) и (51) получим вектор-функцию $\Phi(t) = \{\Phi_1(t), \cdots, \Phi_n(t)\}$ и $c_0$ через граничную функцию $f(t)$, которые подставляя в формулу (37) дают частное решение задачи (1) — (2). Покажем, что это частное решение удовлетворяет оценке (5).

Обозначим

$$I(x, y) \overset{\text{def}}{=} \int_{\Gamma} \frac{(y - \eta)^p\, \Phi_j(t)\, dt}{[\xi - x + \lambda_j(\eta - y)]^p} \quad (j = 1, \cdots, n). \tag{60}$$

Так как $t=\xi+i\eta$ и $z=x+iy$, то

$$\xi+\lambda_j\eta=c_j(t+\mu_j\bar{t}),\quad x+\lambda_j y=c_j(z+\mu_j\bar{z}),\tag{61}$$

$$y-\eta=\frac{1}{2i}(z-\bar{z}-t+\bar{t}),$$

где $\mu_j=\dfrac{i-\lambda_j}{i+\lambda_j}$, причем из условия $\operatorname{Im}\lambda_j>0$ имеем $|\mu_j|<1$, а $c_j$ — некоторые постоянные $\left(c_j=\dfrac{1}{2}(1-i\lambda_j)\right)$.

В интеграле (60) сделаем замену переменных

$$t=\alpha(\tau),\ \tau\in\Gamma_0,\ \{\Gamma_0\colon |\tau_0|=1\};\ z=\alpha(\tau_0),\ |\tau_0|<1,\tag{62}$$

используя равенства (61), получим

$$I(x,y)=\tilde{C}_j\int\limits_{|\tau|=1}\frac{\left[\alpha(\tau_0)-\overline{\alpha(\tau_0)}-\alpha(\tau)+\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\right]^p\psi_j(\tau)\,d\tau}{\left[\left(\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\right)-\left(\alpha(\tau_0)+\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}\right)\right]^p},\tag{63}$$

где $\tilde{C}_j$ — некоторые постоянные.

Согласно лемме 1 существует такая окрестность $1-\varepsilon\leqslant|\tau|\leqslant 1$ границы окружности $|\tau|=1$, которая взаимно-однозначно отображается при помощи функции $\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}$ в некоторую двусвязную область $D_j$.

Ясно, что если положительное число $\delta_0$ достаточно мало ($\delta_0<\varepsilon$), то число $(\alpha(\tau_0)+\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)})\in D_j$ при $1-\delta_0\leqslant|\tau_0|\leqslant 1$, поэтому уравнение

$$\gamma(\tau,\tau_0)\overset{\text{def}}{=}\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}=0\tag{64}$$

относительно $\tau$, при заданном $\tau_0$ из кольца $1-\delta_0\leqslant|\tau_0|\leqslant 1$, имеет единственное решение в кольце $1-\varepsilon<|\tau|\leqslant 1$, которое обозначим через $\zeta_0$.

Согласно лемме 3 между $\tau_0$ и $\zeta_0$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}|\tau_0-\zeta_0|\leqslant c_2|1-|\zeta_0||,\quad |\tau_0-\zeta_0|\leqslant c_3|1-|\tau_0||,\\ |t-\zeta_0|\geqslant c_4|t-\tau_0|,\quad |t|=1.\end{gathered}\tag{65}$$

Поэтому, если $|\tau_0|\to 1$, то $|\zeta_0|\to 1$, следовательно функция $\gamma(\tau,\tau_0)$ не обращается в нуль при $|\tau|=1-\varepsilon$, $1-\delta_1\leqslant|\tau_0|\leqslant 1$, где $\delta_1$ — достаточно малое положительное число ($\delta_1\leqslant\delta_0$), а именно

$$\gamma(\tau,\tau_0)\neq 0,\ \text{при}\ |\tau|=1-\varepsilon,\ 1-\delta_1\leqslant|\tau_0|\leqslant 1.\tag{66}$$

Обозначим через $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ окружности $|\tau|=1$ и $|\tau|=1-\varepsilon$. Ясно, что интеграл в (63) можно представить в виде двух интегралов $I_1(x,y)$

и $I_2(x, y)$, распространенных, соответственно, по контурам $\Gamma_1+\Gamma_2$ и $\Gamma_2$, где интегрирование по $\Gamma_1$ ведется против, а по $\Gamma_2$ — по часовой стрелке.

Итак, имеем

$$I(x, y)=I_1(x, y)+I_2(x, y). \tag{67}$$

В силу того, что $\zeta_0$ является единственным простым корнем выражения (64), то

$$\gamma(\tau, \tau_0)=\varphi_0(\tau)\cdot(\tau-\zeta_0), \tag{68}$$

где $\varphi_0(\tau)$ — аналитическая функция по $\tau$ в кольце $1-\varepsilon\leqslant|\tau|\leqslant 1$. Так как $\tau=\zeta_0$ является решением уравнения (64), то

$$\alpha(\zeta_0)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}=0. \tag{69}$$

Из (64), (68) и (69) имеем

$$\varphi_0(\tau)=\frac{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}-\alpha(\zeta_0)-\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)}}{\tau-\zeta_0}. \tag{70}$$

Согласно лемме 2 функция $\varphi_0(\tau)$ является аналитической по $\tau$ и имеют место оценки

$$|\varphi_0(\tau)|>\delta,\ \left|\frac{d^k\varphi_0(\tau)}{d\tau^k}\right|\leqslant c_k,\ 1-\varepsilon\leqslant|\tau|\leqslant 1\ (k=0, 1,\cdots), \tag{71}$$

где $\delta$ и $c_k$ — некоторые положительные постоянные, не зависящие от $\tau$ и $\tau_0$.

Используя равенство (68), для $I_1(x, y)$ получим

$$I_1(x, y)=\int\limits_{\Gamma_1+\Gamma_2}\frac{\left[\alpha(\tau_0)-\overline{\alpha(\tau_0)}-\alpha(\tau)+\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}\right]^p\psi_j(\tau)\,d\tau}{\varphi_0^p(\tau)(\tau-\zeta_0)^p}. \tag{72}$$

Из теории вычетов (см. [4]) имеем

$$I_1(x, y)=\frac{1}{(p-1)!}\lim_{\tau\to\zeta_0}\frac{d^{p-1}}{d\tau^{p-1}}\left\{\frac{\left[\alpha(\tau_0)-\overline{\alpha(\tau_0)}-\alpha(\tau)+\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}\right]^p\psi_j(\tau)}{\varphi_0^p(\tau)}\right\}. \tag{73}$$

Из (73), используя неравенства (71), получим

$$|I_1(x, y)|\leqslant\sum_{k=0}^{p-1}\tilde{C}_k\left|\alpha(\tau_0)-\overline{\alpha(\tau_0)}-\alpha(\zeta_0)+\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\zeta}_0}\right)}\right|^{k+1}\cdot|\psi_j^{(k)}(\zeta_0)|, \tag{74}$$

где $\tilde{C}_k$ — некоторые постоянные, не зависящие от $\tau_0$ $(j=1,\cdots, n)$.

Ясно, что

$$|\alpha(\tau_0)-\alpha(\zeta_0)|\leqslant c_0|\tau_0-\zeta_0|, \tag{75}$$

$$\left|\overline{\alpha(\tau_0)} - \alpha\left(\frac{1}{\overline{\zeta}_0}\right)\right| \leqslant c_1\left|\tau_0 - \frac{1}{\overline{\zeta}_0}\right| \leqslant c_1|\tau_0 - \zeta_0| + c_1\left|\zeta_0 - \frac{1}{\overline{\zeta}_0}\right| \leqslant$$

$$\leqslant c_1|\tau_0 - \zeta_0| + c_2(1 - |\zeta_0|), \tag{76}$$

где $c_0$, $c_1$ и $c_2$—некоторые постоянные.

Из неравенств (65), (75) и (76) имеем

$$\left|\alpha(\tau_0) - \alpha(\zeta_0) - \overline{\alpha(\tau_0)} - \alpha\left(\frac{1}{\overline{\zeta}_0}\right)\right| \leqslant c(1 - |\zeta_0|), \tag{77}$$

где $c$ — постоянная, не зависящая от $\tau_0$ и $\zeta_0$.

Из выражения (50) и (59) получим

$$|\psi_j^{(k)}(\zeta_0)| \leqslant \frac{\widetilde{C}}{2\pi} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{|f_1(\tau)|\, d\varphi}{|\tau - \zeta_0|^{k+2}} + c \max_{|\tau|=1} |f_1(\tau)|,\ \tau = e^{i\varphi}. \tag{78}$$

Из неравенств (74), (77) и (78) следует оценка

$$|I_1(x, y)| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \widetilde{C}_k \int\limits_{|\tau|=1} \frac{|1 - \zeta_0|^{k+1} \cdot |f_1(\zeta)|}{|\tau - \zeta_0|^{k+2}} d\varphi + c \max_{|\tau|=1} |f_1(\tau)| \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \max_{|\zeta|=1} |f_1(\zeta)| = \text{const} \cdot \max_{t \in \Gamma} |f(t)|. \tag{79}$$

Используя (66), получим аналогичную оценку для $I_2(x, y)$.

$$|I_2(x, y)| \leqslant \text{const} \cdot \max_{\tau \in \Gamma_2} |\psi(\tau)|. \tag{80}$$

Из равенства (59) имеем

$$\max_{|\tau|=1-\varepsilon} |\psi(\tau)| \leqslant \text{const} \max_{|\tau|=1} |f_1(\tau)| = \text{const} \max_{t \in \Gamma} |f(t)|. \tag{81}$$

Итак, из (67) на основании (79), (80) и (81) имеем

$$|I(x, y)| \leqslant \text{const} \max_{t \in \Gamma} |f(t)|. \tag{8}$$

Теперь рассмотрим из (38) выражение

$$w(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Re} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{e_j+r} \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \ln\left(1 - \frac{x + \lambda_j y}{\xi + \lambda_j \eta}\right) \Phi_{e_j+r}(t)\, dt \right\}. \tag{83}$$

Используя (45), (61) и (62), из (83) имеем

$$w(x, y) = \text{Re} \sum_{j=1}^{\nu} \sum_{r=1}^{k_j} \delta_{e_j+r} \left\{ -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \ln\left(1 - \frac{\alpha(\tau_0) + \mu_j \overline{\alpha(\tau_0)}}{\alpha(\tau) + \mu_j \alpha\left(\frac{1}{\overline{\tau}}\right)}\right) \psi_{e_j+r}(\tau)\, d\tau, \right. \tag{84}$$

где $\psi_{e_j+r}(\tau)$ определяются из формулы (58).

В (84) интегрированием по частям, получим

$$w(x,y)=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{*}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{|\tau|=1}\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}}-\right.$$

$$\left.-\int_{|\tau|=1}\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\right]}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}}d\tau,\right. \tag{85}$$

где

$$\Phi^0_{e_j+r}(t)=(t)\int_0^t\psi_{e_j+r}(\tau)\,d\tau. \tag{86}$$

Как показано выше, функция

$$\gamma_j(\tau,\tau_0)\overset{\text{def}}{=}\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)} \tag{87}$$

относительео переменной $\tau$ в области $1-\varepsilon\leqslant|\tau|<1$, при $1-\delta_0\leqslant|\tau_0|\leqslant1$, имеет единственный нуль $\tau=\xi_{j0}$, причем $\gamma_j(\tau,\tau_0)\neq0$ при $|\tau|=1-\varepsilon$, $1-\delta_0\leqslant|\tau_0|\leqslant1$ и $\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\neq0$ при $1-\varepsilon<|\tau|<1$, где $\varepsilon$ и $\delta_0$ — некоторые положительные числа ($\delta_0<\varepsilon$).

Обозначим через $l$ границу области $1-\varepsilon<|\tau|<1$.

Согласно теории вычетов (см. [4])

$$\int_l\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}}=2\,\Phi^0_{e_j+r}(\zeta_{j0}), \tag{88}$$

$$\int_l\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\cdot\frac{1}{\tau^2}\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}}=0. \tag{89}$$

Из (85), (88) и (89) имеем

$$w(x,y)=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{*}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\,\Phi^0_{e_j+r}(\zeta_{j0})+$$

$$+\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{*}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)+\mu_j\cdot\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar\tau}\right)}-\alpha(\tau_0)-\mu_j\overline{\alpha(\tau_0)}}+\right.$$

$$+\int_{\Gamma_1}\frac{\Phi^0_{e_j+r}(\tau)\left[\alpha'(\tau)-\mu_j\frac{1}{\tau^2}\cdot\overline{\alpha'\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}\right]d\tau}{\alpha(\tau)+\mu_j\overline{\alpha\left(\frac{1}{\bar{\tau}}\right)}},\ \text{где}\ \{\Gamma_1\colon |\tau|=1-\varepsilon\}. \tag{90}$$

Первую сумму в (90) представим в виде

$$2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\,\Phi^0_{e_j+r}(\xi_{j0})=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\delta_k\,\Phi^0_k(\tau_0)+$$

$$+2\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\left(\Phi^0_{e_j+r}(\xi_{j0})-\Phi^0_{e_j+r}(\tau_0)\right). \tag{91}$$

Интегрируя обе части (58) от 0 до $\tau_0$ и используя (86), получим

$$2\sum_{k=1}^{n}\delta_k\,\Phi^0_k(\tau_0)=F_1(\tau_0)-F_1(0)+\int_{|\zeta|=1}M_4(t,\zeta)\,f_1(\zeta)\,d\zeta, \tag{92}$$

где $F_1(\tau_0)$ определяется по формуле (50), а

$$M_4(t,\zeta)=\int_0^{\tau_0}M_3(t,\zeta)\,dt. \tag{93}$$

Так как $\mathrm{Re}\,F_1(\tau_0)$ является интегралом Дирихле с плотностью $f_1(\alpha(t))$, то (см. [4])

$$|\mathrm{Re}\,F_1(\tau_0)|\leqslant \mathrm{const}\max_{|\tau|=1}|f_1(\tau)|=\mathrm{const}\max_{t\in\Gamma}|f(t)|. \tag{94}$$

Из (92) и (94) получим

$$\left|2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{n}\Phi^0_k(\tau_0)\,\delta_k\right|\leqslant \mathrm{const}\max_{t\in\Gamma}|f(t)|. \tag{95}$$

С другой стороны, из (92) имеем

$$|\Phi^0_{e_j+r}(\zeta_{j0})-\Phi^0_{e_j+r}(\tau_0)|\leqslant c_1\max_{|\tau|=1}|F_1(\zeta_{j0})-F_1(\tau_0)|+c_2\max_{t\in\Gamma}|f(t)|, \tag{96}$$

где $c_1$ и $c_2$ — некоторые постоянные.

Из формулы (50) и из неравенств (65) получим

$$|F_1(\zeta_{j0})-F_1(\tau_0)|<\int_0^{2\pi}\frac{|f(\alpha(\tau)|\cdot|\zeta_{j0}-\tau_0|\,d\varphi}{|\tau-\zeta_{j0}|\cdot|\tau-\tau_0|}\leqslant$$

$$\leqslant c\int_0^{2\pi}\frac{|f(\alpha(\tau))|\cdot(1-|\tau|^2)}{|\tau-\tau_0|^2}\,d\varphi\leqslant\tilde{c}\max_{|\tau|=1}|f(\alpha(\tau))|=\mathrm{const}\max_{t\in\Gamma}|f(t)|,\quad \tau=e^{i\varphi}, \tag{97}$$

где $c$ и $\tilde{c}$ — некоторые постоянные.

Из (91), (95) и (97) получим

$$2\left|\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{\nu}\sum_{r=1}^{k_j}\delta_{e_j+r}\ \Phi^0_{e_j+r}(\zeta_{j0})\right| \leqslant c\max_{t\in\Gamma}|f(t)|. \tag{98}$$

Аналогично оценке (80) получим, что интеграл по контуру $\Gamma_1$ в правой части (90) также оценивается через величину $c\max\limits_{t\in\Gamma}|f(t)|$. Следовательно

$$|w(x, y)| \leqslant c\max_{t\in\Gamma}|f(t)|, \tag{99}$$

где $c$ — некоторая постоянная.

Подставляя значение $\psi(t)$ из (59) в (51), получим такую же оценку для постоянного вектора $c_0$:

$$|c_0| \leqslant c\max_{t\in\Gamma}|f(t)|, \tag{100}$$

где $c$ — некоторая постоянная, не зависящая от $f(t)$.

Ясно, что построенное решение $U(x, y)=K_0(f)$ имеет вид (5) и согласно (82), (99) и (100) оно удовлетворяет оценке (36).

Пусть $f(t)\in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3), и пусть $U(x, y)=K(f)$ имеет вид (5) и является частным решением задачи (1)—(2). Покажем, что оператор $K(f)$ также удовлетворяет оценке (6).

Возьмем разность

$$P(x, y)\overset{\text{def}}{=}K(f)-K_0(f). \tag{101}$$

Ясно, что при $f(x, y)\in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяющей условию (3), вектор-функция $P(x, y)$ удовлетворяет однородной задаче (1)—(2). Согласно теореме 1 вектор-функция $P(x, y)$ бесконечно дифференцируема.

Из формулы (4) имеем

$$P(x, y)=\sum_{j=1}^{m}c_j\,U_j(x, y), \tag{102}$$

где $U_1(x, y),\cdots, U_m(x, y)$ — линейно независимые решения однородной задачи (1)—(2) в классе $C^\infty(D+\Gamma)$.

Из (101) и (102) получим

$$K(f)=K_0(f)+\sum_{j=1}^{m}c_j\,U_j(x, y), \tag{103}$$

где $f(x, y)\in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3).

Пусть точки $(x_1, y_1),\cdots,(x_m, y_m)\in D$ и удовлетворяют условию (34).

Подставив в (103) $x=x_j$, $y=y_j$ $(j=1,\cdots, m)$ и решив полученную систему относительно $c_1,\cdots, c_m$, получим

$$c_1 = N_1(f(x, y)), \cdots, c_m = N_m(f(x, y)), \tag{104}$$

где $N_j(f)$ $(j=1, \cdots, m)$ — некоторые линейные комбинации от $K_0(f)$ и $K(f)$ в точках $(x_j, y_j)$.

Поэтому

$$|c_j| = |N_j(f(x, y))| < b_j \max_{(x, y) \in \Gamma} |f(x, y)|, \; f(x, y) \in C^\infty(\Gamma), \tag{105}$$

где $b_j$ $(j = 1, \cdots, m)$ — некоторые постоянные.

Следовательно

$$K(f) = K_0(f) + \sum_{j=1}^{m} N_j(f)\, U_j(x, y), \tag{106}$$

где $f(x, y) \in C^\infty(\Gamma)$ и удовлетворяет условию (3).

Допустим, что вектор-функции $\psi_j(x, y)$, входящие в (3), ортонормальны.

Пусть $g(x, y)$ — произвольная вектор-функция из класса $C^\infty(\Gamma)$. Ясно, что вектор-функция

$$f(x, y) = g(x, y) - \sum_{k=1}^{m} \psi_k(x, y) \int_\Gamma g(t)\, \psi_k(t)\, ds \tag{107}$$

бесконечно дифференцируема и удовлетворяет условию (3).

Из (106) и (107) имеем

$$|K(f)| \leqslant c \max_{t \in \Gamma} |f(t)|, \; t = x + iy, \tag{108}$$

$$\max_{t \in \Gamma} |f(t)| \leqslant c_1 \max_{t \in \Gamma} |g(t)|, \tag{109}$$

$$g(t) = f(t) + \sum_{k=1}^{m} \psi_k(t) \int_\Gamma g(t)\, \psi_k(t)\, dt, \tag{110}$$

где $c$ и $c_1$ — некоторые постоянные.

Из соотношений (108), (109) и (110) непосредственно следует, что

$$|K(g)| \leqslant c \max_{t \in \Gamma} |g(t)|, \tag{111}$$

где $c$ — некоторая постоянная, не зависящая от $g(t)$.

Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Доказательство теоремы 3. Пусть вектор-функция $f(x, y)$ непрерывна и удовлетворяет условию (3). Покажем, что тогда задача (1)—(2) имеет решение, которое дается формулой (4). Не ограничивая общности предположим, что функции $\psi_j(x, y)$, входящие в условие (3), ортонормальны. Если $f(x, y)$ удовлетворяет условию (3), то

$$f(x, y) = f(x, y) - \sum_{k=1}^{m} \psi_k(x, y) \int_\Gamma f(x, y)\, \psi_k(x, y)\, ds. \tag{112}$$

Пусть последовательность бесконечно дифференцируемых на Г функций $f_m(x, y)$ стремится к $f(x, y)$ равномерно при $m \to \infty$.

Построим последовательность

$$Q_m(x, y) = f_m(x, y) - \psi_1(x, y) \int_\Gamma f_m(x, y)\, \psi_1(x, y)\, ds - \cdots$$

$$\cdots - \psi_m(x, y) \int_\Gamma f_m(x, y)\, \psi_m(x, y)\, ds. \tag{113}$$

Ясно, что

$$Q_m(x, y) \to f(x, y) \text{ при } m \to \infty.$$

С другой стороны, $Q_m(x, y) \in C^\infty(\Gamma)$ и

$$\int_\Gamma Q_m(x, y)\, \psi_j(x, y)\, ds = 0, \text{ при } j = 1, \cdots, m. \tag{114}$$

Следовательно, согласно формуле (4), для функций $f(x, y) = Q_m(x, y)$ задача (1)—(2) имеет частное решение

$$U_m(x, y) = \int_\Gamma K(z, t)\, Q_m(t)\, dt, \; z \in D, \; t \in \Gamma. \tag{115}$$

Обозначим через $U(x, y)$ вектор-функцию

$$U(x, y) = \begin{cases} \int_\Gamma K(z, t)\, f(t)\, dt & \text{при } z \in D \\ f(x, y), & \text{при } z = x + iy \in \Gamma. \end{cases} \tag{116}$$

Из (115) следует, что $U_m(x, y)$ и их вторые производные при $m \to \infty$ сходятся равномерно в любой области, находящейся внутри $D$, причем

$$\lim_{m \to \infty} U_m(x, y) = U(x, y), \; (x, y) \in D + \Gamma \tag{117}$$

и

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\partial^{i+j} U_m(x, y)}{\partial x^i\, \partial y^j} = \frac{\partial U^{i+j}(x, y)}{\partial x^i\, \partial y^j}, \; (x, y) \in D. \tag{118}$$

Так как $U_m(x, y)$ удовлетворяют уравнению

$$A \frac{\partial^2 U_m(x, y)}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U_m(x, y)}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 U_m(x, y)}{\partial y^2} = 0, \tag{119}$$

то переходя в (119) к пределу при $m \to \infty$, получим

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0, \; (x, y) \in D. \tag{120}$$

Итак, получено, что вектор-функция $U(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1). Теперь покажем непрерывность $U(x, y)$ в замкнутой области $D + \Gamma$.

Согласно теореме 2

$$|U_m(x, y) - U_k(x, y)| = \left| \int_\Gamma K(z, t)[Q_m(t) - Q_k(t)]\, dt \right| \leqslant \tag{121}$$

$$\leqslant c \max_{t \in \Gamma} |Q_m(t) - Q_k(t)| < c \{\max_{t \in \Gamma} |Q_m(t) - f(t)| + \max_{t \in \Gamma} |f(t) - Q_k(t)|\},$$

где $c$ — некоторая постоянная.

Так как последовательность функций $Q_m(t)$ стремится к $f(t)$ равномерно, то из (121) следует, что для любого заданного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что

$$|U_m(x, y) - U_k(x, y)| \leqslant \varepsilon, \text{ при } m > N, \ k \geqslant N. \tag{122}$$

Переходя в (122) к пределу при $k \to \infty$ и имея в виду (117), получим

$$|U_m(x, y) - U(x, y)| \leqslant \varepsilon, \text{ при } m \geqslant N, \ (x, y) \in D + \Gamma. \tag{123}$$

Это означает, что $U_m(x, y)$ стремится к $U(x, y)$ равномерно в замкнутой области $D+\Gamma$. Так как $U_m(x, y)$ непрерывна в замкнутой области $D+\Gamma$, то предельная функция $U(x, y)$ также непрерывна в этой области.

По определению (116) $U(x, y)$ принимает на $\Gamma$ значение $f(x, y)$, следовательно, оператор (5) является решением задачи (1) — (2) при непрерывной граничной вектор-функции $f(x, y)$, удовлетворяющей условию (3).

Теперь пусть для $f(x, y) \in C(\Gamma)$ задача (1) — (2) имеет решение. Покажем, что $f(x, y)$ удовлетворяет условию (3). Представим вектор-функцию $f(x, y)$ в виде

$$f(x, y) = P(x, y) + \sum_{j=1}^{m} c_j \psi_j(x, y), \tag{124}$$

где

$$P(x, y) = f(x, y) - \sum_{j=1}^{m} c_j \psi_j(x, y), \tag{125}$$

а

$$c_j = \int_\Gamma f(x, y) \psi_j(x, y)\, ds \quad (j = 1, \cdots, m). \tag{126}$$

Ясно, что функция $P(x, y)$ удовлетворяет условию (3). Следовательно, из вышедоказанного, для $P(x, y)$ задача (1) — (2) будет иметь решение, в результате задача (1) — (2) имеет решение и для вектор-функции

$$T(x, y) \overset{\text{def}}{=} f(x, y) - P(x, y) \equiv \sum_{j=1}^{m} c_j \psi_j(x, y). \tag{127}$$

Так как $T(x, y) \in C^\infty(\Gamma)$ и для него задача (1) — (2) имеет решение, то согласно теореме 1, это решение принадлежит классу $C^\infty(D + \Gamma)$.

Поэтому $T(x, y)$ удовлетворяет условию (3), т. е.

$$\int_{\Gamma} (c_1\psi_1(x, y) + \cdots + c_m\psi_m(x, y))\cdot\psi_j(x, y)\, ds = 0 \quad (j = 1, \cdots, m). \qquad (128)$$

Отсюда получим, что

$$c_j = 0 \quad (j = 1, \cdots, m). \qquad (129)$$

Из (126) и (129) следует, что $f(x, y)$ удовлетворяет условию (3), тем самым теорема 3 доказана.

Замечание 3. Скажем, что $f(z)$ в точке $z_0$ имеет слабую особенность, если в окрестности этой точки имеет место

$$|f(z)| \leqslant \frac{c}{|z - z_0|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad z = x + iy. \qquad (130)$$

Полученные результаты остаются в силе, если $f(x, y)$ и искомое решение $U(x, y)$ в конечном числе точек на границе $\Gamma$ имеют особенность вида (130).

Б заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность моему научному руководителю, профессору Н. Е. Товмасяну, за постановку задачи и постоянное внимание при ее выполнении.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса
Поступила 15.V.1978

Է. Պ. ՄԵԼԻՔՍԵԹՅԱՆ. Դիրիխլեի խնդիրը երկրորդ կարգի թույլ կապակցված էլիպտիկ սիստեմի դիֆերենցիալ հավասարումների համար սահմանափակ տիրույթներում *(ամփոփում)*

*Աշխատանքում դիտարկվում է հետևյալ եզրային խնդիրը։ Գտնել միակապ $D$ տիրույթում, որի $\Gamma$ եզրը հանդիսանում է անալիտիկ կոր,*

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0 \qquad (1)$$

*էլիպտիկ սիստեմի երկու անգամ անընդհատ դիֆերենցելի լուծումը, որը բավարարում է*

$$U(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y) \qquad (2)$$

*եզրային պայմանին, որտեղ $A$, $B$ և $C$ գործակիցները հաստատուն, իրական քառակուսային $n$-չափանի մատրիցաներ են։ (1)—(2) խնդիրը դիտարկվում է, երբ $f(x, y) = \{f_1(x, y), \cdots, f_n(x, y)\}$ պատկանում է $C(\Gamma)$, իսկ $U(x, y) = \{U_1(x, y), \cdots, U_n(x, y)\}$ որոնվում է $C(D+\Gamma)$ դասում։ Որոնելիք դասում ստացված է անհրաժեշտ և բավարար պայման (1)—(2) խնդրի լուծման համար։*

E. P. MELICKSETIAN. *The Dirichlet problem for weakly connected elliptic system s of second order differential equations in bounded areas* (summary)

In the article the following boundary problem is considered.

In a singleconnected domain $D$ bounded by an analytical curve $\Gamma$, find a two times continuously differentiable solution of the weakly connected elliptic system of differential equations

$$AU_{xx} + BU_{xy} + CU_{yy} = 0, \qquad (1)$$

continuous in the closed $D + \Gamma$ and satisfying a boundary condition

$$U(x, y)|_{\Gamma} = f(x, y), \qquad (2)$$

where $A$, $B$ and $C$ are constant real square matrices of order $n$, $f(x, y) = \{f_1(x, y), \cdots, f_n(x, y)\}$ is a vector-function, defined on $\Gamma$, $U(x, y) = \{U_1(x, y), \cdots, U_n(x, y)\}$.

In the paper a number of theorems are proved and a necessary and sufficient condition for solvability of the problem (1) — (2) is obtained.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *А. В. Бицадзе*. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М., «Наука», 1966.
2. *И. Г. Петровский*. Лекции по теории интегральных уравнений, М., «Наука», 1965.
3. *Н. И. Мусхелишвили*. Сингулярные интегральные уравнения, М., «Наука», 1968.
4. *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*. Методы теории функций комплексного переменного, М., «Наука», 1973.
5. *Н. Е. Товмасян*. Эффективные методы решения задачи Дирихле для эллиптических систем дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами в областях, ограниченных эллипсом, Диф. уравнения, V, № 1, 1969.
6. *Б. В. Хведелидзе*. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Труды Тбилис. математического ин-та АН Груз.ССР, 23, 1957, 3—158.
7. *В. П. Михайлов*. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка, Диф. уравнения, 12, 1976, 1877—1891.
8. *В. С. Виноградов*. Граничная задача для эллиптической системы первого порядка на плоскости, Диф. уравнения, VII, № 8, 1971, 1440—1448.