ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

Г. К. ОГАНЕСЯН

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ ИЗ КЛАССА B_2

Введение

Изучение свойств рядов Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x},$$

показатели которых линейно независимы над полем рациональных чисел, было начато Г. Бором в связи с изучением поведения ζ-функции Римана ([1], [2]). Пользуясь свойствами таких рядов, в теории ζ-функции удалось получить различные результаты об оценках $\zeta(\sigma+it)$ при $t\to\infty$. В основном это были Ω-результаты (отрицание O-результата), которые оказались бы точными, если бы удалось подтвердить гипотезу Римана ([2]). М. Кац и Р. Штейнгауз ([3]) заметили, что свойства экспонент $\{e^{i\lambda_n x}\}_{n=1}^{\infty}$ с независимыми показателями похожи на свойства независимых случайных величин. Работы А. Винтнера, Ван Кампена, Р. Керчнера, Р. Хартмана ([4], [5]), где имеется обширная библиография, были посвящены доказательству существования, вопросам гладкости функций распределения

$$\mu_{\operatorname{Re} f}(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\, m\,\{x\in[-T,\ T];\ \operatorname{Re} f(x)<y\},$$

$$\mu_{\operatorname{Im} f}(y)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\, m\,\{x\in[-T,\ T];\ \operatorname{Im} f(x)<y\}$$

для боровских почти-периодических функций. В работах этих авторов были изучены также и многие другие вопросы теории рядов Дирихле. В настоящей работе будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{i<\vec{\lambda}_n,\, \vec{x}>}, \tag{1}$$

где

$$\vec{\lambda}_n=(\lambda_n^{(1)},\ \lambda_n^{(2)},\cdots,\ \lambda_n^{(N)}),\quad \vec{x}=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_N),$$

$$<\vec{\lambda}_n,\ \vec{x}>=\sum_{k=1}^{N}\lambda_n^{(k)}\cdot x_k \text{ и } \{\lambda_n^{(1)}\}_{n=1}^{\infty},\ \cdots,\ \{\lambda_n^{(N)}\}_{n=1}^{\infty}$$

линейно независимы над полем рациональных чисел.

§ 1 настоящей статьи посвящен формулировке основных теорем о пространствах Безиковича B_p функций N переменных. В частности, доказывается, что для любой функции класса B_1 существуют относительные функции распределения

$$\mu_{\mathrm{Re}\, f}(y) = \lim_{T\to\infty} \mu_{T,\,\mathrm{Re}\, f}(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^N} m\,\{\vec{x}\in[-T, T]^N;\ \mathrm{Re}\, f(\vec{x}) < y\},$$

$$\mu_{\mathrm{Im}\, f}(y) = \lim_{T\to\infty} \mu_{T,\,\mathrm{Im}\, f}(y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^N} m\,\{\vec{x}\in[-T, T]^N;\ \mathrm{Im}\, f(\vec{x}) < y\}. \tag{2}$$

Существование пределов (2) дает возможность трактовать функции класса B_1 как случайные величины. Однако относительная мера

$$\mu(Q) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(2T)^N} m\{Q\cap[-T, T]^N\}$$

не является σ-аддитивной. Поэтому такая трактовка позволяет доказывать методами теории вероятностей лишь те теоремы, которые фактически являются теоремами не о случайных величинах, а о функциях распределения.

В § 2 доказываются теоремы, на основе которых можно судить о свойствах коэффициентов ряда (1), если только известна скорость убывания функции

$$1 - \mu_f(y) + \mu_f(-y),$$

где $\mu_f(y)$ означает одновременно и $\mu_{\mathrm{Re}\, f}(y)$ и $\mu_{\mathrm{Im}\, f}(y)$.

§ 1. Независимость в пространствах B_1

Функция $f(\vec{x})$ принадлежит классу B_p $(p > 1)$, если $f(\vec{x})\in L_p([-T\ T]^N)$ для любого $T > 0$, и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический полином $P(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i<\vec{\lambda}_k,\,\vec{x}>}$ такой, что

$$\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{(2T)^N} \int\limits_{[-T,\,T]^N} |f(\vec{x}) - P(\vec{x})|^p\, d\vec{x} \leqslant \varepsilon.$$

Норму функций $f(\vec{x})\in B_p$ определим формулой

$$\|f\|_{B_p} \overset{\mathrm{def}}{=} \overline{M}_p f(\vec{x}) = \overline{\lim_{T\to\infty}} \left[\frac{1}{(2T)^N} \cdot \int\limits_{[-T,\,T]^N} |f(\vec{x})|^p\, d\vec{x}\right]^{1/p}.$$

Справедлива теорема о полноте пространства B_p, принадлежащая Безиковичу ([6]).

Если $f(\vec{x})\in B_p$, то $f(\vec{x})\in B_q$ при $q < p$. Поэтому класс B_1 является самым широким. Для функции $f(\vec{x})\in B_1$ положим

$$\mu_{T,\,\mathrm{Re}\, f}(y) = \frac{1}{(2T)^N} m\,\{\vec{x}\in[-T, T]^N;\ \mathrm{Re}\, f(\vec{x}) < y\},$$

$$\mu_{T,\,\mathrm{Im}\,f}(y)=\frac{1}{(2T)^N}\,m\{\vec{x}\in[-T,\ T]^N;\ \mathrm{Im}\,f\,(\vec{x})<y\}.$$

Каждая из функций $\mu_{T,\,\mathrm{Re}\,f}(y)$ и $\mu_{T,\,\mathrm{Im}\,f}(y)$ непрерывна справа.

Здесь же отметим, что для классов B_p функций одной переменной результаты этого параграфа были установлены в работе Е. М. Никишина ([7]). Перенесение этих результатов на функции многих переменных требует определенных модификаций, что и проделано в этом параграфе.

Лемма 1. *Для комплексных z равномерно по $|z|\leqslant A$ (A — любое) существуют пределы*

$$\chi_{\mathrm{Re}\,P}(z)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N} e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})}\,d\vec{x}=$$

$$=\sum_{\substack{m_1,\,m_2,\dots,\,m_n=-\infty\\ m_1\lambda_1^{(1)}+\dots+m_n\lambda_n^{(1)}=0\\ \dots\dots\dots\\ m_1\lambda_1^{(N)}+\dots+m_n\lambda_n^{(N)}=0}}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots J_{m_n}(|a_n|z)\,e^{i\left[\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_k\right)m_k\right]} \tag{3}$$

$$\chi_{\mathrm{Im}\,P}(z)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N} e^{iz\,\mathrm{Im}\,P(\vec{x})}\,d\vec{x}=$$

$$=\sum_{\substack{m_1,\,m_2,\dots,\,m_n=-\infty\\ m_1\lambda_1^{(1)}+\dots+m_n\lambda_n^{(1)}=0\\ \dots\dots\dots\\ m_1\lambda_1^{(N)}+\dots+m_n\lambda_n^{(N)}=0}}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots J_{m_n}(|a_n|z)\,e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\varphi_k m_k}. \tag{4}$$

Здесь

$$P(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n} a_k\,e^{i<\lambda_k,\,\vec{x}>}=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\,e^{i\left(\varphi_k+\lambda_k^{(1)}x_1+\dots+\lambda_k^{(N)}x_N\right)}$$

— произвольный полином $J_k(s)$ — k-я функция Бесселя, ряды, представляющие $\chi_{\mathrm{Re}\,P}(z)$ и $\chi_{\mathrm{Im}\,P}(z)$, сходятся равномерно при $|z|\leqslant A$, $\varphi_k=\arg a_k$.

Доказательство. Имеем

$$\mathrm{Re}\,P(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cos(\lambda_k^{(1)}x_1+\dots+\lambda_k^{(N)}x_N+\varphi_k),$$

$$\mathrm{Im}\,P(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}|a_k|\cos\left(\frac{\pi}{2}-\lambda_k^{(1)}x_1-\dots-\lambda_k^{(N)}x_N-\varphi_k\right).$$

Воспользуемся формулой ([8])

$$e^{it\cos\varphi}=\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(t)\, e^{im\varphi}. \tag{5}$$

Равномерно по $|z|\leqslant A$

$$J_k(z)=O\left(\frac{1}{|k|!}\right) \tag{6}$$

и следовательно, ряды (3) и (4) сходятся абсолютно и равномерно в круге $|z|\leqslant A$. Представляя $e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})}$ в виде произведения рядов, получаем

$$e^{iz\sum\limits_{k=1}^{n}|a_k|\cos(\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N+\varphi_k)}=\prod_{k=1}^{n} e^{iz|a_k|\cos(\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N+\varphi_k)}=$$

$$=\prod_{k=1}^{n}\left\{\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m J_m(|a_k|z)\cdot e^{im(\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N+\varphi_k)}\right\}=$$

$$=\sum_{m_1,m_2,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots J_{m_n}(|a_n|z)\times$$

$$\times\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\right)+\sum_{k=1}^{n} m_k(\lambda_k^{(1)}x_1+\cdots+\lambda_k^{(N)}x_N)+\sum_{k=1}^{n} m_k\varphi_k\right\}.$$

Отсюда следует

$$e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})}=\sum_{m_1,\ldots,m_n=-\infty}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots J_{m_n}(|a_n|z)\times$$

$$\times\exp\left\{i\left(\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\lambda_k^{(1)}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n} m_k\lambda_k^{(N)}\right)x_N+\sum_{k=1}^{n} m_k\varphi_k\right\}.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})}\,d\vec{x}=\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n=-\infty\\ m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}=0}}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots J_{m_n}(|a_n|z)\times$$

$$\times e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_k\right)m_k}+\sum_{\substack{m_1,\ldots,m_n=-\infty\\ |m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}|+\cdots\\ +|m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}|>0}}^{\infty} J_{m_1}(|a_1|z)\cdots$$

$$\cdots J_{m_n}(|a_n| z)\, e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_k\right)m_k} \times \prod_{j=1}^{N'}{}' \frac{\sin\left[T\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\lambda_k^{(j)}\right)\right]}{T\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\lambda_k^{(j)}\right)}.$$

Здесь Π' означает произведение, в котором $\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \lambda_k^{(j)} \neq 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и разобьем последнюю сумму на две части так, чтобы

$$|\Sigma_2| = \Bigg| \sum_{\substack{|m_1|+\cdots+|m_n|>L(\varepsilon)\\ |m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}|+\cdots\\ +|m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}|>0}} J_{m_1}(|a_1| z)\cdots J_{m_n}(|a_n| z)\times$$

$$\times\, e^{i\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\pi}{2}+\varphi_k\right)m_k} \cdot \prod_{j=1}^{N'}{}' \frac{\sin\left[T\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\lambda_k^{(j)}\right]}{T\left(\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\lambda_k^{(j)}\right)}\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{|m_1|+\cdots+|m_n|>L(\varepsilon)\\ |m_1\lambda_1^{(1)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(1)}|+\cdots\\ +|m_1\lambda_1^{(N)}+\cdots+m_n\lambda_n^{(N)}|>0}} |J_{m_1}(|a_1| z)\cdots J_{m_n}(|a_n| z)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при всех $|z| \leqslant A$. Теперь выберем $T_0(\varepsilon)$ так, чтобы при всех $|z| \leqslant A$ и $T > T_0(\varepsilon)$ было

$$|\Sigma_1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно получаем

$$\left|\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} e^{iz\,\mathrm{Re}\,P(\vec{x})}\,d\vec{x} - \chi_{\mathrm{Re}\,P}(z)\right| \leqslant \varepsilon$$

при $|z| \leqslant A$ и $T > T_0$.

Аналогично доказывается равномерная сходимость в (4).

Из оценки (6) следует равномерная сходимость в (3) и (4).

С л е д с т в и е: *Если показатели полинома независимы, то*

$$\chi_{\mathrm{Re}\,P}(z) = \chi_{\mathrm{Im}\,P}(z) = J_0(|a_1| z)\cdots J_0(|a_n| z).$$

Л е м м а 2. *Существуют пределы*

$$\mu_{\mathrm{Re}\,f}(y) = \lim_{T\to\infty} \mu_{T,\,\mathrm{Re}\,f}(y),\quad \mu_{\mathrm{Im}\,f}(y) = \lim_{T\to\infty} \mu_{T,\,\mathrm{Im}\,f}(y).$$

Доказательство этой леммы можно провести в полной аналогии с доказательством для функции одной переменной классов B_p, которое сделано в работе Е. М. Никишина ([7]).

Определение 1. *Последовательность* $\{f_n(\vec{x})\}_{n=1}^{\infty}$ *функций из* B_1 *назовем независимой, если для любого конечного набора функций* $f_{n_1}, f_{n_2}, \cdots, f_{n_k}$ *выполняются равенства*

$$\chi_{\mathrm{Re}\,(f_{n_1}+\cdots+f_{n_k})}(t)=\chi_{\mathrm{Re}\,f_{n_1}}(t)\cdot\chi_{\mathrm{Re}\,f_{n_2}}(t)\cdots\chi_{\mathrm{Re}\,f_{n_k}}(t),$$

$$\chi_{\mathrm{Im}\,(f_{n_1}+\cdots+f_{n_k})}(t)=\chi_{\mathrm{Im}\,f_{n_1}}(t)\cdot\chi_{\mathrm{Im}\,f_{n_2}}(t)\cdots\chi_{\mathrm{Im}\,f_{n_k}}(t),$$

где

$$\chi_{\mathrm{Re}\,f}(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N}e^{it\,\mathrm{Re}\,f(\vec{x})}\,d\vec{x},$$

$$\chi_{\mathrm{Im}\,f}(t)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,\,T]^N}e^{it\,\mathrm{Im}\,f(\vec{x})}\,d\vec{x}.$$

Из этого определения следует, что функция распределения суммы $\mu_{\mathrm{Re}\,f}(y)$ (или $\mu_{\mathrm{Im}\,f}(y)$) является сверткой функций распределения слагаемых, т. е.

$$\mu_{\mathrm{Re}\,f}(y)=\mu_{\mathrm{Re}\,f_{n_1}}*\mu_{\mathrm{Re}\,f_{n_2}}*\cdots*\mu_{\mathrm{Re}\,f_{n_k}}(y)$$

(под сверткой как обычно, понимается

$$\mu_1*\mu_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu_1(y-\xi)\,d\mu_2(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mu_2(y-\xi)\,d\mu_1(\xi)).$$

Из леммы 1 следует, что $\{e^{i<\vec{\lambda}_n,\,\vec{x}>}\}_1^{\infty}$ является последовательностью независимых функций (в смысле данного выше определения), если показатели $\{\vec{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независимы над полем рациональных чисел. ($\{\vec{\lambda}_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независимы, если линейно независимы $\{\lambda_n^{(1)}\},\cdots$ $\cdots,\{\lambda_n^{(N)}\}$).

Определение 2. *Функция* $f(\vec{x})$ *называется периодической с периодом* $\vec{\Delta}=(\Delta_1,\cdots,\Delta_N)$, *если* $f(x_1+\Delta_1, x_2+\Delta_2,\cdots,x_N+\Delta_N)=$ $=f(x_1,\cdots,x_N)$ *для всякого* $\vec{x}=(x_1,\cdots,x_N)$.

Пусть $f(\vec{x})$ периодична с периодом $\Delta=(\Delta_1,\cdots,\Delta_N)$. Если

$$f(\vec{x})\in L_p\left(\mathop{\times}_{i=1}^{N}[0,\,\Delta_i]\right),\ \text{то}\ f(\vec{x})\in B_p\ \text{и}$$

$$\mu_{\mathrm{Re}\, f}(y) = \frac{1}{\Delta_1 \cdots \Delta_N} m\left\{\vec{x} \in \mathop{\times}_{l=1}^{N} [0,\ \Delta_l];\ \mathrm{Re}\, f(\vec{x}) < y\right\},$$

$$\mu_{\mathrm{Im}\, f}(y) = \frac{1}{\Delta_1 \cdots \Delta_N} m\left\{\vec{x} \in \mathop{\times}_{l=1}^{N} [0,\ \Delta_l];\ \mathrm{Im}\, f(\vec{x}) < y\right\},$$

а для характеристических функций имеют место равенства

$$\chi_{\mathrm{Re}\, f}(t) = \frac{1}{\Delta_1 \cdots \Delta_N} \int\limits_{\mathop{\times}_{l=1}^{N} [0,\ \Delta_l]} e^{it\, \mathrm{Re} f(\vec{x})}\, d\vec{x},$$

$$\chi_{\mathrm{Im}\, f}(t) = \frac{1}{\Delta_1 \cdots \Delta_N} \int\limits_{\mathop{\times}_{l=1}^{N} [0,\ \Delta_l]} e^{it\, \mathrm{Im} f(\vec{x})}\, d\vec{x}.$$

Приведем еще один пример последовательности независимых функций.

Лемма 3. *Пусть $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots$ — периодические функции с периодами*

$$\vec{\Delta}_1,\ \vec{\Delta}_2, \cdots;\ f_n(\vec{x}) \in L_1\left(\mathop{\times}_{l=1}^{N} [0,\ \Delta_l]\right).$$

Если последовательность

$$\left\{\frac{1}{\vec{\Delta}_n}\right\} = \left\{\frac{1}{\Delta_n^{(1)}}, \ \cdots, \frac{1}{\Delta_n^{(N)}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

независима над полем рациональных чисел, то $f_n(\vec{x})$ независима.

Доказательство. Для простоты будем считать $\{f_n(\vec{x})\}_{n=1}^{\infty}$ действительными функциями. Положим

$$\psi_n(x_1, \cdots, x_N) = f_n(\Delta_n^{(1)} x_1,\ \cdots,\ \Delta_n^{(N)} x_N).$$

Функции $\psi_n(\vec{x})$ имеют период $\vec{1} = (1, \cdots, 1)$. То же самое можно сказать о $e^{iz\psi_n(\vec{x})}$. Имеем

$$\chi_{f_n}(z) = \frac{1}{\Delta_n^{(1)} \cdots \Delta_n^{(N)}} \int\limits_{\mathop{\times}_{k=1}^{N} [0,\ \Delta_n^{(k)}]} e^{izf_n(\vec{x})}\, d\vec{x} = \int\limits_{[0,\, 1]^N} e^{iz\psi_n(\vec{x})} d\vec{x}.$$

Далее

$$\frac{1}{(2T)^N} \int\limits_{[-T,\, T]^N} e^{iz\sum\limits_{k=1}^{n} f_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x} = \frac{1}{(2T)^N} \int\limits_{[-T,\, T]^N} e^{iz\sum\limits_{k=1}^{n} \psi_{n_k}\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right)}\, d\vec{x}. \tag{7}$$

Пусть $\tau_k(x_1, \cdots, x_N)$ — прямоугольные Фейеровские средние ряда Фурье функции $e^{iz\psi_{n_k}(\vec{x})}$ (последовательность функций $\{e^{i2\pi(n_1x_1+\cdots+n_Nx_N)}\}$ образует полную ортонормированную систему в пространстве $L_1([0,1]^N)$) со столь большим номером, чтобы

$$\int\limits_{[0,1]^N} |\tau_k(\vec{x}) - e^{iz\psi_{n_k}(\vec{x})}|\, d\vec{x} \leqslant \frac{\varepsilon}{(2^n-1)2^{n-1}}.$$

Хорошо известно (см. [9]), что $|\tau_k(\vec{x})| \leqslant 1$. Заметим, что первый член полинома $\tau_k(\vec{x})$ есть $\int\limits_{[0,1]^N} e^{iz\psi_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x}$. Из (7) получаем

$$\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} e^{iz\sum\limits_{k=1}^{n} f_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x} = \frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N}\prod_{k=1}^{n}\left[\tau_k\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{iz\psi_{nk}\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right)} - \tau_k\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right)\right] d\vec{x} = \frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N}\prod_{k=1}^{n}\tau_k\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right) d\vec{x} + A(T,\varepsilon),$$

где $|A(T,\varepsilon)| \leqslant \varepsilon$. Легко видеть, что в силу линейной независимости

$$\left\{\frac{1}{\Delta_n^{(k)}}\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{\Delta_n^{(1)}}, \cdots, \frac{1}{\Delta_n^{(N)}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N}\prod_{k=1}^{n}\tau_k\left(\frac{\vec{x}}{\vec{\Delta}_{n_k}}\right) d\vec{x} = \prod_{k=1}^{n}\int\limits_{[0,1]^N} e^{iz\psi_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x}.$$

Из этих соотношений следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется $T_0(\varepsilon)$ такое, что при всех $T \geqslant T_0(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} e^{iz\sum\limits_{k=1}^{n} f_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x} - \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\Delta_{n_k}^{(1)}\cdots\Delta_{n_k}^{(N)}}\int\limits_{\mathop{\times}\limits_{l=1}^{N}[0,\Delta_{n_k}^{(l)}]} e^{izf_{n_k}(\vec{x})}\, d\vec{x}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Лемма 3 доказана.

§ 2. Ряды экспонент с независимыми показателями

В дальнейшем мы будем рассматривать только функции из B_2. Если $f(\vec{x}) \in B_2$ и действительна, то, переходя к пределу в равенстве

$$\frac{1}{(2T)^N}\int\limits_{[-T,T]^N} f^2(\vec{x})\, d\vec{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^2\, d\mu_{T,f}(y),$$

получим

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \, d\mu_f(y) = \|f\|^2_{B_2}.$$

Обоснование возможности перехода к пределу следует из теоремы непрерывности ([10]).

Теорема непрерывности. Пусть $\Phi_\nu(x)(-\infty < x < \infty)$ — последовательность функций распределения (т. е. $\Phi_\nu(-\infty) = 0$, $\Phi_\nu(\infty) = 1$ и $\Phi_\nu(x)$ не убывает). Если

$$\chi_\nu(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\lambda} \, d\Phi_\nu(\lambda)$$

при $\nu \to \infty$ сходятся к непрерывной функции $\chi(\xi)$, то существует функция распределения $\Phi(x)$ такая, что $\Phi_\nu(x) \to \Phi(x)$ в каждой точке непрерывности $\Phi(x)$.

Теорема непрерывности сохраняет силу и для случая, когда ν изменяется непрерывно. Для формулировки нашей теоремы введем функции $H(y)$ и $H^*(y)$. Пусть $H^*(y)$ — положительная, непрерывная, строго возрастающая функция на $[0, +\infty)$. Функция $H^*(y)$ определяется соотношением $H(H^*(y)) = y + 1$, или же $H^*(y) = H^{-1}(y+1)$. Предположим, что при некотором $\alpha > 1$

$$\frac{H^*(y)}{y^\alpha} \downarrow. \tag{8}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть* $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots$ — *периодические с периодами* $\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2, \cdots$ *функции из* B_2, *для которых*

$$Mf_n(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta_n^{(1)} \cdots \Delta_n^{(N)}} \int\limits_{\times_{k=1}^{N} [0, \Delta_n^{(k)}]} f_n(\vec{x}) \, d\vec{x} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

Предположим, что $\left\{\frac{1}{\vec{\Delta}_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ *независимы и*

$$f(\vec{x}) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}).$$

Пусть, далее

$$1 - \mu_f(y) + \mu_f(-y) = O\left(e^{-yH(y)}\right). \tag{9}$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_n}\right) \log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)} < +\infty$$

при любом $\varepsilon > 0$. *Здесь*

$$\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(1)} \ldots \Delta_n^{(N)}}} \| f_n(\vec{x}) \|_{L_2} \left(\mathop{\times}_{k=1}^{N} [0, \Delta_n^{(k)}] \right),$$

а $\mu_f(y)$ *означает одновременно и* $\mu_{\mathrm{Re}\, f}(y)$ *и* $\mu_{\mathrm{Im}\, f}(y)$.

Сперва докажем теорему в случае, когда функция $f(\vec{x})$ действительна.

В дальнейшем нам понадобятся следующие две леммы, доказательства которых приводятся в работе [11].

Лемма 4. *Пусть функция* $f(\vec{x})$ *удовлетворяет условию* (9) *Если*

$$\chi_f(z) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{(2T)^N} \int\limits_{[-T, T]^N} e^{izf(\vec{x})} \, d\vec{x},$$

то

$$|\chi_f(z)| \leqslant c\, e^{|z| H^*(|z|)}.$$

Лемма 5. *Пусть* $H(t)$ — *положительная, монотонно возрастающая, непрерывная функция, которая при некотором* $\alpha > 0$ *удовлетворяет условию* (8).

Пусть $\{z_k\}_1^\infty$ — *последовательность нулей функций*

$$\chi_f(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{izy} \, d\mu_f(y)$$

с учетом их кратности.

Если

$$|\chi_f(z)| \leqslant c\, e^{|z| H(|z|)},$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{H^*(|z|)\, |z_n| \log^{1+\varepsilon} |z_n|} < +\infty.$$

Доказательство теоремы 3. Зафиксируем произвольное число n.

Тогда

$$f(\vec{x}) = f_n(\vec{x}) + \varphi_n(\vec{x}), \text{ где } \varphi_n(\vec{x}) = \sum_{k \neq n}^{B_1} f_k(\vec{x}). \tag{10}$$

Пусть $\chi_f(z)$ — характеристическая функция $f(\vec{x})$, $\chi_f(z)$ и $\chi_{\varphi_n}(z)$ — характеристические функции $f_n(\vec{x})$ и $\varphi_n(\vec{x})$ соответственно. Для всех действительных чисел z имеем

$$|\chi_{\sum\limits_{k=1}^{n} f_k(\vec{x})}(z) - \chi_f(z)| \leqslant |z|\, \overline{M}_2 \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(\vec{x}) - f(\vec{x}) \right). \tag{11}$$

Из независимости функций $\{f_n(\vec{x})\}_{n=1}^{\infty}$ и неравенства (11) для всех действительных чисел z имеем

$$\chi_f(z) = \chi_{f_n}(z)\cdot\chi_{\varphi_n}(z).$$

Отсюда получаем равенство

$$\chi_f(z) = \chi_{f_n}(z)\cdot\chi_{\varphi_n}(z). \tag{12}$$

По теореме единственности для аналитических функций, функцию $\chi_f(z)$ можно продолжить на всю комплексную плоскость с помощью равенства (14). Для функции распределения имеет место равенство

$$\mu_f(y) = \mu_{f_n}(y) * \mu_{\varphi_n}(y).$$

Из теоремы Леви-Райкова (см. [12], стр. 77) следует, что для функций $f_n(\vec{x})$ также справедливо соотношение (9). Из равенства (12) следует, что все нули функции $\chi_{f_n}(z)$ являются нулями функции $\chi_f(z)$; В силу сказанного и из лемм 4 и 5 имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{H^*(|z_{n_k}|)\,|z_{n_k}|\log^{1+\varepsilon}|z_{n_k}|}<+\infty, \tag{13}$$

$$\sigma_n^2\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_{n_k}|^2}<+\infty, \tag{14}$$

где $\{z_{n_k}\}_1^{\infty}$ — последовательность нулей функций с учетом их кратности. Введем обозначение

$$P(y)=\{H^*(y^{-\frac{1}{2}})\cdot\log^{1+\varepsilon}(y^{-\frac{1}{2}})\}^{-1}\cdot y^{\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись условием (8), получим $P(y)\cdot y^{-1}\downarrow$. Отсюда следует, что $P(y)$—полуаддитивная функция (см. [13], стр. 105). Из (13) и (14) вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}P(\sigma_n^2)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{|z_{n_k}|^2}\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{H^*(|z_{n_k}|)\,|z_{n_k}|\log^{1+\varepsilon}|z_{n_k}|}<\infty.$$

Тем самым теорема в случае, когда $f(\vec{x})$— действительная функция, доказана. Пусть $f(\vec{x})$—комплексная функция. Положим

$$H_1^*(y)=H^*\left(\frac{1}{2}y\right),\ \text{или}\ H_1(y)=H\left(\frac{y+1}{2}\right).$$

Функции $H_1^*(y)$ и $H_1(y)$ удовлетворяют условиям теоремы. Следовательно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^0}{H_1^*\left(\frac{1}{\sigma_n^0}\right)\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{\sigma_n^0}} < +\infty. \tag{15}$$

Здесь $\sigma_n^0 = \max(\sigma_n', \sigma_n^*)$, где

$$\sigma_n' = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(1)}\ldots\Delta_n^{(N)}}}\|\operatorname{Re} f(\vec{x})\|_{L_2}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N}[0, \Delta_n^{(k)}]\right),$$

$$\sigma_n^* = \frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(1)}\ldots\Delta_n^{(N)}}}\cdot\|\operatorname{Im} f(\vec{x})\|_{L_2}\left(\mathop{\times}_{k=1}^{N}[0, \Delta_n^{(k)}]\right).$$

Из неравенства (15) следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_n}\right)} \leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^0\cdot 2^{1+\varepsilon}}{H^*\left(\frac{1}{2\sigma_n^0}\right)\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{2\sigma_n^0}\right)} <$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^0 \frac{2^{1+\varepsilon}}{H_1^*\left(\frac{1}{\sigma_n^0}\right)\log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_n^0}\right)} < +\infty.$$

Теорема доказана.

Если $f_n(\vec{x}) = a_n e^{i\langle\vec{\lambda}_n, \vec{x}\rangle}$ $(n > 1)$, где $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ независимы, то из теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть* $f(\vec{x}) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\langle\vec{\lambda}_n, \vec{x}\rangle}$ *и* $\{\lambda_n\}_1^{\infty}$ *независимы. Если*

$$1 - \mu_f(y) + \mu_f(-y) = O\left(e^{-yH(y)}\right),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{|a_n|}\right)\log^{1+\varepsilon}\left|\frac{1}{|a_n|}\right|} < +\infty,$$

где $\mu_f(y)$ *означает одновременно и* $\mu_{\operatorname{Re} f}(y)$ *и* $\mu_{\operatorname{Im} f}(y)$.

Следствие 1. Пусть $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x})\cdots$ — периодические с периодами $\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2, \cdots$ функции из B_2, для которых

$$Mf_n(\vec{x}) = \frac{1}{\Delta_n^{(1)}\cdots\Delta_n^{(N)}}\int\limits_{\mathop{\times}_{k=1}^{N}[0, \Delta_n^{(k)}]} f_n(\vec{x})\, d\vec{x} = 0\ (n = 1, 2, \cdots).$$

Предположим, что $\left\{\frac{1}{\vec{\Delta}_n}\right\}_1^\infty$ независимы и

$$f(\vec{x}) \stackrel{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}).$$

Пусть

$$1-\mu_f(y)+\mu_f(-y)=O(e^{-y^q})$$

при некотором $q>2$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n^{\frac{q}{q-1}} \frac{1}{\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{\sigma_n}}<+\infty$$

для любого $\varepsilon>0$.

Следствие 2. Пусть

$$f_n(\vec{x}) \stackrel{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i<\vec{\lambda}_n \vec{x}>} \text{ и } \{\vec{\lambda}_n\}_1^\infty$$

независимы. Если

$$1-\mu_f(y)+\mu_f(-y)=O(e^{-y^q}),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\frac{q}{q-1}} \frac{1}{\log^{1+\varepsilon}\frac{1}{|a_n|}}<+\infty$$

при любом $\varepsilon>0$.

Следствие 3. Пусть $f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \cdots$ — периодические с периодами $\vec{\Delta}_1, \vec{\Delta}_2 \cdots, \vec{\Delta}_n, \cdots$ функции из B_2, для которых

$$Mf_n(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{\Delta_n^{(1)}\cdots\Delta_n^{N}}}\|f_n(\vec{x})\|_{L_1}(\times_{k=1}^{N}[0,\ \Delta_n^{(k)}])=0 \quad (n=1, 2, \cdots).$$

Предположим, что $\left\{\frac{1}{\vec{\Delta}_n}\right\}_{n=1}^\infty$ независимы и

$$f(\vec{x}) \stackrel{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\vec{x}).$$

Пусть

$$1=\mu_f(y)+\mu_f(-y)=O(e^{-e^y}),$$

тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n \frac{1}{\log^{2+\varepsilon}\frac{1}{\sigma_n}}<+\infty.$$

Следствие 4. Пусть

$$f(\vec{x}) \overset{B_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i<\vec{\lambda}_n, \vec{x}>} \quad \text{и} \quad \{\vec{\lambda}_n\}_1^{\infty}$$

независимы. Если

$$1 - \mu_f(y) + \mu_f(-y) = O(e^{-e^y}),$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \frac{1}{\log^{2+\varepsilon} \frac{1}{|a_n|}} < \infty.$$

В заключение выражаю благодарность моему научному руководителю, профессору Е. М. Никишину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Ленинаканский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Поступила 15.VI.1980

Գ. Կ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ. *B_2 դասի պարբերական ֆունկցիաներով կազմված շարքերի մասին* (*ամփոփում*)

Դիցուք $\{f_k(\vec{t})\}_1^{\infty}$-ն Բեզիկովիչի B_2 դասի ֆունկցիաներ են, ընդ որում $f_k(t)$-ն ունի $\vec{\Delta}_k$ պարբերություն և f_k-ի ինտեգրալը $\times_{k=1}^{N} (0, \vec{\Delta}_k)$-ով $= 0$։

Որոշ պայմաններ դնելով

$$f(\vec{t}) \overset{B_2}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\vec{t})$$

ֆունկցիայի խարակտերիստիկ ֆունկցիայի վրա, ապացուցվում է, որ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_k}\right) \log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)} < +\infty \ (\forall \varepsilon > 0); \quad \sigma_k = \frac{\|f_k\|_{L_2(0;\, \Delta_k)}}{\sqrt{\Delta_{k,1} \cdot \Delta_{k,2} \cdots \Delta_{k,N}}}.$$

Այստեղ $H^*(y)$-ը որոշակի պայմաններին բավարարող դրական, մոնոտոն աճող ֆունկցիա է։

G. K. HOVHANNESIAN. *On the series of periodic functions from the class B_2* (summary)

Let $\{f_k(\vec{t})\}_1^{\infty}$, be the sequence of functions from the Besicowitch class B_2. $f_k(t)$ is periodic with period $\vec{\Delta}_k$ and the integral of $f_k(t)$ by $(0, \vec{\Delta}_k)$ equals 0.

Under some conditions on the characteristic function of the function

$$f(\vec{t}) \overset{B_2}{=} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(\vec{t})$$

it proves, that

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \frac{1}{H^*\left(\frac{1}{\sigma_k}\right) \log^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\sigma_k}\right)} < +\infty \ (\forall \varepsilon > 0), \quad \sigma_k = \frac{\|f\|_{L_2(0;\, \Delta_k)}}{\sqrt{\Delta_{k,1} \cdot \Delta_{k,2} \cdots \Delta_{k,N}}}.$$

Here $H^*(y)$ is a positive, monotonously growing function which satisfies some conditions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *H. Bohr, E. Landau.* Über des Verhalten von $\zeta(s)$ and $\zeta_k(s)$ in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$, Göttinger Nachrichten, 1910, 303—330.
2. *E. K. Титчмарш.* Дзета-функция Римана, ИИЛ, М., 1947.
3. *М. Кац.* Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел, ИИЛ, М., 1963.
4. *A. Wintner, P. Hartman, E. R. von Kampen.* On the distribution functions of almost periodic functions, Amer. J. Math., 60, № 2, 1938.
5. *R. Kershner, A. Wintner.* On the asymptotic distribution on almost periodic functions with linearly independent frequencies, Amer. J. Math., 58, 1936, 91—94.
6. *H. Bohr.* Zur Theorie der fastperiodisch en Functionen, I, II, III, Acta Math., 45.
7. *Е. М. Никишин.* Ряды Дирихле с независимыми показателями и их некоторые применения, Мат. сб., 96 (138), № 1, 1975.
8. *Г. Ватсон.* Теория бесселевых функций, ч. 1, ИИЛ, 1949.
9. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, т. II, изд. «Мир», М., 1965.
10. *М. Лоэв.* Теория вероятностей, М., Физматгиз, 1961.
11. *Г. К. Оганесян.* О рядах из независимых случайных величин, Изв. АН Арм. ССР, серия «Математика», XII, № 5, 1977.
12. *Ю. В. Линник, Н. В. Островский.* Разложения случайных величин и векторов, М., изд. «Наука», 1972.
13. *Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа.* Неравенства, М., ИИЛ, 1948.