ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

В. В. АНДРИЕВСКИЙ, С. П. ГЕРМАН

# ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ НА КВАЗИКОНФОРМНЫХ ДУГАХ

Вопрос приближения функций, непрерывных на ограниченных жордановых дугах, является важным случаем более общей задачи описания приближения полиномами функций различных классов на произвольных континуумах комплексной плоскости.

В работах В. К. Дзядыка и его учеников (подробный обзор работ см. [1]), Л. И. Колесник [2], И. А. Шевчука [3] и других, была получена оценка скорости полиномиального приближения на кусочно-гладких дугах, зависящая от положения точки $z$, в которой исследуется отклонение аппроксимационного полинома от заданной функции, как в терминах модуля непрерывности, так и модулей гладкости порядка $k>1$.

Другим важным случаем задачи приближения на континуумах является вопрос о приближении функций в областях комплексной плоскости. Идея привлечения понятия квазиконформности к этим вопросам и ее методологическое обоснование принадлежит В. И. Белому [5], который впервые получил прямые теоремы теории приближения в областях, ограниченных квазиконформными кривыми. Оценка скорости сходимости для равномерных модулей гладкости порядка $k>1$, введенных П. М. Тамразовым [6, 7], была получена В. И. Белым и П. М. Тамразовым [8].

В работе В. В. Андриевского [4] получены прямые теоремы приближения для непрерывных функций, заданных на квазиконформных дугах с оценками, зависящими от модуля непрерывности аппроксимируемой функции.

Настоящая работа продолжает изучение вопроса о скорости полиномиальной аппроксимации на конечных квазиконформных дугах и устанавливает прямую теорему приближения в терминах нормальной мажоранты $k$-го ($k\geqslant 1$) модуля гладкости заданной функции.

## § 1. Основные определения и результаты

Пусть $L$ — произвольная конечная жорданова дуга, $\Omega = CL$ — ее односвязное дополнение, $\infty \in \Omega$. Рассмотрим функцию $w = \Phi(z)$, конформно и однолистно отображающую $\Omega$ на $\Omega' = \{w: |w|>1\}$, нормированную условиями

$$\Phi(\infty) = \infty, \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} \Phi(z) > 0.$$

Это отображение продолжимо до гомеоморфизма между компактификациями $\widetilde{\Omega}$ и $\overline{\Omega}'$ (см., например, [9], стр. 62—92), совпадающего с $\Phi$ в $\Omega$. Сохраним за ним это обозначение и обозначим через $\psi$ — обратный гомеоморфизм.

Поскольку объектом нашего изучения являются непрерывные функции, заданные на квазиконформных конечных дугах, обозначим через $C(L)$ класс таких функций и приведем один из геометрических критериев квазиконформной дуги (см. [10], с. 102—103): жорданова дуга $L$ квазиконформна тогда и только тогда, когда для произвольных трех точек $z_1$, $z_2$, $z_3$, расположенных на $L$ в порядке возрастания индексов, справедливо соотношение

$$\left|\frac{z_1-z_2}{z_1-z_3}\right| \preccurlyeq 1. \qquad (1)$$

Здесь и в дальнейшем под символом $A \preccurlyeq B$ $(A>0,\ B>0)$ мы будем понимать, что существует константа $C>0$, не зависящая от $A$ и $B$ и такая, что $A \leqslant CB$.

Обозначим через $z_1$ и $z_2$ концы квазиконформной дуги $L$ и положим $\Phi(z_i)=w_i$, $i=1, 2$.

$$\Omega'_1 = \{w: |w|>1;\ \arg w_1 < \arg w < \arg w_2\};$$

$$\Omega'_2 = \Omega' \setminus \overline{\Omega}'_1;$$

$$\Omega_i = \psi(\Omega'_i),\ i=1, 2.$$

Используя геометрический критерий (1), нетрудно проверить квазиконформность границ областей $\Omega'_i$, $i=1, 2$. Как показано в [4], граница областей $\Omega_i$, $i=1, 2$ также является квазиконформной кривой.

Следуя [6], нормальной мажорантой будем называть всякую конечную функцию $\mu(\delta)$, заданную, положительную и неубывающую на $0<\delta<\delta_0$, для которой при некоторых фиксированных $\sigma \geqslant 1$ и $\gamma > 0$ выполняется неравенство

$$\mu(t\delta) \leqslant \sigma t^{\gamma} \mu(\delta),\quad t \geqslant 1.$$

Обозначим через

$$G_i = \{\zeta: \zeta \in \Omega_i;\ 1<|\Phi(\zeta)|<3\},\ i=1, 2,$$

$$G_3 = G_1 \cup G_2,$$

$$L^{(i)}_{1+\frac{1}{n}} = \left\{\zeta: \zeta \in \Omega_i;\ |\Phi(\zeta)| = 1+\frac{1}{n}\right\},\ i=1, 2,$$

$$\rho^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}(z) = \inf_{\zeta \in L^{(i)}_{1+\frac{1}{n}}} |\zeta - z|,\ z \in L,\ i=1, 2,$$

$$\rho^{*}_{1+\frac{1}{n}}(z) = \max\{\rho^{(1)}_{1+\frac{1}{n}}(z),\ \rho^{(2)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\}.$$

В настоящей работе используются равномерные модули гладкости, введенные в [6] и обозначаемые, согласно [7], через $\omega_{k, N, L, f}(\delta)$. Используя указанные определения и обозначения, сформулируем теорему, являющуюся основной в представленной работе.

Теорема 1. *Пусть $L$—конечная квазиконформная дуга. Тогда для любой $f(z) \in C(L)$ существует алгебраический полином $P_n(z)$, степени не выше $n$ такой, что для всех $z \in L$ имеет место неравенство*

$$|f(z) - P_n(z)| \leqslant \mu\,[\rho^{*}_{1+\frac{1}{n}}(z)],$$

*где $\mu(\delta)$ — нормальная мажоранта для $k$-го модуля гладкости $\omega_{k, N, L, f}(\delta)$ $(k > 1$, $N$ — достаточно велико).*

## § 2. Геометрические свойства квазиконформных дуг

Сделаем ряд замечаний, касающихся отображающих функций $\Phi$ и $\psi$.

В силу описанной в [4] возможности представлять функцию $\Phi(z)$, рассматриваемую отдельно в $\Omega_1$ и $\Omega_2$, в виде следа некоторого квазиконформного отображения плоскости на себя и известных свойств квазиконформных отображений (см. [10], стр. 216) можно записать следующую оценку искажения площадей при отображении $\Phi$:

$$\operatorname{mes} A \leqslant [\operatorname{mes} \Phi(A)]^{\alpha}, \tag{2}$$

где $A \subset \overline{\Omega}$ — произвольное измеримое множество, $\Phi(A)$ — его образ, а $0 < \alpha < 1$ — константа, зависящая только от $L$.

Тогда справедлива следующая

Лемма 1. *Для произвольного $0 < u \leqslant 1$ имеет место неравенство*

$$\int_{L_{1+u}} d(\zeta, L)\,|d\zeta| \leqslant u^{\alpha}, \tag{3}$$

*где $d(\zeta, L)$ — расстояние от $\zeta \in \Omega$ до кривой $L$, $L_{1+u} = \{\zeta : \zeta \in \Omega;\ |\Phi(\zeta)| = 1 + u\}$, $0 < \alpha < 1$ зависит только от $L$.*

Доказательство. Положим для краткости

$$A(v) = \int_{L_{1+v}} d(\zeta, L)\,|d\zeta|.$$

Убедимся сначала в справедливости следующего соотношения:

$$A(u - t) \asymp A(u);\quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{u}{2}. \tag{4}$$

Действительно, переходя на внешность единичного круга и учитывая соотношение $|\psi'(w)| \asymp \frac{d(\psi(w), L)}{|w|-1}$, где $d(\zeta, L) = \inf_{z \in L} |\zeta - z|$ из работы [4], будем иметь

$$A(u) = \int\limits_{|w| = 1+u} |\psi'(w)|\, d(\psi(w), L)\, |dw| \asymp \frac{1}{u} \int\limits_{|w|=1+u} [d(\psi(w), L)]^2 |dw|,$$

$$A(u-t) \asymp \frac{1}{u-t} \int\limits_{|w|=1+u-t} [d(\psi(w), L)]^2 |dw|. \tag{5}$$

В соотношении (5) сделаем замену переменной $\tau = \frac{1+u}{1+u-t} w$. Как было установлено в работе [4], $d(\zeta, L) \asymp |\zeta - \zeta_L|$, где $\zeta_L = \psi\,[\Phi(\zeta) \cdot |\Phi(\zeta)|^{-1}$, а также то, что условия $|\zeta - \zeta_1| \asymp |\zeta - \zeta_2|$ и $|w - w_1| \asymp |w - w_2|$ — эквивалентны ($w_1$ и $w_2$—образы точек $\zeta_1$ и $\zeta_2$ при отображении $\Phi$). Используя эти факты, легко показать справедливость соотношения

$$d(\psi(w), L) \asymp d(\psi(\tau), L),$$

следовательно

$$A(u-t) \asymp \frac{1}{u-t} \int\limits_{|w|=1+u-t} [d(\psi(w), L)]^2\, |dw| \asymp$$

$$\asymp \frac{1}{u-t} \cdot \frac{1+u-t}{1+u} \int\limits_{|\tau|=1+u} [d(\psi(\tau), L)]^2\, |d\tau| \asymp A(u),$$

что и утверждается в соотношении (4). Установим теперь справедливость оценки (3). Интегрируя соотношение (4) и учитывая то, что $d(\zeta, L) \asymp |\zeta - \zeta_L|$ и оценку (2), находим

$$A(u) \cdot \frac{u}{2} \asymp \int\limits_{1+\frac{u}{2}}^{1+u} dR \int\limits_{L_R} d(\zeta, L)\, |d\zeta| =$$

$$= \int\limits_{1+\frac{u}{2}}^{1+u} dR \int\limits_{|w|=R} d(\psi(w), L) \cdot |\psi'(w)|\, |dw| \asymp$$

$$\asymp \int\limits_{1+\frac{u}{2}}^{1+u} \int\limits_{0}^{2\pi} |\psi'(w)|^2 R\,dR\,d\varphi = u \cdot \operatorname{mes} \psi\left(\left\{w : 1 + \frac{u}{2} \leqslant |w| \leqslant 1+u\right\}\right) \leqslant u^{1+\alpha},$$

откуда следует неравенство (3).

## § 3. Усреднение функций, заданных на внешности конечной квазиконформной дуги

Пользуясь идеей свертки с ядром С. Н. Мергеляна (см. [11], стр. 43), опишем один из возможных способов усреднения функций, заданных на внешности произвольной конечной квазиконформной дуги $L$.

Рассмотрим сначала случай единичного круга.

Лемма 2. *Пусть в* $\overline{\Omega}' = \{w : 1 \leqslant |w| < \infty\}$ *задана непрерывная функция* $\bar{f}(w)$. *Тогда для всякого натурального* $n$ *существует функция* $\bar{f}_n(w)$ *со следующими свойствами:*

1) $\bar{f}_n(w)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega}'$, *причем*

$$\bar{f}_n(w) = \bar{f}(w), \quad \text{если } |w| = 1;$$

2) *если* $l(w) = [\cos\alpha_1(w), \cos\alpha_2(w)]$ — *непрерывно меняющаяся в* $\Omega'$ *вектор-функция направлений, то функция* $\dfrac{\partial \bar{f}_n(w)}{\partial l(w)}$ *непрерывна в* $\Omega' \setminus \left\{w : |w| = 1 + \dfrac{1}{n}\right\}$ *и имеет место следующее неравенство:*

$$\left|\frac{\partial \bar{f}_n(w)}{\partial l(w)}\right| \leqslant \frac{1}{\delta(w)} \sup_{|\tau - w| < \delta(w)} |\bar{f}(w) - \bar{f}(\tau)|, \tag{6}$$

*где* $w \in \Omega' \setminus \left\{w : |w| = 1 + \dfrac{1}{n}\right\}$,

$$\delta(w) = \begin{cases} |w| - 1, & \text{если } |w| < 1 + \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{n}, & \text{если } |w| > 1 + \dfrac{1}{n}; \end{cases} \tag{7}$$

3) *для* $w, \tau \in \left\{w : |w| = 1 + \dfrac{1}{n}\right\}$

$$|\bar{f}_n(w) - \bar{f}_n(\tau)| \leqslant n\,|w - \tau| \sup_{|w| = 1 + \frac{1}{n}} |\tilde{f}(w)|, \tag{8}$$

*т. е.* $\tilde{f}_n(w) \in \mathrm{Lip}\,1$ *на* $\left\{|w| = 1 + \dfrac{1}{n}\right\}$.

Доказательство. Зафиксируем натуральное число $n$ и укажем метод построения функции $\bar{f}_n(w) = \bar{f}_n(\tilde{f}, w)$. Для этого, как это было сделано в работе [4], воспользуемся идеей обобщенной свертки с помощью ядер С. Н. Мергеляна

$$K_\delta(r) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{r}{\delta}\right)\dfrac{3}{\pi\delta^2}, & 0 < r \leqslant \delta, \\ 0, & r > \delta. \end{cases}$$

Положим $r = r(\tau, w) = |\tau - w|$, $w = u + iv$, $\delta = \delta(w)$ определим как в (7). Тогда для $w \in \Omega'$, $|w| \neq 1 + \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)}$ определяется по формуле

$$\frac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)} = \begin{cases} \dfrac{3}{\pi\delta^3}\Big\{\Big[-r'_n - \delta'_u\left(2 - \dfrac{3r}{\delta}\right)\Big]\cos\alpha_1(w) + \\ \quad + \Big[-r'_v - \delta'_v\left(2 - \dfrac{3r}{\delta}\right)\Big]\cos\alpha_2(w), & 0 < r < \delta, \\ 0, & r > \delta, \end{cases}$$

откуда, так же как и в работе [4], заключаем

$$\iint\limits_{\text{пл.}\,\tau} \frac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)}\, d\sigma_\tau = 0, \tag{9}$$

$$\left|\frac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^3}, & 0 < r < \delta, \\ 0, & r > \delta, \end{cases} \tag{10}$$

$$\iint\limits_{\text{пл.}\,\tau} \left|\frac{\partial K_\delta(r)}{\partial l(w)}\right| d\sigma_\tau \leqslant \frac{1}{\delta}. \tag{11}$$

В качестве искомой возьмем функцию

$$\tilde{f}_n(w) = \begin{cases} \iint\limits_{\text{пл.}\,\tau} \tilde{f}(\tau)\, K_{\delta(w)}(|\tau - w|)\, d\sigma_\tau, & w \in \Omega', \\ \tilde{f}(w), & |w| = 1. \end{cases} \tag{12}$$

Переходя в соотношении (12) к дифференцированию под знаком интеграла и пользуясь сооношениями (9) — (10) получим, следуя доказательству работы [4], оценку (6). Докажем теперь неравенство (8). Пусть $|w| = |\tau| = 1 + \dfrac{1}{n}$. Тогда имеем

$$|\tilde{f}_n(w) - \tilde{f}(\tau)| = \left|\iint\limits_{\text{пл.}\,t} \tilde{f}(t)\, K_{1/n}(|t - w|)\, d\sigma_t - \iint\limits_{\text{пл.}\,t} \tilde{f}(t)\, K_{1/n}(|t - \tau|)\, d\sigma_t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{1 < |t| < 1 + \frac{2}{n}} |\tilde{f}(t)| \cdot \iint\limits_{\text{пл.}\,t} |K_{1/n}(|t - w|) - K_{1/n}(|t - \tau|)|\, d\tau_t.$$

Остается установить справедливость неравенства

$$\iint\limits_{\text{пл. } t} |K_{1/n}(|t-w|) - K_{1/n}(|t-\tau|)|\, d\sigma_t \leqslant n\,|w-\tau|,$$

которое проверяется непосредственно, исходя из конкретного вида входящих в него величин.

Рассмотрим теперь случай произвольной конечной дуги.

Лемма 3. *Пусть $L$ — конечная квазиконформная дуга, а $f(\zeta)$ задана и непрерывна в конечной комплексной плоскости. Тогда для всякого натурального $n$ существует функция $f_n^*(\zeta)$ со следующими свойствами:*

1) *$f_n^*(\zeta)$ задана и непрерывна в конечной комплексной плоскости, причем*

$$f_n^*(\zeta) = f(\zeta), \text{ если } \zeta \in L;$$

2) *функция $f_n^*(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$ непрерывно дифференцируема по $\xi$ и по $\eta$ в $\Omega \setminus L_{1+\frac{1}{n}}$ и выполняются следующие условия:*

$$\left|\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \eta}\right| \leqslant \frac{n\left(|\Phi(\zeta)| - 1 + \frac{1}{n}\right)}{|\zeta - \zeta_L|} \cdot \sup_{z \in V(\zeta)} |f(\zeta) - f(z)|, \qquad (13)$$

*где $\zeta_L$ — тело простого конца $Z_L = \psi[\Phi(\zeta) \cdot |\Phi(\zeta)|^{-1}]$,*

$$V(\zeta) = \{z : |\Phi(\zeta) - \Phi(z)| \leqslant \delta[\Phi(\zeta)]\};$$

3) $\qquad f_n^*(\zeta) \in \operatorname{Lip} 1$ *на* $L_{1+\frac{1}{n}}$.

Доказательство. Искомую функцию построим, опираясь на лемму 2. Пусть $\tilde f(w) = f[\psi(w)]$, $\tilde f_n(w) = \tilde f_n(\tilde f, w)$ — функция, заданная формулой (12). Положим

$$f_n^*(\zeta) = \begin{cases} \tilde f_n[\Phi(\zeta)], & \zeta \in \Omega = CL, \\ f(\zeta), & \zeta \in L. \end{cases}$$

Свойство 1 очевидно. Неравенство (13) получается так же, как и оценка

$$\left|\frac{\partial f_n^*(z)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial f_n^*(z)}{\partial y}\right| \leqslant \frac{1}{|z - z_L|} \sup_{\zeta \in V(z)} |f(\zeta) - f(z_L)|$$

работы [4], путем применения соотношения (6), соотношения $|\psi'(w)| \asymp \frac{d[\psi(w), L]}{|w| - 1}$ (см. [4]) и того факта, что

$$\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \xi} + \frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial \tilde f_n(w)}{\partial l_\xi(w)} + \frac{\partial \tilde f_n(w)}{\partial l_\eta(w)}\right] \cdot |\Phi'(\zeta)|,$$

где $w = \Phi(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, а $l_\xi(w)$ и $l_\eta(w)$ — направления, в которые перейдут, соответственно, направления

$$\{z : \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} \zeta\} \text{ и } \{z : \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \zeta\}.$$

Свойство 3) следует из утверждения 3) леммы 2.

Следствие. Если $\zeta \in \operatorname{ext} L_{1+\frac{1}{n}} \cap \operatorname{int} L_3$, то в силу соотношения (13) будем иметь

$$\left|\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \xi}\right| + \left|\frac{\partial f_n^*(\zeta)}{\partial \eta}\right| \leqslant \frac{n \sup\limits_{z \in \operatorname{int} L_{3+\frac{1}{n}}} |f(z)|}{d\left(L, L_{1+\frac{1}{n}}\right)} = M(n, f),$$

где $d\left(L, L_{1+\frac{1}{n}}\right) = \inf\limits_{z \in L,\ \zeta \in L_{1+\frac{1}{n}}} |z - \zeta|$.

Следовательно, в $\operatorname{ext} L_{1+\frac{1}{n}} \cap \operatorname{int} L_3$ частные производные функции $f_n^*(\zeta)$ непрерывны и равномерно ограничены при фиксированном числе $n$.

## § 4. Полиномиальная аппроксимация функций класса Lip 1

Для построения аппроксимационных полиномов, используемых в приближении функций класса $C(L)$, будут использованы ядра $K_{r, m, l, n}(\zeta, z)$, введенные В. К. Дзядыком (см., например, [1], стр. 429). Приведем две леммы, описывающие свойства этих ядер.

Лемма 4.

$$\int\limits_{L_3} K^2_{r, m, l, n}(\zeta, z)\, d\zeta \equiv 0, \quad z \in L, \tag{14}$$

где $L_3 = \{\zeta : |\Phi(\zeta)| = 3\}$.

Доказательство. Тождество (14) справедливо в силу того факта, что функция $K^2_{r, m, l, n}(\zeta, z)$ при фиксированном $z$ аналитична в $\Omega$, а на бесконечности

$$|K^2_{r, m, l, n}(\zeta, z)| \leqslant \frac{1}{|\zeta - z|^2}.$$

Лемма 5. *Пусть $L$—конечная квазиконформная дуга. Тогда существует натуральное число $l = l(L) > 2$, при котором для всех $z \in L$ и $\zeta \in G_j$ $(j = 1, 2)$ справедливы соотношения*

$$\left|\frac{1}{\zeta - z} - K_{r, m, l, n}(\zeta, z)\right| \leqslant \frac{\left[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^m}{|\zeta - z|\left[|\zeta - z| + \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^m}; \tag{15}$$

$$|K_{r, m, l, n}(\zeta, z)| \leqslant \frac{1}{|\zeta - z| + \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}.$$

Эта лемма является частным случаем теоремы 5 работы [12].

Докажем теперь теорему единственности, которая понадобится нам для получения интегрального представления функций.

Теорема 2. *Пусть в комплексной плоскости задана функция $F(\zeta)$, принадлежащая в ней классу* Lip 1 *и обращающаяся в нуль на конечной квазиконформной дуге $L$, тогда при всех $z \in L$ и натуральных $r$, $m$, $l$, $n$ имеет место равенство*

$$\int_{L_s} F(\zeta)\, K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\, d\zeta = 2i \iint_{G_s} \frac{\partial F(\zeta)}{\partial \bar\zeta} K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\, d\sigma_\zeta, \tag{16}$$

*где $K_{r,m,l,n}(\zeta, z)$ — многочленное ядро.*

Доказательство. Зафиксируем $z \in L$ и натуральные числа $r$, $m$, $l$, $n$ и рассмотрим заданную в комплексной плоскости функцию

$$g_z(\zeta) = \begin{cases} F(\zeta)\, K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z); & \zeta \in \Omega, \\ 0, & \zeta \in L. \end{cases}$$

Возьмем произвольное число $u > 0$. В силу леммы 5, при $\zeta \in L_{1+u}$ будем иметь

$$g_z(\zeta) \leqslant d(\zeta, L) \sup_{\zeta \in L_{1+u}} |K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)| \leqslant n^4 d(\zeta, L),$$

поскольку $\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z) > \frac{1}{n^2}$ $(j = 1, 2)$.

Следовательно, учитывая лемму 1, получаем

$$\left| \int_{L_{1+u}} g_z(\zeta)\, d\zeta \right| \leqslant n^4 \int_{L_{1+u}} d(\zeta, L)\, |d\zeta| \leqslant n^4 u^\alpha. \tag{17}$$

Применим к функции $g_z(\zeta)$ формулу Грина (см. [10], стр. 148)

$$\int_{L_s} g_z(\zeta)\, d\zeta - \int_{L_{1+u}} g_z(\zeta)\, d\zeta = 2i \iint_{\operatorname{int} L_s \cap \operatorname{ext} L_{1+u}} \frac{\partial g_z(\zeta)}{\partial \bar\zeta}\, d\sigma_\zeta. \tag{18}$$

Переходя в (18) к пределу при $u \to 0$ и учитывая неравенство (17) и тот факт, что

$$\frac{\partial g_z(\zeta)}{\partial \bar\zeta} = \frac{\partial F(\zeta)}{\partial \bar\zeta} K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z); \ \zeta \in \Omega,$$

получим равенство (16).

Следствие. Пусть в комплексной плоскости заданы функции $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$, принадлежащие классу Lip 1, значения которых совпадают на некоторой квазиконформной дуге $L$, тогда при всех $z \in L$ и натуральных $r$, $m$, $l$, $n$ имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_s} F_1(\zeta)\, K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\, d\zeta - \frac{1}{\pi} \iint_{G_s} \frac{\partial F_1(\zeta)}{\partial \bar\zeta} K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\, d\sigma_\zeta =$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} F_2(\zeta)\,K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_1}\frac{\partial F_2(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\cdot K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\,d\sigma_\zeta. \tag{19}$$

Действительно, для того, чтобы убедиться в справедливости равенства (19), достаточно применить теорему 2 к функции $F_1(\zeta)-F_2(\zeta)$.

Аналогично работе [4, стр. 16], с учетом следствия к лемме 3, доказывается

Лемма 6. *Пусть функция $f(z)\in C(L)$ удовлетворяет условию* Lip 1. *Тогда при всех $z\in L$ справедливо интегральное представление*

$$f(z)=f^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f^*(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\frac{\partial f^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\cdot\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}, \tag{20}$$

*где функция $f^*(z)$ задана в конечной комплексной плоскости, принадлежит в ней классу* Lip 1, *а на $L$ совпадает с функцией $f(z)$.*

Пусть $f(\zeta)$ и $f^*_n(\zeta)$ те же функции, что и в лемме 3. Обозначим через $P_n(z, f, f^*_n)$ полином, строящийся по формуле

$$P_n(z,f,f^*_n)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} f^*_n(\zeta)\,K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_1}\frac{\partial f^*_n(\zeta)}{\partial\bar\zeta}K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\,d\sigma_\zeta. \tag{21}$$

Согласно следствию к теореме 2, $P_n(z, f, f^*_n)=P_n(z, f)$, то есть не зависит от выбора продолжения $f^*_n$.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться этим фактом при оценке величины $|f(z)-P_n(z, f)|$.

Лемма 7. *Пусть на конечной квазиконформной дуге $L$ задана функция $F(\zeta)$, которая представима в виде*

$$F(\zeta)=g(\zeta)+h(\zeta),$$

*где функция $g(\zeta)$ непрерывна на $L$, а $h(\zeta)$ аналитична во всей конечной комплексной плоскости, тогда существует функция $g^*(\zeta)$, непрерывная в конечной комплексной плоскости и такая, что имеют место следующие соотношения:*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{h(\zeta)+g^*(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_1}\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\,\frac{d\sigma_\zeta}{\zeta-z}, \tag{22}$$

$$P_n(F, z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}[h(\zeta)+g^*(\zeta)]\,K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\,d\zeta-$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G_1}\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\,K^2_{r,m,l,n}(\zeta, z)\,d\sigma_\zeta, \tag{23}$$

$$\left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\right|\leqslant\frac{n\left(|\Phi(\zeta)|-1+\frac{1}{n}\right)}{|\zeta-\zeta_L|}\sup_{z\in V'(\zeta)}|g(z)-g(\zeta_L)|, \tag{24}$$

где

$$V'(\zeta)=\left\{z:\ z\in L,\ |\arg\Phi(z)-\arg\Phi(\zeta_L)|\leqslant\arcsin\frac{\delta[\Phi(\zeta)]}{|\Phi(\zeta)|}\right\}.$$

Доказательство. Укажем сначала путь построения функции $g^*(\zeta)$. Для этого положим $g_1(\zeta)=g(\zeta_L)$, $\zeta\in\Omega$, а в качестве $g^*(\zeta)=g^*(g_1,\zeta)$ возьмем функцию из леммы 3. Оценка следует из неравенства (13).

Полагая в равенствах (20) и (21) $f^*(\zeta)=g^*(\zeta)+h(\zeta)$ и пользуясь леммой 6 приходим к соотношениям (22) и (23).

## § 5. Аппроксимация функций класса $C(L)$ функциями класса Lip 1

Зафиксируем произвольное достаточно большое натуральное $n$. Разобьем дугу $L$ на отдельные участки следующим образом. Пусть $z_1$ и $z_2$—концевые точки дуги $L$. Положим $\xi_0=z_1$. В качестве $\xi_1$ возьмем одну из точек пересечения окружности с центром в $\xi_0$ и радиусом $\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(\xi_0)$ с кривой $L$. Этот процесс будем продолжать до тех пор, пока не построим точку $\xi_{m-1}\in L$, для которой $|\xi_{m-1}-z_2|\asymp\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(\xi_{m-1})$ и положим $\xi_m=z_2$. Очевидно, что $m\leqslant n$. Через $\gamma_q$ обозначим часть дуги $L$, лежащую между точками $\xi_{q-1}$ и $\xi_q$. Таким образом, $L=\bigcup\limits_{q=1}^{m}\gamma_q$.

Положим $d_q=|\xi_q-\xi_{q-1}|$. На каждой дуге $\gamma_q$ с концами $\xi_{q-1}$ и $\xi_q$ зафиксируем $k$ точек $(k\geqslant 2)$ $\xi_{q_1}=\xi_{q-1}$, $\xi_{q_2},\cdots,\xi_{qk}=\xi_q$, удаленные друг от друга на расстояние не меньшее, чем $\dfrac{d_q}{k-1}$.

Через $f_n(\zeta)$ обозначим кусочно-полиномиальную функцию, полагая при $\zeta\in\gamma_q$:

$$f_n(\zeta)=P_{qk}(\zeta)=\sum_{l=1}^{k}f(\xi_{ql})\prod_{j\neq l}\frac{\zeta-\xi_{qj}}{\xi_{ql}-\xi_{qj}}. \tag{25}$$

В силу свойств конечных разностей (см. [6], стр. 44) имеем при $\zeta\in L$:

$$f(\zeta)-P_{qk}(\zeta)=[\zeta,\xi_{q1},\cdots,\xi_{qk};f,\zeta]. \tag{26}$$

В соответствии с оценками, приведенными в [6], стр. 254, справедлива оценка

$$|[\zeta,\xi_{q1},\ \cdots,\xi_{qk};f,\zeta]|\leqslant\mu_k[d_q+d(\zeta,\gamma_q)], \tag{27}$$

где $\mu_k(\delta)=\mu(\delta)\left[\dfrac{\delta}{d_q}\right]^{k-1}$, а $\mu(\delta)$ — нормальная мажоранта для $k$-го модуля $\omega_{k,N,L,f}(\delta)$ (здесь $N$ достаточно велико, $N>N_0$ — зависящее от $L$ и $k$). Сопоставляя соотношения (26) и (27), приходим к неравенству

$$|f_n(\zeta)-f(\zeta)|\leqslant \mu[\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(\zeta)]. \tag{28}$$

Пользуясь аддитивностью конечных разностей, находим

$$[\zeta, \xi_{q1},\ldots,\xi_{qk}; f_n, \zeta]=[\zeta, \xi_{q1},\ldots,\xi_{qk}; f, \zeta]+[\zeta, \xi_{q1},\ldots,\xi_{qk}; f_n-f, \zeta],$$

то есть

$$|[\zeta, \xi_{q1}, \ldots, \xi_{qk}; f_n, \zeta]|\leqslant \mu_k[d(\zeta, \gamma_q)+d_q]. \tag{29}$$

Лемма 8. *Пусть $z\in\gamma_q$. Тогда для функции $u(\zeta)$, определяемой равенством*

$$u(\zeta)=u(\zeta, z, n)=f_n(\zeta)-P_{qk}(\zeta),\ \zeta\in L,$$

*справедливо следующее неравенство:*

$$|u(\zeta)-u(z)|=|u(\zeta)|\leqslant\begin{cases}\mu_k(d_q)\dfrac{|\zeta-z|}{d_q}; & |\zeta-z|\leqslant d_q,\\ \mu_k(|\zeta-z|); & |\zeta-z|\geqslant d_q,\end{cases} \tag{30}$$

*где $\zeta\in L$.*

Доказательство. Так как

$$|u(\zeta)-u(z)|=|[\zeta, \xi_{q1},\ldots,\xi_{qk}; f_n, \zeta]|,$$

то нижняя часть соотношения (30) следует из оценки (29). Установим справедливость верхней части неравенства (30).

Не ограничивая общности, рассмотрим только случай, когда точка $\zeta$ лежит на соседней к $\gamma_q$ дуге (например, когда $\zeta\in\gamma_{q+1}$). Тогда на $\gamma_{q+1}$, как было замечено

$$|u(\zeta)|=|P_{q+1k}(\zeta)-P_{qk}(\zeta)|\leqslant\mu_k(d_q)$$

и как нетрудно показать, пользуясь известной теоремой Бернштейна, см. [13], стр. 26, такое же неравенство будет выполняться для всех $\zeta\in V_q=\{\zeta:|\zeta-\xi_q|\leqslant 2C\cdot d_{q+1}\}$, где константа $C>1$ выбрана так, чтобы

$$\gamma_{q+1}\in u_q\overset{\mathrm{df}}{=}\{\zeta: |\zeta-\xi_q|\leqslant Cd_{q+1}\}.$$

Установим предварительно следующую оценку:

$$|P'_{q+1k}(\zeta)-P'_{qk}(\zeta)|\leqslant\frac{\mu(d_q)}{d_{q+1}},\ \zeta\in u_q.$$

Положим $\partial V_q=\sigma$, тогда имеем при $\zeta\in u_q$:

$$|P'_{q+1k}(\zeta)-P'_{qk}(\zeta)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\sigma}\frac{[P_{q+1k}(\xi)-P_{qk}(\xi)]}{[\xi-\zeta]^2}d\xi\right|\leqslant\frac{\mu_k(d_q)}{d_{q+1}}.$$

Таким образом, если $\zeta\in\gamma_{q+1}$, то

$$|P_{q+1k}(\zeta)-P_{qk}(\zeta)|=|[P_{q+1k}(\zeta)-P_{qk}(\zeta)]-[P_{q+1k}(\xi_q)-P_{qk}(\xi_q)]|=$$

$$=\left|\int\limits_{[\xi_q,\zeta]}[P'_{q+1k}(\zeta)-P'_{qk}(\xi)]d\xi\right|\leqslant\frac{\mu(d_q)}{d_{q+1}}|\zeta-\xi_q|\leqslant\frac{\mu_k(\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z))}{\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)}|\zeta-z|.$$

(Здесь под $[\xi_q, \zeta]$ понимается отрезок, соединяющий $\xi_q$ и $\zeta$), что и утверждается в оценке (30).

По функции $f_n(\zeta)$ определим функцию $F_n(\zeta)$, полагая при $\zeta \in \gamma_q$ $(q=\overline{1,m})$

$$F_n(\zeta) = \sum_{i=1}^{q-1} \int\limits_{[\xi_{i-1}, \xi_i]} P_{ik}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{[\xi_{q-1}, \zeta]} P_{qk}(\xi)\, d\xi, \tag{31}$$

где $[\xi_{i-1}, \xi_i]$, $(i=\overline{1, q-1})$, $[\xi_{q-1}, \zeta]$ отрезки, соединяющие выделенные точки.

Функция $F_n(\xi)$ локально-аналитична в точках дуги $L$, за исключением точек $\xi_0, \cdots, \xi_m$, причем

$$\frac{\partial F_n(\zeta)}{\partial \zeta} = f_n(\zeta),\ \zeta \in L \setminus \{\xi_0, \cdots, \xi_m\}. \tag{32}$$

Функция $F_n(\zeta) \in \mathrm{Lip}\,1$ на $L$, следовательно, для нее можно построить полином $P_n(F_n, z)$ по формуле (21). Эти полиномы и будут использоваться нами в качестве аппроксимационных для функции $f(z)$.

Лемма 9. *Зафиксируем точку* $z \in \gamma_q (q=\overline{1, m})$ *и положим*

$$F_n(\zeta) = C + h(\zeta) + g(\zeta),$$

*где*

$$C = C(z, f) = \sum_{i=1}^{q-1} \int\limits_{[\xi_{i-1}, \xi_i]} P_{ik}(\xi)\, d\xi + \int\limits_{[\xi_{q-1}, \zeta]} P_{qk}(\xi) d\xi,$$

$$h(\zeta) = \int\limits_{[z, \zeta]} P_{qk}(\xi)\, d\xi,$$

$$g(\zeta) = \int\limits_{[z, \zeta]} u(\xi)\, d\xi, \tag{33}$$

*а* $u(\zeta)$ *—функция, определенная в лемме* 8. *Построенная по* $g(\zeta)$ *в лемме* 7 *функция* $g^*(\zeta)$ *удовлетворяет следующему соотношению:*

$$\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial \bar\zeta} \leqslant \begin{cases} \mu_k(|\zeta - z|), \text{ если } \zeta \in \operatorname{int} L_{1+\frac{1}{n}};\ |\zeta - z| \geqslant \rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z), \\ \dfrac{\mu_k[\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)]}{\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)} |\zeta - z|, \text{ если } \zeta \in \operatorname{int} L_{1+\frac{1}{n}}; \\ \qquad\qquad\qquad |\zeta - z| \leqslant \rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z), \\ \mu_k(|\zeta - z|) \left[\dfrac{|\zeta - z|}{\rho^{(J)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\right]^A, \text{ если } \zeta \in \operatorname{ext} L_{1+\frac{1}{n}}, \end{cases} \tag{34}$$

*где константа* $A > 0$ *зависит только от* $L$.

**Доказательство.** Соотношение (34) получается путем применения неравенства (24) к функции $g(\zeta)$, определяемой равенством (33) и геометрическими соотношениями. Действительно, установим предварительно следующее соотношение. Пусть $\zeta \in L$, $\xi \in L$, $|\zeta - \xi| \leqslant \rho^*_{1+\frac{1}{n}}(\xi)$, тогда

$$|g(\zeta) - g(\xi)| \leqslant |\zeta - \xi| \sup_{|t-z| \leqslant |z-\zeta| + |z-\xi|} |u(t)|. \tag{35}$$

Неравенство (35) следует из определения $g(\zeta)$ как интеграла от $u(\zeta)$. Рассмотрим теперь отдельные случаи расположения точки $\zeta$ в $\Omega$.

1) Пусть $\zeta \in \operatorname{int} L_{1+\frac{1}{n}}$, $|\zeta - z| \geqslant \rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)$, тогда, учитывая (24), (30) и (35), получим

$$\left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial \bar\zeta}\right| \leqslant \frac{1}{|\zeta - \zeta_L|} \sup_{\xi \in V'(\zeta)} |g(\xi) - g(\zeta_L)| \leqslant \mu_k(\zeta - z|);$$

2) Пусть $\zeta \in \operatorname{int} L_{1+\frac{1}{n}}$, $|\zeta - z| \leqslant \rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)$, тогда, в силу (24), (30) и (35) находим

$$\left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial \bar\zeta}\right| \leqslant \frac{1}{|\zeta - \zeta_L|} \sup_{\xi \in V'(\zeta)} |g(\xi) - g(\zeta_L)| \leqslant \frac{\mu_k[\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)]}{\rho^*_{1+\frac{1}{n}}(z)} |\zeta - z|.$$

3) Пусть $\zeta \in \operatorname{ext} L_{1+\frac{1}{n}}$. Тогда согласно (24), (30), (35) и неравенству $n(|\Phi(\zeta)| - 1) \leqslant \left[\frac{|\zeta - z|}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\right]^A$, полученному в [4]:

$$\left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial \bar\zeta}\right| \leqslant \frac{n(|\Phi(\zeta)| - 1)}{|\zeta - \zeta_L|} \sup_{\xi \in V'(\zeta)} |g(\xi) - g(\zeta_L)| \leqslant$$

$$\leqslant n(|\Phi(\zeta)| - 1)\, \mu_k(|\zeta - z|) \leqslant \left[\frac{|\zeta - z|}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\right]^A \mu_k(|\zeta - z|).$$

Приступим теперь к доказательству теоремы 1. Пусть $f(z) \in C(L)$. В качестве аппроксимационного полинома возьмем полином $P_n(F_n, z)$, определяемый соотношениями (21), (31) и (25). Осуществляя промежуточную аппроксимацию функции $f(z)$ посредством кусочно-полиномиальной функции $f_n(z)$ (определяемой равенством (25)) будем иметь в силу (28), (23), (32) и леммы 9:

$$|f(z) - P_n(F_n, z)| \leqslant \mu[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)] + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} |h(\zeta) + g^*(\zeta)| \left| \frac{1}{(\zeta - z)^2} - \right.$$

$$\left. - K^2_{r,l,m,n}(\zeta, z) \right| |d\zeta| + \frac{1}{\pi} \iint_{\Omega_1} \left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial \bar\zeta}\right| \left| \frac{1}{(\zeta - z)^2} - K^2_{r,l,m,n}(\zeta, z) \right| d\sigma_\zeta, \tag{36}$$

где

$$\left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\right| \leqslant \begin{cases} \dfrac{\mu\left[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\,|\zeta-z|, & \text{если } |\zeta-z|\leqslant \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z),\\[2ex] \mu\left[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]\left[\dfrac{|\zeta-z|}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\right]^{A+k}, & \text{если } |\zeta-z|\geqslant \rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z). \end{cases} \tag{37}$$

Величину $\left|\dfrac{1}{(\zeta-z)^2}-K^2_{r,\,l,\,m,\,n}(\zeta,z)\right|$ можно оценить, используя соотношения (15):

$$\left|\frac{1}{(\zeta-z)^2}-K^2_{r,\,l,\,m,\,n}(\zeta,z)\right| \leqslant \frac{\left[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^m}{|\zeta-z|^2\left[|\zeta-z|+\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^m}. \tag{38}$$

Контурный интеграл в соотношении (36) оценивается тривиально. Оценим теперь интеграл по $G_3$, используя соотношения (37) и (38). Пусть $\zeta\in G_j$; $j=1,2$, положим $Q_j=\{\zeta:|\zeta-z|\leqslant\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\}\cap\Omega_j$. Тогда

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{G}\left|\frac{\partial g^*(\zeta)}{\partial\bar\zeta}\right|\left|\frac{1}{(\zeta-z)^2}-K^2_{r,\,l,\,m,\,n}(\zeta,z)\right|d\sigma_\zeta=\iint\limits_{Q_j}[\text{idem}]+$$

$$+\iint\limits_{G_j\setminus Q_j}[\text{idem}]\leqslant\frac{\mu\left[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]}{\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)}\iint\limits_{Q_j}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|}+\mu\left[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]\left[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^m\times$$

$$\times\left[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right]^{-A-k}\cdot\iint\limits_{G_j\setminus Q_j}\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta-z|^{m+2-A-k}}\leqslant\mu\left[\rho^{(j)}_{1+\frac{1}{n}}(z)\right],$$

как только $m>[A+k]+1$.

Учитывая неравенства (36) и (39), получим утверждение теоремы 1.

В заключение авторы выражают глубокую признательность В. И. Белому за постановку задачи.

Институт прикладной математики
и механики АН УССР, г. Донецк

Поступила 30.XI.1979

Վ. Վ. ԱՆԴՐԻԵՎՍԿԻ, Ս. Գ. ԳԵՐՄԱՆ. Բազմանդամային մոտարկումները քվազիկոնֆորմ աղեղների վրա (ամփոփում)

Կոնֆորմ ինվարիանտների մեթոդի միջոցով ապացուցված է մոտարկման ուղիղ թեորեման աղեղների վրա $k>$կարգի հարթ մոդուլների համար, որոնք կարող են լինել անուղղելի իրենց ամեն մի մասի վրա։

V. V. ANDRIEVSKY, S. P. GERMAN. *Polynomial approximation on the quasiconformal arcs* (summary)

It is established the direct theorem of the approximation theory in terms of the modules of smoothness order $k > 1$ on the quasiconformal arcs.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *В. К. Дзядык*. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами, «Наука», М., 1977.
2. *А. И. Колесник*. О приближении функций, непрерывных на жордановых дугах, УМЖ, 19, № 2, 1967, 30—38.
3. *И. А. Шевчук*. Конструктивная характеристика классов непрерывных на множестве $\mathfrak{M} \subset C$ функций для $k$-го модуля непрерывности, Мат. заметки, 25, № 2, 1979, 225—249.
4. *В. В. Андриевский*. Прямые теоремы приближения на квазиконформных дугах, Донецк. ун-т, Донецк, 1979 (рукопись депон. в ВИНИТИ, № 313-79).
5. *В. И. Белый*. Конформные отображения и приближения функций в областях с квазиконформной границей, Мат. сб., 104 (144):3, 1977, 163—193.
6. *П. М. Тамразов*. Гладкости и полиномиальные приближения, Киев, «Наукова думка», 1975.
7. *П. М. Тамразов*. Конечно-разностные гладкости и полиномиальные приближения, Препринт Института математики АН УССР, 75, 10, К., 1975.
8. *В. И. Белый, П. М. Тамразов*. Модули гладкости и полиномиальные приближения функций в квазиконформных областях, ДАН СССР, 241, № 3, 1978, 513—516.
9. *А. И. Маркушевич*. Теория аналитических функций, «Наука», II, 1968.
10. *O. Lehto, K. I. Virtanen*. Quasiconformal mappings in the Plane, — B., H., N—4 1973.
11. *С. Н. Мергелян*. Равномерные приближения функций комплексного переменного, УМН, 1952, VII, вып. 2 (48), 1952, 31—122.
12. *В. В. Андриевский*. Некоторые свойства континуумов с кусочно-квазиконформной границей, Донецк. ун-т, Донецк, 1978, (рукопись депон. в ВИНИТИ, № 3769-78).