ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

А. Э. ДЖРБАШЯН

ВЕСОВЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ЛИТТЛЬВУДА-ПЭЛИ И ДЛЯ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ

1°. Пусть функция f аналитична в единичном круге $D=\{|z|<1\}$ и принадлежит классу Харди H^p, $0<p<\infty$. Отображение $f\to g(f)$:

$$g(f)(\theta)=\left\{\int\limits_0^1 |f'(re^{i\theta})|^2(1-r)\,dr\right\}^{1/2}\quad(z=re^{i\theta})$$

называется функцией Литтльвуда-Пэли.

Теорема Литтльвуда-Пэли ([1], гл. XIV). (i) Пусть $f\in H^p$, $0<p<\infty$, $f(e^{i\theta})$— граничные значения функции f. Тогда

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} g^p(f)(\theta)\,d\theta\leqslant A_p\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p\,d\theta. \tag{1}$$

(ii) Если $f(0)=0$, $1<p<\infty$, то

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p\,d\theta\leqslant B_p\int\limits_{-\pi}^{\pi} g^p(f)(\theta)\,d\theta. \tag{2}$$

Константы A_p и B_p зависят только от p.

В настоящей работе мы дадим обобщения на случай весовых пространств неравенств (1) и (2) для оператора g и различных его вариантов. При этом мы рассматриваем эти операторы на пространствах гармонических функций, заданных в шарах D^n пространства R^n и в полупространствах $R_+^{n+1}=\{(x, y): x\in R^n, y>0\}$. Все наши результаты верны в этом случае, кроме одного (который особо оговаривается), когда приходится ограничиваться случаем аналитических в единичном круге D или полуплоскости R_+^2 функций. Однако, для простоты изложения, все формулировки и доказательства приводятся в случае R_+^2 или D. В конце работы приводится применение этих результатов к мультипликаторам преобразований Фурье.

2°. Введем теперь необходимые определения и обозначения.

Определение. Пусть функция $w(x)$ неотрицательна и локально интегрируема на R^1. w принадлежит классу Макенхоупта A_p, $1<p<\infty$, если существует константа $C>0$ такая, что для любого конечного интервала I, $I\subset R^1$

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(x)\,dx\right)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}\leqslant C, \qquad (A_p)$$

где $|I|$ — лебегова длина интервала I.

w принадлежит классу A_1, если

$$w^*(x)\leqslant Cw(x), \qquad (A_1)$$

где w^*—максимальная функция Харди-Литтльвуда функции w (определение см. ниже). Аналогично определяются классы A_p на окружности $\mathbf{T}=\partial\mathbf{D}$.

Через $H^p_w\equiv H^p(\mathbf{R}^2_+,\ w(x)\,dx)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$ обозначаем пространство всех гармонических в $\mathbf{R}^2_+$ функций, для которых

$$\|f\|^p_{p,w}\equiv\sup_{y>0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)|^p\,w(x)\,dx<\infty. \qquad (3)$$

Если $1<p<\infty$ и $w\in A_p$, то этот класс можно отождествить с классом всех функций f, заданных на $\mathbf{R}^1$, для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,w(x)\,dx<\infty. \qquad (4)$$

Точнее, если выполняется (3), то для функции f существуют не тангенциальные граничные значения (также обозначаемые через f) для которых выполняется (4). Обратно, если f удовлетворяет (4), то существует гармоническое продолжение f на $\mathbf{R}^2_+$, которое удовлетворяет условию (3). (См. об этом [2], [3]).

Классы H^p_w в круге $\mathbf{D}$ определяются аналогично.

Через $\Gamma_\alpha(x)$ обозначаем конус в $\mathbf{R}^2_+$ с вершиной в точке $x\in\mathbf{R}$ и раствором угла $\alpha>0$

$$\Gamma_\alpha(x)=\{(t,y)\in\mathbf{R}^2_+ : |t-x|<\alpha y\}.$$

Пусть, далее, $\mathbf{D}=\bigcup\limits_k Q_k$ — разбиение круга $\mathbf{D}$ на диадические прямоугольники Q_k, некоторым образом занумерованные.

Введем теперь, следуя работам [4], [5], [6], нужные нам операторы. Каждый из них мы определяем либо для $\mathbf{D}$, либо для $\mathbf{R}^2_+$, однако подразумеваем, что понятно их определение в другом случае.

Пусть f гармонична и принадлежит классу H^p_w (в круге или полуплоскости). Будем пользоваться следующими обозначениями:

$$g_q(f)(\theta)=\left\{\int\limits_0^1(1-r)^{q-1}|\nabla f(re^{i\theta})|^q\,dr\right\}^{1/q},\quad 2\leqslant q\leqslant\infty;$$

$$G_q(f)(\theta)=\left\{\int_0^1 |\nabla f(re^{i\theta})|^q\, d\mu(r)\right\}^{1/q}, \qquad 2\leqslant q<\infty,$$

$$S(f)(x)=\left\{\iint_{\Gamma_\alpha(x)} |\nabla f(t,y)|^2 dt dy\right\}^{1/2},$$

$$g_\lambda^*(f)(x)=\left\{\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{y}{|x-t|+y}\right)^\lambda |\nabla f(t,y)|^2\, dt dy\right\}^{1/2}, \qquad \lambda>1,$$

$$g_{q,*}(f)(\theta)=\left\{\int_0^1 (1-r)^{q-1}\sup_{\xi\in Q_{re^{i\theta}}} |\nabla f(\xi)|^q\, dr\right\}^{1/q}, \qquad 2\leqslant q\leqslant\infty,$$

где $Q_{re^{i\theta}}$ — тот куб из разложения $D=\bigcup_k Q_k$, который содержит точку $z=re^{i\theta}\in D$.

Локально интегрируемой на R^1 функции f сопоставляется максимальная функция Харди-Литтльвуда f^*:

$$f^*(x)=\sup_{h>0}\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(y)|\, dy.$$

Теорема A. (Muckenhoupt, [7], [3]). Пусть $1<p<\infty$. Неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f^*(x))^p\, w(x)\, dx\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, w(x)\, dx$$

имеет место тогда и только тогда, когда $w\in A_p$.

Теорема B (Gundy, Wheeden, [2]). Пусть $f\in H^p_w(R^2_+)$, $1<p<\infty$. Тогда, если $w\in A_p$, то существуют константы C_1 и C_2, зависящие только от p и такие, что

$$C_1\|f\|^p_{p,w}\leqslant\int_{-\infty}^{\infty} S^p(f)(x)\, w(x)dx\leqslant C_2\|f\|^p_{p,w}.$$

Заметим, что на самом деле имеет место более сильное утверждение, однако для наших целей достаточно ограничиться этим случаем.

Теорема C (Muckenhoupt, Wheeden, [8]). Пусть $f\in H^p_w(R^2_+)$, $1<p<\infty$, $p>\frac{2}{\lambda}$. Если $w\in A_{\frac{p\lambda}{2}}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} (g_\lambda^*(f)(x))^p\, w(x)\, dx\leqslant C\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^p\, w(x)\, dx.$$

Теперь мы приведем несколько почти очевидных следствий из теорем A, B и C.

Предложение 1. a) *Пусть* $1<p<\infty$ *и* $f\in H^p_w(D)$. *Тогда если* $w\in A_p$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^p(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p\, w(\theta)\, d\theta. \tag{5}$$

b) *Если к тому же f нормирована условием* $f(0)=0$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi} g^p(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta. \tag{6}$$

Доказательство. Первое утверждение следует из теоремы B и из известного факта, что $g(f)(\theta)\leqslant CS(f)(\theta)$ (см. [9], стр. 108). Второе утверждение следует из первого и из неравенства (см. [9], стр. 102)

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{h(e^{i\theta})}\, d\theta\right| \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi} g_{(1)}(f)(\theta)\, g_{(1)}(h)(\theta)\, d\theta,$$

верного для достаточно „хороших“ функций f и h. Здесь

$$g_{(1)}(f)(\theta)=\left\{\int_0^1 (1-r)\left|\frac{\partial}{\partial r} f(re^{i\theta})\right|^2 dr\right\}^{1/2}.$$

Кроме того используется факт, что если $w\in A_p$, $1<p<\infty$, то $w^{-\frac{1}{p-1}}\in A_{p'}$, где $p'=\dfrac{p}{p-1}$ (см., напр., [2], [3]).

Предложение 2. *Если* $f\in H^p_w(D)$, $1<p<\infty$, $2\leqslant q\leqslant\infty$ *и* $w\in A_p$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^p_q(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p\, w(\theta)\, d\theta.$$

Доказательство. Случай $q=2$—это предложение 1 a). Рассмотрим случай $q=\infty$. Имеем

$$g_\infty(f)(\theta)=\sup_{0<r<1}(1-r)\,|\nabla f(re^{i\theta})| \leqslant C\sup_{0<r<1}|f(re^{i\theta})| \leqslant Cf^*(e^{i\theta}),$$

где первое неравенство следует из оценок ядра Пуассона, а второе—известный факт (см., напр., [9], стр. 77). Таким образом, по теореме A

$$\int_{-\pi}^{\pi} g^p_\infty(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}(f^*(e^{i\theta}))^p\, w(\theta)\, d\theta \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})|^p\, w(\theta)\, d\theta.$$

Общее утверждение для любого q, $2 \leqslant q \leqslant \infty$, следует теперь из интерполяционных теорем типа Рисса—Торина. Самый подходящий для нас вариант этой теоремы содержится в [10].

3°. В этом пункте мы докажем весовые неравенства для оператора $G_q(f)$. Начнем, однако, со вспомогательных оценок оператора $g_{q,*}(f)$.

Лемма 1. *Для операторов* $g_*(f) \equiv g_{2,*}(f)$ *и* $g^*(f) \equiv g_2^*(f)$ *имеет место поточечная оценка почти всюду*

$$g_*(f)(x) \leqslant Cg^*(f)(x).$$

Доказательство. Пусть Q — некоторый диадический прямоугольник в $\mathbf{R}^2_+$, содержащий фиксированную точку $z=(x, y)$. Тогда ясно, что $\frac{1}{2} y \leqslant \operatorname{dist}(Q, \mathbf{R}) \leqslant 2y$. Пусть $\zeta = (\xi, \eta)$ — некоторая другая точка в Q. Тогда, так как градиент гармонической функции есть гармонический вектор, будем иметь по формуле Пуассона

$$\nabla f(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \nabla f\left(t, \frac{y}{4}\right) \frac{\eta - \frac{1}{4} y}{|\xi - t|^2 + \left(\eta - \frac{1}{4} y\right)^2} dt.$$

Отсюда, по неравенству Коши и из того факта, что при $\zeta \in Q$ имеем

$$-\alpha\left(\eta - \frac{y}{2}\right) + |x-t| < |\xi - t| < |x-t| + \alpha\left(\eta - \frac{y}{2}\right)$$

и

$$\frac{3}{4} y \leqslant \eta - \frac{1}{4} y \leqslant \frac{5}{4} y,$$

получим

$$|\nabla f(\zeta)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \nabla f\left(t, \frac{y}{4}\right) \right|^2 \frac{\eta - \frac{1}{4} y}{|\xi - t|^2 + \left(\eta - \frac{1}{4} y\right)^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} \left| \nabla f\left(t, \frac{y}{4}\right) \right|^2 \frac{y}{|x-t|^2 + y^2} dt \leqslant$$

$$\leqslant C \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla f(t, y)|^2 \frac{y}{|x-t|^2 + y^2} dt.$$

Взяв sup в левой части по всем $\zeta \in Q$ и проинтегрировав по мере $y dy$, получим

$$g_*^2(f)(x) = \int_0^{\infty} y \sup_{\zeta \in Q_{x, y}} |\nabla f(\zeta)|^2 dy \leqslant$$

$$< C\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla f(t,y)|^2\frac{y^2}{|x-t|^2+y^2}\,dtdy \leqslant C\,(g^*(f)(x))^2.$$

Лемма 2. *Для оператора $g_{\infty,*}(f)$ имеет место поточечная оценка почти всюду*

$$g_{\infty,*}(f)(x) < Cf^*(x).$$

Доказательство почти очевидно:

$$g_{\infty,*}(f)(x) = \sup_{y>0}\sup_{\zeta\in Q(x,y)} y|\nabla f(\zeta)| \leqslant C\sup_{y>0}\sup_{\zeta\in Q(x,y)}|f(\zeta)| \leqslant$$

$$\leqslant C\sup_{\zeta\in\Gamma_\alpha(x)}|f(\zeta)| \leqslant Cf^*(x),$$

так как все прямоугольники $Q_{(x,y)}$ из диадического разбиения, содержащие точку (x, y), лежат в некотором фиксированном конусе $\Gamma_\alpha(x)$ с вершиной $x\in\mathrm{R}$.

Теорема 1. *Пусть* $f\in H^p_w(\mathrm{R}^2_+)$, $1<p<\infty$ *и* $2\leqslant q<\infty$. *Тогда если* $w\in A_p$, *то*

$$\|g_{q,*}(f)\|_{p,w} \leqslant C\|f\|_{p,w}.$$

Доказательство является простым следствием лемм 1 и 2 и теоремы C, а также уже упомянутой интерполяционной теоремы типа Рисса-Торина из [10].

Перейдем теперь к оценкам функции

$$G^q_\mu(f)(\theta) = \int_0^1|\nabla f(re^{i\theta})|^q\,d\mu(r).$$

Относительно меры $d\mu$, участвующей в определении этого оператора, будем предполагать, что для любого отрезка $[a, 1]$, $0\leqslant a<1$, имеет место неравенство

$$\int_a^1 d\mu(r) \leqslant C(1-a)^q \qquad \mathrm{C}\,(\mathrm{q})$$

Заметим, что из этого условия следует, что если (a, b) — некоторый интервал в $[0, 1]$ и если величины $b-a$ и $1-a$ соизмеримы, то

$$\int_a^b d\mu(r) \leqslant C(b-a)^q.$$

Это обстоятельство будет использовано нами при доказательстве теоремы 2 неоднократно.

Теорема 2. а) *Если для любой функции* $f\in H^p_w(\mathrm{D})$ *выполняется неравенство*

$$\|G_q(f)\|_{p,w} \leqslant C\|f\|_{p,w},$$

то мера $d\mu$ *удовлетворяет условию* $C(q)$, $2\leqslant q<\infty$.

b) *Если* $2\leqslant q=p<\infty$, μ *удовлетворяет условию* $C(p)$, *а весовая функция принадлежит классу* A_p, *то*

$$\|G_p(f)\|_{p,w}\leqslant C\|f\|_{p,w}.$$

c) *Если* $2<q<p<\infty$, $\mu\in C(q)$, *а* $w\in A_p$, *то*

$$\|G_q(f)\|_{p,w}\, C\leqslant\|f\|_{p,w}.$$

d) *Если* $1<p<q$, $q>2$, $\mu\in C(q)$, $w\in A_q$, *и если предположить дополнительно, что* f *аналитична в* D, *то*

$$\|G_q(f)\|_{p,w}<C\|f\|_{p,w}.$$

Доказательство. a) Здесь мы можем просто сослаться на пункт i) теоремы 2 из [6].

b) Пусть теперь $p=q\geqslant 2$ и $D=\bigcup_k Q_k$ — диадическое разбиение круга D. Обозначим через δ_k длину стороны куба и через I_k—основание Q_k. Пусть также $m_w(I)=\int\limits_I w(\theta)\,d\theta$. Тогда имеем

$$\|G_p(f)\|_{p,w}=\int\limits_{-\pi}^{\pi}w(\theta)\,d\theta\int\limits_0^1|\nabla f(re^{i\theta})|^p\,d\mu(r)=$$

$$=\iint\limits_D|\nabla f(re^{i\theta})|^p\,w(\theta)\,d\mu(r)\,d\theta=\sum_k\iint\limits_{Q_k}|\nabla f(re^{i\theta})|^p\,w(\theta)\,d\mu(r)\,d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\sum_k\sup_{\zeta\in Q_k}|\nabla f(\zeta)|^p\iint\limits_{Q_k}w(\theta)\,d\mu(r)\,d\theta\leqslant C\sum_k\sup_{\zeta\in Q_k}|\nabla f(\zeta)|^p\,\delta_k^p\int\limits_{I_k}w(\theta)\,d\theta=$$

$$=C\sum_k\sup_{\zeta\in Q_k}|\nabla f(\zeta)|^p\,\delta_k^p\,m_w(I_k),\tag{7}$$

так как μ удовлетворяет условию $C(p)$.

С другой стороны, по теореме 1, если $w\in A_p$, то

$$\|f\|_{p,w}^p>C\|g_{p,\Phi}\|_{p,w}^p=\int\limits_{-\pi}^{\pi}w(\theta)\,d\theta\int\limits_0^1(1-r)^{p-1}\sup_{\zeta\in Q_{re^{i\theta}}}|\nabla f(\zeta)|^p\,dr=$$

$$=\sum_k\sup_{\zeta\in Q_k}|\nabla f(\zeta)|^p\,(1-r)^{p-1}\,w(\theta)\,d\theta dr=$$

$$=\sum_k\sup_{\zeta\in Q_k}|\nabla f(\zeta)|^p\iint\limits_{Q_k}(1-r)^{p-1}\,w(\theta)\,d\theta dr=$$

$$=C\sum_k\sup_{\zeta\in Q_k}|\nabla f(\zeta)|^p\,\delta_k^p\,m_w(I_k).\tag{8}$$

Сопоставив (7) и (8), получим требуемое утверждение.

c) Пусть теперь $2\leqslant q<p<\infty$ и неотрицательная функция $\varphi(\theta)$ принадлежит классу $L^{p/p-q}(T,\, w^{-q/p-q}(\theta)\,d\theta)$, $\|\varphi\|\leqslant 1$. Тогда имеем

$$I_f \equiv \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\, G_q^q(f)(\theta)\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^1 \varphi(\theta)\, |\nabla f(re^{i\theta})|^q\, d\mu(r)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \sup_{\zeta\in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^q \iint_{Q_k} d\mu(r)\, \varphi(\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_k \sup_{\zeta\in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^q\, \delta_k^q \int_{I_k} \varphi(\theta)\, d\theta. \tag{9}$$

Но

$$\delta_k^q \int_{I_k} \varphi(\theta)\, d\theta = C \iint_{Q_k} (1-r)^{q-1}\, \varphi(\theta)\, d\theta dr,$$

поэтому можно продолжить неравенство (9). Получим

$$I_f \leqslant C \sum_k \iint_{Q_k} \sup_{\zeta\in Q_k} |\nabla f(\zeta)|^q (1-r)^{q-1}\, \varphi(\theta)\, d\theta dr =$$

$$= C \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta)\, g_{q,*}^q(f)(\theta)\, w^{q/p}(\theta)\, w^{-q/p}(\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\int_{-\pi}^{\pi} g_{p,*}^q(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta\right)^{q/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi(\theta))^{p/p-q}\, w^{-q/p-q}(\theta)\, d\theta\right)^{p-q/p} \leqslant$$

$$\leqslant C \|f\|_{p,w}^q \cdot \|\varphi\|_{\frac{p}{p-q},\, w^{-\frac{q}{p-q}}} \leqslant C \|f\|_{p,w}^q,$$

где предпоследнее неравенство следует из теоремы 1, если $w \in A_p$.

Беря sup по всем таким φ, получим

$$\|G_q(f)\|_{p,w} \leqslant C \|f\|_{p,w},$$

если только $w \in A_p$.

d) Пусть, наконец, $1 < p < q$, $q > 2$ и функция $f \in H_w^p$ аналитична. Предположим также, что f не имеет нулей в D. Тогда найдется аналитическая в D функция φ, $\varphi \in H_w^q(D)$ такая, что $f = \varphi^{q/p}$. Стало быть $f' = \dfrac{q}{p}\, \varphi^{q-p/p}\, \varphi'$ и

$$G_q(f)(\theta) = G_q(\varphi^{q/p})(\theta) =$$

$$\left\{ \frac{q}{p} \int_0^1 |\varphi(re^{i\theta})|^{\frac{q-p}{p}q} |\varphi'(re^{i\theta})|^q \cdot d\mu(r) \right\}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant C\, (\varphi^*(e^{i\theta}))^{q-p/p}\, G_q(\varphi)(\theta).$$

Имеем, далее, по неравенству Гельдера

$$\int_{-\pi}^{\pi} G_q^p(f)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta < C \int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^*(\theta))^{q-p}\, G_q^p(\varphi)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant C \left(\int_{-\pi}^{\pi} G_q^q(\varphi)(\theta)\, w(\theta)\, d\theta \right)^{p/q} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (\varphi^*(\theta))^q\, w(\theta)\, d\theta \right)^{\frac{q-p}{q}} \leqslant$$

$$\leqslant C \|\varphi\|_{q,w}^p \|\varphi\|_{q,w}^{q-p} = C \|\varphi\|_{p,w}^q,$$

в силу теоремы А и части b) настоящей теоремы, если $w \in A_q$. Но $\|\varphi\|_{q,w}^q = \|f\|_{p,w}^p$, следовательно

$$\|G_q(f)\|_{p,w} \leqslant C\|f\|_{p,w},$$

если $w \in A_q$.

Если f имеет нули в D, то напишем $f = f_1 + f_2$, $\|f_i\|_{p,w} \leqslant C\|f\|_{p,w}$ и f_i не имеет нулей в D, $i = 1, 2$.

Теорема полностью доказана.

Замечание 1. Теорема 2 верна и в гораздо более общей ситуации. Можно рассматривать меры μ, зависящие не только от радиуса, но также, как в [6], от аргумента. Однако мы ограничились этим случаем во избежание не относящихся к существу дела технических осложнений.

4°. В этом пункте мы приведем одно применение доказанных выше теорем. Именно, мы можем дать обобщение известной теоремы Марцинкевича—Михлина—Хёрмандера о мультипликаторах преобразований Фурье в случае весовых пространств.

Пусть m — ограниченная измеримая функция на R^n. Назовем ее мультипликатором для $L_w^p \equiv L^p(\mathrm{R}^n,\ w(x)\, dx)$, если

$$\int_{\mathrm{R}^n} |T_m f(x)|^p\, w(x)\, dx \leqslant C \int_{\mathrm{R}^n} |f(x)|^p\, w(x)\, dx,$$

где оператор T_m задается формулой

$$(T_m f)^\wedge(x) = m(x)\, \hat{f}(x),$$

а крышка означает преобразование Фурье (нужно только позаботиться, чтобы f принадлежала подходящему классу).

Множество всех мультипликаторов класса L_w^p обозначим через $M^p(w)$.

Теорема 3. *Пусть $m \in C^k$ на дополнении к началу координат в R^n, $k > \frac{n}{2}$ — целое. Пусть, далее*

$$\left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^\alpha m(x) \right| \leqslant C\, |x|^{-|\alpha|},\ |\alpha| < k, \tag{10}$$

для любого одночлена $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}$, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$. *Тогда если* $1<p<\infty, p>\frac{n}{k}$, $w\in A_p\cap A_{\frac{pk}{n}}$, *то* $m\in M^p(w)$.

Доказательство. Обозначим $F(x)=T_m f(x)$.

Тогда имеет место неравенство (см. [9], стр. 115)

$$g_{(1)}(F)(x)\leqslant C g_{\lambda}^{*}(f)(x) \tag{11}$$

при $\lambda=\frac{2k}{n}>1$.

С одной стороны, по предложению 1,

$$C\int\limits_{\mathbf{R}^n} g_{(1)}^{p}(F)(x)\,w(x)\,dx\geqslant\int\limits_{\mathbf{R}^n}|F(x)|^p\,w(x)\,dx=$$

$$=\int\limits_{\mathbf{R}^n}|T_m f(x)|^p\,w(x)\,dx,$$

если $w\in A_p$.

С другой стороны, по теореме C, если $w\in A_{\frac{pk}{n}}$, то

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}(g_{\lambda}^{*}(f)(x))^p\,w(x)\,dx\leqslant C\int\limits_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\,w(x)\,dx.$$

Сопоставив эти два неравенства, получим

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n}|T_m f(x)|^p\,w(x)\,dx\leqslant C\int\limits_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p\,w(x)\,dx,$$

если $w\in A_{\frac{pk}{n}}\cap A_p$, $1<p<\infty$, $p>\frac{n}{k}$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Предположение (10) можно заменить более слабыми предположениями

$$|m(x)|\leqslant C,\ \sup_{R>0} R^{2|\alpha|-n}\int\limits_{R<|x|<2R}\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} m(x)\right|^2 dx\leqslant C.\qquad |\alpha|\leqslant k.$$

Доказательство следует из того, что неравенство (11) справедливо и для таких функций (см. об этом [9], стр. 115).

Следствие 2. Если m удовлетворяет условиям теоремы 3 или следствия 1 и $m\in M^p(w)$ при некотором $p>1$, то m принадлежит также $M^q(w)$ при любом $q>p$. В частности, если $w\in A$, то $m\in M^p(w)$ при любом $p>1$.

Доказательство сразу следует из теоремы 3 и из того факта, что если $w\in A_r$, $r>1$, то $w\in A_s$ для всех s, $s>r$ (см., напр., [2], [3]).

Замечание 2. В процессе написания этой работы нам стало известно, что результат, более сильный, чем теорема 3, получен в работе [11]. Однако наш способ доказательства существенно отличается от способа этой работы и результат получается значительно проще.

Примечание при корректуре. Недавно мы узнали, что несколько иное доказательство теоремы 3 имеется также в работе D. S. Kurtz "Littlewood-Paley and multiplier theorems on weighted L^p spaces", Trans. Amer. Math. Soc., 259, № 1, 1980, 235—254.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.I.1981

Ա. Է. ՋՐԲԱՇՅԱՆ. Կշռային անհավասարություններ Լիթլվուդ-Պելիի տիպի օպերատորների և Ֆուրյեի ձևափոխությունների մուլտիպլիկատորների համար (*ամփոփում*)

Հոդվածում գտնված են անհրաժեշտ պայմաններ, որպեսզի Լիթլվուդ-Պելիի տիպի ընդհանուր օպերատորները անընդհատ լինեն $L^p(\omega)$ կշռային տարածություններում։ Պարզվում է, որ դրա համար բավարար է, որ ω կշռային ֆունկցիան բավարարի Մաքենհաուպտի հայտնի A_p պայմանին։ Բերված են նաև կիրառություններ Ֆուրյեի ձևափոխությունների մուլտիպլիկատորների վերաբերյալ։

A. E. DJRBASHIAN. *Weighted inequalities for Littlewood-Paley type operators and Fourier multipliers* (summary)

There are found in the paper sufficient conditions for general Littlewood-Paley functions to be bounded in weighted classes $L^p(\omega)$. It turns out that it is sufficient that the weight function satisfy the well-known Muckenhoupt condition A_p. Applications to Fourier multipliers are also given.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Зигмунд.* Тригонометрические ряды, М., «Мир», 1965, т. 1, 2.
2. *R. F. Gundy, R. L. Wheeden.* Weighted integral inequalities for the nontangential maximal function, Lusin area integral, and Walsh-Paley series, Stud. Math 49, № 2, 1974, 107—124.
3. *R. R. Coifman, C. Fefferman.* Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals, Stud. Math., 51, № 3, 1974, 241—250.
4. *A. Zygmund.* On certain integrals, Trans. Math. Soc., 55, 1944, 170—204.
5. *E. M. Stein.* On functions of Littlewood-Paley, Lusin and Marcikiewicz, Trans. Amer. Math. Soc., 88, 1958, 430—466.
6. *Н. А. Широков.* Некоторые обобщения теоремы Литтльвуда-Пэли. Записки науч. сем. ЛОМИ, 39. 1973, 162—175.
7. *B. Muckenhoupt.* Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function, Trans. Amer. Math. Soc., 165, 1972, 207—226.
8. *B. Muckenhoupt, R. L. Wheeden.* Norm inequalities for the Littlewood-Paley function g_λ^*, Trans. Amer. Math. Soc., 191, 1974, 95—111.
9. *И. Стейн.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир», 1973.
10. *А. Э. Джрбашян.* Весовая оценка для функции g_a Изв. АН Арм. ССР, «Математика», 14, № 5, 1979, 338—347.
11. *D. S. Kurtz, R. L. Wheeden.* Results on weighted norm inequalities for multipliers, Trans. Amer. Math. Soc., 255, 1979, 343—362.