ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 3, 1981 Математика

Б. Т. БАТИКЯН

ТОЧЕЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА НА РАВНОМЕРНОЙ АЛГЕБРЕ

Одной из основных проблем теории равномерных алгебр является вопрос о наличии аналитической структуры в пространстве $M(A)$ комплексных гомоморфизмов данной равномерной алгебры A. Уже первые результаты в этом направлении показали, что решение вопроса тесно связано с понятием точечного дифференцирования. Так, например, известную теорему Вермера ([1], стр. 210) о вложении аналитических дисков можно сформулировать следующим образом: если в некоторой точке φ из пространства $M(A)$ равномерной алгебры Дирихле A существует непрерывное точечное дифференцирование первого порядка, то найдется такое непрерывное и взаимно-однозначное отображение τ единичного круга Δ в $M(A)$, что $\tau(0)=\varphi$ и любая функция вида $f\circ\tau$, где $f\in A$, голоморфна в Δ (см. также [2]). Согласно более общему результату Браудера [3] в пространство $M(A)$ равномерной алгебры A можно аналогичным образом вложить аналитическое множество из C^n, если только линейное пространство всех (непрерывных и разрывных) точечных дифференцирований первого порядка в точке φ — n-мерно.

В настоящее время опубликовано большое количество работ, посвященных точечным дифференцированиям. Можно указать, в частности, на [4], где в терминах аналитической емкости сформулирован критерий существования точечного дифференцирования в алгебре $R(X)$, порожденной рациональными функциями с полюсами вне компакта $X\subset C$; [5], [6], в которых изучаются нелокальные точечные дифференцирования; [7], [8], посредством точечного дифференцирования описывающие подалгебры конечной коразмерности.

Точечные дифференцирования высших порядков естественно возникают при попытке продолжения дифференцирования первого порядка на алгебру A с ее подалгебры конечной коразмерности. В настоящей работе изучаются подобного рода дифференцирования на равномерной алгебре, при этом для простоты мы ограничиваемся случаем дифференцирования второго порядка. Большинство результатов работы было анонсировано в заметке [9].

Алгебраические свойства точечных дифференцирований высших порядков исследовались в [10], [11].

1°. В этом пункте мы напомним известные определения и зафиксируем обозначения.

Равномерная алгебра A на компактном пространстве X — это замкнутая подалгебра алгебры $C(X)$ всех непрерывных комплексно-значных функций на X, содержащая постоянные и разделяющая точки X. Через $M(A)$ обозначается совокупность всех нетривиальных гомоморфизмов A в поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел. (Комплексный гомоморфизм автоматически непрерывен). Множество $M(A)$ является компактным пространством в слабо* топологии, причем X гомеоморфно вкладывается в $M(A)$, а любая функция $f \in A$ „аналитически" продолжается с X на все $M(A)$.

Каждому гомоморфизму $\varphi \in M(A)$ соответствует такая положительная регулярная борелевская мера μ на X, что $\varphi(f) = \int\limits_X f\,d\mu$ для любого $f \in A$. Мера μ называется представляющей мерой для φ и, вообще говоря, определяется не единственным образом. Выпуклое множество всех представляющих φ положительных мер мы будем обозначать через $M_\varphi(X)$.

Пусть ν — конечная комплексная регулярная борелевская мера на X, $|\nu|$ — ее полная вариация. Тогда $\nu = F|\nu|$, где $|F| = 1$ почти всюду по мере $|\nu|$ на X. Через $\operatorname{supp}|\nu|$ обозначается носитель меры $|\nu|$, т. е. дополнение объединения тех открытых подмножеств $U \subset X$, для которых $|\nu|(U) = 0$.

Поскольку равномерная алгебра A содержится в $L^\infty(|\nu|) = (L^1(|\nu|))^*$, то мы можем рассмотреть пространство $H^\infty(|\nu|)$ — слабо* замыкание A в $L^\infty(|\nu|)$. По определению ограниченная измеримая функция G принадлежит $H^\infty(|\nu|)$, если для любой функции $m \in L^1(|\nu|$ число $\int\limits_X Gm\,d|\nu|$ является предельной точкой для множества

$$\left\{\int\limits_X fm\,d|\nu|,\ f \in A\right\}.$$

Если $\mu \in M_\varphi(X)$, то $H^\infty(\mu)$ суть банахова подалгебра $L^\infty(\mu)$.

Ядро J_φ гомоморфизма $\varphi \in M(A)$ образует максимальный идеал в алгебре A. Для любых идеалов J, I алгебры A через IJ обозначается линейное пространство, порожденное попарными произведениями вида gf, где $g \in I$, $f \in J$.

Линейный непрерывный функционал $\psi \in A^*$ называется точечным дифференцированием первого порядка в точке $\varphi \in M(A)$, если $\psi(f_1 f_2) = \psi(f_1)\varphi(f_2) + \psi(f_2)\varphi(f_1)$ для любых $f_1, f_2 \in A$. Для существования в точке φ нетривиального точечного дифференцирования первого порядка необходимо и достаточно, чтобы $J_\varphi \neq \overline{J_\varphi^2}$. Другими словами, пространство $\Omega(A, \varphi)$ всех точечных дифференцирований на A в точке φ изоморфно фактор-пространству $J_\varphi / \overline{J_\varphi^2}$. Например, если $x_0 \in X$ является точкой пика для A, то согласно факторизационной теореме Коэна [12] $J_{x_0} = J_{x_0}^2$, так что в точке пика не существует даже разрывных точечных дифференцирований.

2°. Пусть A — равномерная алгебра на X. Функционал $\Phi \in A^*$ называется точечным дифференцированием второго порядка в точке $\varphi \in M(A)$ относительно $\psi \in \Omega(A, \varphi)$, если

$$\Phi(f_1 f_2) = \Phi(f_1)\varphi(f_2) + \Phi(f_2)\varphi(f_1) + \psi(f_1)\psi(f_2) \tag{1}$$

для всех $f_1, f_2 \in A$.

Положим $I_\varphi = J_\varphi \cap \ker\psi$. Если дифференцирование Φ нетривиально, то, очевидно, $\overline{I_\varphi J_\varphi} \neq \overline{J^2_\varphi}$. Следующая теорема устанавливает достаточность этого условия.

Теорема 1. *Предположим, что гомоморфизм $\varphi \in M(A)$ и дифференцирование $\psi \in \Omega(A, \varphi)$ таковы, что $\overline{I_\varphi J_\varphi} \neq \overline{J^2_\varphi}$. Тогда в точке φ относительно ψ существует ненулевое точечное дифференцирование второго порядка.*

Доказательство. Согласно предположениям теоремы найдется функционал $\Phi \in A^*$, удовлетворяющий условиям $\mathbf{C} + I_\varphi J_\varphi \subset \ker\Phi$ и $\Phi|J^2_\varphi \neq 0$. Выберем функцию $f_0 \in J_\varphi$ таким образом, чтобы $\psi(f_0) = 1$. Тогда произвольный элемент $f \in A$ можно записать в виде $f = g + \psi(f) f_0$, где $g \in \ker\psi$. Поэтому $\Phi(f_0^2) \neq 0$, и мы можем считать, что $\Phi(f_0^2) = 1$. Наконец, заменив в случае необходимости функцию f_0 на $f_0 + \lambda g_0$, где $g_0 \in I_\varphi$ и $\lambda \in \mathbf{C}$ выбраны надлежащим образом, можно утверждать, что $\Phi(f_0) = 0$.

Рассмотрим теперь произвольные элементы $f_1 = g_1 + \psi(f_1) f_0$ и $f_2 = g_2 + \psi(g_2) f_0$ алгебры A. Тогда

$$f_1 f_2 = (g_1 - \varphi(g_1))(g_2 - \varphi(g_2)) + g_1\varphi(g_2) + g_2\varphi(g_1) - \varphi(g_1)\varphi(g_2) +$$

$$+ \psi(f_1)(g_2 - \varphi(g_2)) f_0 + \psi(f_1)\varphi(g_2) f_0 + \psi(f_2)(g_1 - \varphi(g_1)) f_0 +$$

$$+ \psi(f_2)\varphi(g_1) f_0 + \psi(f_1)\psi(f_2) f_0^2.$$

Отсюда сразу следует равенство (1).

Замечание. Аналогично можно доказать, что условие $\overline{I^2_\varphi} \neq \overline{I^2_\varphi + J^3_\varphi}$ необходимо и достаточно для существования точечного дифференцирования третьего порядка.

Из определения (1) сразу следует, что точечное дифференцирование второго порядка анулирует все постоянные функции. Оказывается, аналогичное обстоятельство имеет место и для вещественных функций из A.

Теорема 2. *Пусть Φ — точечное дифференцирование второго порядка на равномерной алгебре A. Если функция $g \in A$ принимает вещественные значения на X, то $\Phi(g) = 0$.*

Доказательство. Замкнутое подмножество E компакта X называется множеством антисимметрии алгебры A, если каждая функция из A, принимающая вещественные значения на E, постоянна на этом множестве. Теорема Шилова-Бишопа ([1], стр. 87) устанавливает, что компакт X разбивается на совокупность $\{E_\alpha\}$ максимальных множеств антисимметрии, и если непрерывная функция h на каждом множестве E_α совпадает с некоторым элементом алгебры A, то $h \in A$.

Пусть функция $g \in A$ принимает на X только вещественные значения. Тогда g постоянна на каждом множестве E_α. В алгебре A выделим подалгебру $B = \{f \in A: \Phi(f) = \psi(f) = 0\}$ коразмерности 2. Согласно [13] каждое E_α служит максимальным множеством антисимметрии и для алгебры B. Следовательно, по теореме Шилова-Бишопа $g \in B$ и, в частности, $\Phi(g) = 0$.

В работе [14] доказано, что любое точечное дифференцирование первого порядка допускает интегральное представление, обобщающее классическую формулу Коши. Как показывает теорема 3 (см. также пример 1), для дифференцирований высших порядков возможность такого рода представления существенно зависит от нормы данного дифференцирования.

Теорема 3. *Пусть A — равномерная алгебра на X, и Φ — точечное дифференцирование второго порядка в точке $\varphi \in M(A)$ относительно $\psi \in \Omega(A, \varphi)$. Тогда следующие два условия эквивалентны*:

1) $\|\Phi\| = \|\psi\|^2$;

2) *существует мера $\mu \in M_\varphi(X)$ и функция $G \in H^\infty(\mu)$, ($|G| = 1$ почти всюду на X по мере μ) такие, что для всех $f \in A$*

$$\psi(f) = \|\psi\| \int\limits_X f\bar{G}\, d\mu \quad \text{и} \quad \Phi(f) = \|\Phi\| \int\limits_X f\bar{G}^2\, d\mu. \tag{2}$$

Прежде чем доказывать теорему отметим, что норма любого функционала $\psi \in \Omega(A, \varphi)$ совпадает с нормой его сужения на идеал J_φ. Действительно, если бы существовала такая функция $f \in A$, что $\|f\| < 1$, $\varphi(f) \neq 0$ и $|\psi(f)| > \|\psi| J_\varphi\|$, то мы (рассуждая стандартным образом) могли бы рассмотреть функцию

$$g = (f - \varphi(f))(1 - \overline{\varphi(f)}\, f)^{-1} \in J_\varphi,\ \|g\| < 1,$$

для которой $|\psi(g)| \geqslant \|\psi| J_\varphi\|$.

Доказательство теоремы 3. Пусть $\|\Phi\| = \|\psi\|^2$. По теореме Рисса найдется, вообще говоря, комплексная мера ν на X, представляющая функционал Φ и удовлетворяющая условию $\|\Phi\| = \int\limits_X d|\nu|$. Выберем последовательность $\{g_n\} \subset J_\varphi$, $\|g_n\| \leqslant 1$ таким образом, чтобы $\psi(g_n) \to \|\psi\|$, и пусть $G \in H^\infty(|\nu|)$, $|G| \leqslant 1$, — слабо* точка прикосновения последовательности $\{g_n\}$. Ясно, что из последовательности $\{g_n\}$ можно извлечь такие подпоследовательности $\{g_{n_k}\}$ и $\{g_{n_m}\}$, чтобы $\int\limits_X g_{n_k} g_{n_m}\, d\nu \to \int\limits_X G^2\, d\nu$ при $k, m \to \infty$. Но по формуле (1)

$$\int\limits_X g_{n_k} g_{n_m} d\nu = \Phi(g_{n_k} g_{n_m}) = \psi(g_{n_k})\,\psi(g_{n_m}) \to \|\psi\|^2 = \|\Phi\|,$$

т. е.

$$\|\Phi\| = \int\limits_X d|\nu| = \int\limits_X G^2\, d\nu.$$

Отсюда следует, что $|G| = 1$ почти всюду на X по мере $|\nu|$.

Рассмотрим на X положительную меру $\mu = \frac{G^2\nu}{\|\Phi\|}$, полная вариация которой равна 1. Если $f \in J_\varphi$, то

$$\int\limits_X f d\mu = \lim \frac{1}{\|\Phi\|} \int\limits_X f g_{n_{k'}} g_{n_{m'}} d\nu = \lim \frac{1}{\|\Phi\|} \Phi(f g_{n_{k'}} g_{n_{m'}}) = 0.$$

Последнее означает, что $\mu \in M_\varphi(X)$. Таким образом, $\Phi(f) = \|\Phi\| \int\limits_X f\bar{G}^2\, d\mu$, для любого $f \in A$. Остается доказать первое из равенств (2).

Представим функцию f в виде $f = g + \psi(f) f_0 + \varphi(f)$, где $g \in I_\varphi = J_\varphi \cap \ker \psi$, $f_0 \in J_\varphi$ и $\psi(f_0) = 1$. Тогда

1) $$\|\psi\| \int\limits_X g\bar{G}\, d\mu = \frac{1}{\|\psi\|} \int\limits_X gG d\nu = \frac{1}{\|\psi\|} \lim \int\limits_X g g_n\, d\nu = \frac{1}{\|\psi\|} \lim \Phi(g g_n) = 0,$$

поскольку $g g_n \in I_\varphi J_\varphi$;

2) $$\|\psi\|\,\psi(f) \int\limits_X f_0 \bar{G} d\mu = \frac{\psi(f)}{\|\psi\|} \int\limits_X f_0 G d\nu = \frac{\psi(f)}{\|\psi\|} \lim \Phi(f_0 g_n) = \frac{\psi(f)}{\|\psi\|} \times$$

$$\times \lim \psi(g_n) = \psi(f);$$

3) $$\|\psi\|\,\varphi(f) \int\limits_X \bar{G} d\mu = \|\psi\|\,\varphi(f)\, \overline{\int\limits_X G\, d\mu} = \|\psi\|\,\varphi(f) \lim \overline{\int\limits_X g_n\, d\mu} = 0,$$ поскольку $\mu \in M_\varphi(X)$.

Итак, $\psi(f) = \|\psi\| \int\limits_X f\bar{G}\, d\mu$ для любого $f \in A$.

Предположим теперь, что при некоторых $\mu \in M_\varphi(X)$ и $G \in H^\infty(\mu)$, $|G| \leqslant 1$, справедливы равенства (2). Вновь рассмотрим последовательность $\{g_n\} \subset J_\varphi$, $\|g_n\| \leqslant 1$, на которой $\psi(g_n) \to \|\psi\|$, и функцию $F \in H^\infty(\mu)$, являющуюся предельной для последовательности $\{g_n\}$ в смысле слабо* сходимости. Поскольку

$$\|\psi\| \int\limits_X F\bar{G}\, d\mu = \lim \int\limits_X g_n \bar{G}\, d\mu = \lim \psi(g_n) = \|\psi\| \int\limits_X d\mu,$$

то $F=G$ почти всюду по мере μ. Выберем далее такую подпоследовательность $g_{n_k}\, g_{n_m}$, чтобы

$$\int\limits_X g_{n_k}\, g_{n_m}\, \overline{G}^2\, d\mu \to \int\limits_X F^2\, \overline{G}^2\, d\mu = 1.$$

Следовательно, $\Phi\,(g_{n_k}\, g_{n_m}) \to \|\Phi\|$. С другой стороны, по формуле (1) $\Phi\,(g_{n_k}\, g_{n_m}) \to \|\psi\|^2$.

Замечание. Пусть Φ_n — точечное дифференцирование n-го порядка в точке φ, т. е.

$$\Phi_n\,(f_1 f_2) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_k\,(f_1)\, \Phi_{n-k}\,(f_2),$$

где Φ_k $(k \geqslant 1)$ — точечное дифференцирование порядка k, $\Phi_0 = \varphi$. Для того чтобы имело место представление вида

$$\Phi_k\,(f) = \|\Phi_k\| \int\limits_X f \overline{G}^k\, d\mu,\quad 0 \leqslant k \leqslant n,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\|\Phi_n\| = \|\Phi_1\|^n$.

3°. В этом пункте мы рассмотрим два примера. Первый из них иллюстрирует теорему 3 на алгебре голоморфных функций. Второй пример касается вопроса существования точечных дифференцирований высших порядков во „внутренней" точке из $M(A) \setminus X$.

Пример 1. Пусть D — ограниченная односвязная область в $\mathbf{C}$, совпадающая с внутренностью своего замыкания, и $A\,(D)$ — алгебра всех непрерывных на $\overline{D}$ и голоморфных внутри D функций. Каждой точке $\lambda \in D$ можно сопоставить функционалы ψ_λ и Φ_λ, определенные на $A\,(D)$ и являющиеся значениями производных (соответственно, первого и второго порядка) в точке λ: $\psi_\lambda\,(f) = f'\,(\lambda)$ и $\Phi_\lambda\,(f) = \dfrac{f''\,(\lambda)}{2}$, $f \in A\,(D)$. Очевидно, $\psi_\lambda \in \Omega\,(A\,(D),\, \lambda)$, а Φ_λ — точечное дифференцирование второго порядка относительно ψ_λ. Спрашивается, всегда ли существует такая точка $\lambda_0 \in D$, для которой $\|\Phi_{\lambda_0}\| = \|\psi_{\lambda_0}\|^2$?

Прежде всего отметим, что $A\,(D)$ является равномерной алгеброй Дирихле на границе ∂D области D. Поэтому: 1) каждая точка $\lambda \in D$ обладает единственной положительной представляющей мерой μ_λ на ∂D; $H^\infty\,(\mu_\lambda) = H^\infty\,(D)$ ([1], стр. 200); 3) пространство $\Omega\,(A\,(D), \lambda)$ одномерно [2]; 4) все точки границы ∂D являются точками пика для $A\,(D)$.

Поскольку $\|\psi_\lambda\|_{A(D)} = \|\psi_\lambda\|_{H^\infty(D)}$, то функция $G \in H^\infty\,(D)$, фигурирующая в формулировке теоремы 3, есть не что иное, как функция Римана, конформно отображающая D на единичный круг и удовлетворяющая условиям: $G(\lambda) = 0$, $G'\,(\lambda) = \|\psi_\lambda\| > 0$. Рассмотрим теперь на $A\,(D)$ функционал

$$\Phi_\lambda': f \to \|\psi_\lambda\|^2 \int_{\partial D} f\overline{G}^2\, d\mu_\lambda,$$

являющийся точечным дифференцированием второго порядка в точке λ относительно ψ_λ, причем $\|\Phi_\lambda'\| = \|\psi_\lambda\|^2$ (см. теорему 3). Очевидно, $\Phi_\lambda - \Phi_\lambda'$ — дифференцирование первого порядка, и, в силу одномерности пространства $\Omega(A(D), \lambda)$, $\Phi_\lambda = \Phi_\lambda' + c\psi_\lambda$. Более того, поскольку

$$\Phi_\lambda'(G) = \|\psi_\lambda\|^2 \int_{\partial D} \overline{G} d\mu_\lambda = \|\psi_\lambda\|^2\, \overline{G(\lambda)} = 0,$$

то $c = \dfrac{G''(\lambda)}{2\|\psi_\lambda\|}$.

Другими словами, условия $\|\Phi_\lambda\| = \|\psi_\lambda\|^2$ и $G''(\lambda) = 0$ эквивалентны, и теперь наш вопрос можно сформулировать в следующем виде. Пусть D—такая односвязная ограниченная область в $\mathbb{C}$, что $\mathrm{int}(\overline{D}) = D$. Каждой точке $\lambda \in D$ сопоставим функцию $G_\lambda(z)$, конформно отображающую D на единичный круг и удовлетворяющую условиям: $G_\lambda(\lambda) = 0$, $G_\lambda'(\lambda) > 0$. Спрашивается, существует ли хотя бы одна точка $\lambda_0 \in D$, для которой $G_{\lambda_0}''(\lambda_0) = 0$? (Например, если область D есть круг, то непосредственно проверяется, что подобная точка единственна и совпадает с центром круга).

Предварительно докажем следующую простую лемму.

Лемма 1. *Если λ стремится к ∂D, то функция* $k(\lambda) = \|\psi_\lambda\| \to \infty$.

Доказательство. Предположим противное и выберем последовательность $\{\lambda_n\} \subset D$ таким образом, чтобы: 1) $\lambda_n \to \xi \in \partial D$, 2) последовательность $k(\lambda_n)$ была ограниченной и, в силу этого 3) ψ_{λ_n} слабо* сходилась к функционалу $\psi \in A^*$. Поскольку $\psi_{\lambda_n} \in \Omega(A(D), \lambda_n)$, то, очевидно, $\psi \in \Omega(A(D), \xi)$. Но ξ является точкой пика для $A(D)$, поэтому $\psi = 0$, т. е. $\psi_{\lambda_n}(f) \to 0$ для любого $f \in A(D)$, что невозможно.

Из леммы вытекает существование точки $\lambda_0 \in D$, в которой функция $k(\lambda) = \|\psi_\lambda\|$ принимает минимальное значение. Если $G_{\lambda_0}(z)$ — функция Римана, соответствующая точке λ_0, то

$$k^2(z) = \frac{G_{\lambda_0}'(z)\overline{G_{\lambda_0}'(z)}}{(1 - G_{\lambda_0}(z)\overline{G_{\lambda_0}(z)})^2}.$$

(Конечно, $k^2(z)$ есть не что иное, как функция Бергмана для области D). Имеем

$$\left.\frac{\partial k^2(z)}{\partial z}\right|_{z=\lambda_0} = G_{\lambda_0}''(\lambda_0)\, G_{\lambda_0}'(\lambda_0) = 0.$$

Таким образом, $\|\Phi_{\lambda_0}\| = \|\psi_{\lambda_0}\|^2$ и согласно теореме 3,

$$f'(\lambda_0) = G_{\lambda_0}'(\lambda_0) \int_{\partial D} f\overline{G}_{\lambda_0} d\mu_{\lambda_0}, \quad f''(\lambda_0) = 2(G_{\lambda_0}'(\lambda_0))^2 \int_{\partial D} f\overline{G}^2_{\lambda_0} d\mu_{\lambda_0}$$

для всех $f \in A(D)$.

Замечание 1. Аналогичную задачу относительно конформных отображений можно сформулировать и для неограниченной области. Однако, если граница области содержит бесконечно удаленную точку, то подобной точки λ_0 может не существовать. Типичный пример — полуплоскость.

Замечание 2. Имея в виду интегральное представление точечного дифференцирования более высокого (скажем, третьего) порядка, можно также поставить вопрос о существовании такой точки $\lambda_0 \in D$ и конформного отображения G области D на единичный круг, что $G(\lambda_0)=0$, $G'(\lambda_0)>0$, $G''(\lambda_0)=G'''(\lambda_0)=0$. Вообще говоря, даже для ограниченной области (например, для области, ограниченной отрезком $[-1,1]$ вещественной оси и полуокружностью $|z|=1$, $\operatorname{Im} z>0$) такой точки может не существовать.

Если гомоморфизм φ равномерной алгебры A обладает единственной представляющей мерой, и пространство $\Omega(A, \varphi)$—нетривиально, то в точке φ будут существовать точечные дифференцирования любого порядка [2]. Ниже мы приводим пример равномерной алгебры B на компакте X, обладающей таким комплексным гомоморфизмом $\varphi_0 \in M(B)\setminus X$, что пространство $\Omega(B, \varphi_0)$ одномерно, однако в φ_0 не существует точечные дифференцирования второго порядка и выше.

Пример 2. Пусть равномерная алгебра A_1, реализованная на компакте Y, и точка $\varphi_1 \in M(A_1)\setminus Y$ таковы, что $\Omega(A_1, \varphi_1)=0$. (Общая схема построения такого рода алгебр дана в [1], стр. 226).

Обозначим через Δ единичный круг и рассмотрим совокупность непрерывных на $\Delta\times Y$ функций $f(z, y)$, удовлетворяющих условиям

а) $f(z, y_0) \in A(\Delta)$ при любом фиксированном $y_0 \in Y$;
б) $f(0, y)$ и $f'_z(0, y)$ принадлежат A_1.

Множество B образует равномерную алгебру на $\Delta\times Y$, причем $M(B)=$ $=\Delta\times Y \cup \{0\}\times M(A_1)$ [6].

Положим $\varphi_0=(0, \varphi_1)$. Тогда функционал $\psi_0: f\to \varphi_1(f'_z(0, y))$, очевидно, принадлежит $\Omega(B, \varphi_0)$.

Лемма 2. *Относительно точечного дифференцирования ψ_0 в алгебре B не существует нетривиального точечного дифференцирования второго порядка.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 1 нам достаточно доказать, что если Φ — дифференцирование второго порядка в точке φ_0 относительно ψ_0, то $\Phi(f)=0$ для любого $f \in J^2_{\varphi_0}$. Ясно, что функцию $f(z, y) \in J^2_{\varphi_0}$ можно представить в виде

$$f(z, y)=f_1(y)+z f_2(y)+z^2 g(y)+z^3 h(z, y),$$

где $f_1, f_2 \in J_{\varphi_1} \subset A_1$, а функции $g(y)$ и $h(z_0, y)$, вообще говоря, принадлежат $C(Y)$.

Отображение $\varkappa: g\to\Phi(z^2 g)$ является, очевидно, линейным непрерывным функционалом на пространстве $C(Y)$. Предположим, что комплексная мера ν на Y представляет $\varkappa$:

$$\varkappa(g)=\int\limits_Y g\,d\nu,\quad \|\varkappa\|=\int\limits_Y d\,|\nu|,$$

а функция $F\in L^{\infty}(|\nu|)$, являющаяся слабо* точкой прикосновения $C(Y)$, такова, что $|\nu|=F\nu$. Пусть y_0—произвольная точка из supp $|\nu|\subset Y$. Выберем функцию $f_0\in A_1$ таким образом, чтобы $f_0(y_0)=1$ и $\varphi_1(f_0)=0$. Тогда

$$\int\limits_Y |f_0|^2\,d\,|\nu|=\int\limits_Y f_0\,\overline{f_0}\,F\,d\nu=\lim\int\limits_Y f_0\overline{f_0}\,g_n\,d\nu=\lim\Phi\,(z^2 f_0\overline{f_0}\,g_n)=0,$$

так как $\Phi\,(z^2 f_0\overline{f_0}\,g_n)=\Phi\,(f_0\cdot z^2\,\overline{f_0}\,g_n)=0$ согласно (1) и выбору ψ_0 Однако интеграл $\int\limits_Y|f_0|^2\,d\,|\nu|$ равен нулю только в том случае, когда $|\nu|=0$, т. е. $\Phi=0$, поскольку $\Phi\,(f)=\Phi\,(z^2 g)$. Лемма доказана.

Замечание. Используя метод доказательства леммы 2, нетрудно показать, что любой функционал $\psi\in\Omega\,(B,\varphi_0)$ кратен ψ_0. Кроме того, легко убедиться, что на алгебре B в произвольной точке множества $\{0\}\times Y$ существуют дифференцирования любого порядка.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.IV.1980

Բ. Թ. ԲԱՏԻԿՅԱՆ. Երկրորդ կարգի կետային դիֆերենցումներ հավասարաչափ հանրահաշվի վրա *(ամփոփում)*

Ուսումնասիրվում են բարձր կարգի կետային դիֆերենցումները անընդհատ և հոլոմորֆ ֆունկցիաների հանրահաշիվների վրա։ Մասնավորապես, ստացված է Կոշու կլասիկ բանաձևին համանման ինտեգրալ ներկայացման գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայման։

B. T. BATIKIAN. *Point derivations of order 2 on uniform algebra* (summary)

In this note we study higher point derivations on algebras of continuous and holomorphic functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Т. Гамелин.* Равномерные алгебры, «Мир», М., 1973.
2. *S. Sidney.* Point derivations in certain sup-norm algebras, Trans. Amer. Math Soc., 131, 1968, 119—127.
3. *A. Browder.* Point derivations and analytic structure in the spectrum of a Banach algebra, J. Funct. Anal., 7, 1971, 156-164.
4. *A. Hallstrom.* On bounded point derivations and analytic capacity, J. Funct. Anal., 4, 1969, 153—165.
5. *А. Д. Варшавский.* Функциональная алгебра второй степени нелокальности. Мат. сб., 80, № 2, 1969, 266—280.
6. *Б. Т. Батикян, Е. А. Горин.* Замечание о нелокальных алгебрах, Иссл. по линейным операторам и теории функц., Труды научн. сем. ЛОМИ, 7, 1976, 172—177.
7. *Е. А. Горин.* Подалгебры конечной коразмерности, Мат. заметки, 6, № 3, 1969, 321—328.

8. *Б. Т. Батикян.* Подалгебры коразмерности 1 (некоммутативный случай), Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XII, № 5, 1977, 341—344.

9. *Б. Т. Батикян.* О точечных дифференцированиях второго и третьего порядка, ДАН Арм. ССР, XVI, № 5, 1978, 272—276.

10. *H. Dales, J. McClure.* Higher point derivations on commutative Banach algebras I J. Funct. Anal., 26, 1977, 166—189.

11. *H. Dales, J. McClure.* Higher point derevations on commutative Banach algebras II, J. Lond. Math. Soc., 16, 1977, 313—325.

12. *P. Cohen.* A note on constructive methods in Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 12, 1961, 159—163.

13. *Б. Т. Батикян.* Максимальные подалгебры равномерных алгебр, Изв. АН Арм. ССР, «Математика», XI, № 3, 1976, 229—236.

14 *J. Chaumat.* Derivations ponctuelles continues dans les algèbres de fonction C. R. Acad. Sci.. 269, 1969, 347—350.