

Փ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ

ЗАМКНУТЫЕ ИДЕАЛЫ В АЛГЕБРАХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ГЛАДКИХ ВПЛОТЬ ДО ГРАНИЦЫ

В в е д е н и е

1°. Пусть D — открытый единичный круг на комплексной плоскости, Γ — его граница. Обозначим через A множество всех функций f , непрерывных в $D \cup \Gamma$ и регулярных в D . Символом H^p обозначим пространство Харди в круге.

Положим еще:

$$a) \quad \lambda_{\omega}^{(n)} = \{f: f^{(n)} \in A, \omega(f^{(n)}, \delta) = o(\omega(\delta)), \delta \rightarrow 0\},$$

где $\omega(f^{(n)}, \delta)$ — модуль непрерывности $f^{(n)}$ в $\bar{D}$, $\omega(\delta)$ — неубывающая функция, удовлетворяющая условию $\omega(0) = 0$,

$$\int_0^{\delta} \frac{\omega(t)}{t} dt = O(\omega(\delta)), \quad (\delta \rightarrow 0), \quad (*)$$

$$\|h_{\omega}^{(n)}\| = \|f\| + \sup_{z_1, z_2 \in \bar{D}} \left\{ \frac{|f^{(n)}(z_1) - f^{(n)}(z_2)|}{\omega(|z_1 - z_2|)} \right\},$$

$$b) \quad H_{n+1}^p = \{f: f^{(n+1)} \in H^p, \|f\|_{H_{n+1}^p} = \max_{0 \leq k \leq n+1} \|f^{(k)}\|_{H^p}\}, \quad 1 < p < +\infty.$$

Легко видеть, что указанные пространства являются банаховыми алгебрами относительно поточечного умножения и сложения. Всюду в дальнейшем X будет обозначать одну из этих алгебр, причем ω удовлетворяет условию (*).

Для каждого $f \in X$ будем обозначать через G_f, F_f соответственно внутреннюю и внешнюю части f так, что $f = G_f F_f$, в свою очередь, $G_f = B_f S_f$, где B_f — произведение Бляшке, S_f — сингулярная внутренняя функция (см. [1]). Множество нулей функции f в открытом круге обозначим через $Z(f)$, через μ_f обозначим неотрицательную меру, определяющую S_f , $\text{supp } \mu_f$ — замкнутое множество на Γ , на котором сосредоточена мера μ_f . Для любого $f \in X$ будем обозначать $E_m(f)$ множество нулей функции f на Γ кратности выше m .

Определение. Пусть $G = BS$ — некоторая внутренняя функция, Z — множество нулей произведения Бляшке, μ — сингулярная мера, определяющая S . Пусть $E_0, E_1, \dots, E_n$ — замкнутые множества, удовлетворяющие условиям

$$E_0 \supset E_1 \supset \dots \supset E_n \supset \{\text{supp } \mu \cup \bar{Z} \cap \Gamma\},$$

E_0/E_n — изолированное множество. Будем обозначать через $I(G, E_0, \dots, E_n)$ множество элементов f из X , обладающих свойствами: G делит G_f и $E_m(f) \supset E_m$, $m = 0, 1, \dots, n$. Заметим, что I — замкнутый идеал в X , из основного результата статьи следует, что идеалами $I(G, E_0, E_1, \dots, E_n)$ исчерпываются все замкнутые идеалы X . Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть $I \neq \{0\}$ — замкнутый идеал в X , G_I — наибольший общий делитель внутренних частей функций из I

$$E_m(I) = \bigcap_{f \in I} E_m(f), \quad m = 0, 1, \dots, n. \quad (0.1)$$

Тогда

$$I = I(G_I, E_0(I), \dots, E_n(I)).$$

Замечание 1. Методика, применяемая при доказательстве теоремы 1, восходит к работам А. Бёрлинга [2] и У. Рудина [3], применялась в статьях [4] — [7]. Суть этой методики состоит в следующем. Пусть I — идеал в X и F — функционал, ортогональный I , тогда преобразования Коши функционала F :

$$\hat{F}(z) = F(e_z), \quad e_z(\zeta) = \frac{\zeta}{\zeta - z}, \quad |z| > 1$$

аналитично вне $Z(I) \cup E_0(I)$ и скорость роста $|\hat{F}|$ при приближении к $Z(I) \cup E_0(I)$ можно оценить исходя от пространства X^* .

Повтому идеалу I принадлежат все функции из X , быстро убывающие вблизи множества $Z(I) \cup E_0(I)$, так как

$$F(f) = \lim_{r \rightarrow 1+0} \int_{\Gamma} f(\zeta) \hat{F}(r\zeta) |d\zeta|.$$

Остается доказать, что подобные функции плотны в I .

Из результатов работы [7] непосредственно следует

Теорема 2. Пусть I , $Z(I) = \emptyset$ — замкнутый идеал в X , F — ортогональный идеалу I линейный функционал. Тогда функция $\hat{F}(z) = F(e_z)$, $(|z| > 1)$ аналитична вне $E_0(I)$ и при $|z| \geq 1$ допускает следующую оценку:

$$|\hat{F}(z)| \leq \frac{\text{const}}{[\rho(z, E_0(I))]^{2(n+1)}},$$

где $\rho(z, E_0(I))$ — расстояние от точки z до множества $E_0(I)$.

Таким образом, используя рассуждения, приведенные в работе [7], для доказательства теоремы 1 достаточно установить такую аппроксимационную теорему.

Теорема 3. Пусть $f \in X$, тогда для любого фиксированного $N > n$ существует последовательность $\varphi_k \in X$ со следующими свойствами:

а) $|\varphi_k^{(l)}(z)| \leq C_k^* [\rho(z, E_n(f))]^{2(N-l)}, z \in \bar{D}, l = 0, 1, \dots, n,$

б) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|\varphi_k - f\|_X = 0.$

Замечание 2. Считаю необходимым отметить, что результаты этой статьи при $\omega(\delta) = \delta^2, 0 < \delta < 1$ были анонсированы в [8]. Основная теорема указанной работы была сформулирована в 1972 г. [в работе [7]. В дальнейшем частные случаи этой работы, когда $X = \lambda_\infty = \lambda_\infty^{(0)}, 0 < \delta < 1$, были значительно позже переоткрыты в работах [9], [10].

Замечание 3. Замкнутые идеалы алгебр $A^{(n)}$ и H_1^2 описаны в работах [5], [6].

Отметим, что хотя мы и используем аналог одной леммы (см. лемму 1.4) из [5], однако у нас аппроксимирующие функции строятся совершенно по другому, что позволяет дать более простое доказательство теоремы 3 в случае H_{n+1}^p , чем это сделано в [6] для случая H_1^2 использованием гильбертовости H_1^2 . Кроме того, при $n = 0$ доказательство теоремы 3 сильно упрощается и нет надобности использования функции H_δ (см. лемму 1.3), а вместо этого достаточно заметить, что $f^p \rightarrow f$ при $p \rightarrow 1+0$ в пространстве X . Более того, оценки $\lambda_\infty^{(n)}$ приходится получать равномерно внутри круга, в то время как в случае $A^{(n)}$ достаточно это сделать на окружности. В § 2 мы будем использовать следующие теоремы Харди-Литтльвуда:

Теорема А. (см. [11], стр. 15).

Пусть f — 2π -периодическая функция, $f \in L^p$

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \left(\frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t)| dt \right), \quad (0.2)$$

тогда

$$\|M(f)\|_{L^p} \leq A_p \|f\|_{L^p}, \quad 1 < p < +\infty,$$

A_p — некоторое число, зависящее только от p .

Теорема Б. (см. [11], стр. 77).

Пусть $f \in H^p$, тогда

$$\sup_{0 < r < 1} |f(re^{ix})| \leq \text{const } M(f)(x),$$

где M определяется из (0.2) по функции $f(e^{ix})$.

§ 1. Доказательство теоремы 3 в случае алгебры $\lambda_\infty^{(n)}$

Пусть E — замкнутое множество на единичной окружности Γ , $\{(e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k})\}_{k=1}^\infty$ — последовательность дополнительных интервалов множества E .

* Здесь, как и в дальнейшем, $C_{k,\alpha}$ будет обозначать положительное число, зависящее только от k, α , значение которого не существенно.

Определение. Скажем, что E — карлесоновское множество, если

$$1) \quad \sum_k l_k \log \frac{1}{l_k} < +\infty$$

и $\sigma(E) = 0$, где $l_k = \beta_k - \alpha_k$, $k = 1, 2, \dots$.

σ — линейная мера Лебега на окружности Γ .

Пусть $\delta > 0$ и N — положительное число. Определим функцию h_δ следующим образом:

$$h_\delta(t) = \begin{cases} \log \left(1 + \frac{\delta}{t - \alpha_k} \right) + \log \left(1 + \frac{\delta}{\beta_k - t} \right), & \alpha_k < t < \beta_k, \quad k = 1, \dots \\ +\infty & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Следующая лемма доказана в [7].

Лемма 1.1. Если E — карлесоновское множество, то $h_\delta \in L^1$, а внешняя функция

$$G_\delta(z) = \exp \left\{ -\frac{N}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} h_\delta(t) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt \right\}$$

удовлетворяет условиям

1. $G_\delta^{(N)}$ принадлежат классу A , при всех $\delta > 0$ и $|G_\delta| \leq 1$,
2. $|G_\delta^{(k)}(z)| \leq C_\delta [\rho(z, E)]^{2(N-k)}$, $k = 0, 1, \dots, N$,
3. $\lim_{\delta \rightarrow 0} G_\delta(z) = 1$, $\lim_{\delta \rightarrow 0} G_\delta^{(k)}(z) = 0$, $k = 0, \dots, N$, равномерно вне множества E .

В дальнейшем при фиксированном $f \in X$ положим $E = E_n(f)$. Введем в $\lambda_\omega^{(n)}$ также норму

$$\|f\|_{\lambda_\omega^{(n)}} = \sup_{z \in D} \left\{ \frac{1 - |z|}{\omega(1 - |z|)} |f^{(n+1)}(z)| \right\}.$$

Лемма 1.2. Пусть $f \in A^{(n)}$ и $E_n(f)$ — непустое множество, тогда существуют положительные числа C_1 и C_2 такие, что

$$C_1 \|f\|_{\lambda_\omega^{(n)}} \leq \|f\|_{h_\omega^{(n)}} \leq C_2 \|f\|_{\lambda_\omega^{(n)}}. \quad (1.1)$$

Доказательство. Очевидно, не ограничивая общности можно предполагать, что $n = 0$. Сначала докажем второе неравенство в (1.1). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{f'(re^{i\varphi}) e^{i\varphi}}{ir} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta}) \frac{(1 - r^2) r \sin(\theta - \varphi)}{[1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2]^2} d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{i(\varphi + t)}) \frac{r(1 - r^2) \sin t}{[1 - 2r \cos t + r^2]^2} dt = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(e^{i(\tau+t)}) - f(e^{i\tau})] \frac{r \sin t (1-r^2)}{[1-2r \cos t + r^2]^2} dt.$$

Используя выражение $|f|_{h(n)}$, получаем

$$\begin{aligned} |f'(re^{i\tau})| &\leq \frac{|f|_{h(n)}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(1-r^2) |\sin t| \omega(f, t)}{\left[(1-r)^2 + 4r \sin^2 \frac{t}{2}\right]^2} dt \leq \\ &\leq \text{const } |f|_{h(n)} \left(\int_0^{\pi} \frac{(1-r^2) \omega(f, t) \cdot t dt}{(1-r)^2 + t^2} \right) = \text{const } |f|_{h(n)} (I_1 + I_2), \end{aligned}$$

где

$$I_1 = \int_0^{1-r} () dt, \quad I_2 = \int_{1-r}^{\pi} () dt.$$

Имеем

$$I_1 \leq \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^4} (1-r)^3 = \frac{\omega(1-r)}{1-r}. \quad (1.2)$$

Теперь оценим I_2 :

$$I_2 \leq \sum_{k=0}^N \int_{2^k(1-r)}^{2^{k+1}(1-r)} \frac{(1-r^2) \omega(f, t)}{t^3} dt,$$

где N — такое положительное число, что $2^N(1-r) \leq \pi < 2^{N+1}(1-r)$.

Используя неравенство

$$\omega(f, t) \leq \omega(f, 2^{k+1}(1-r)) \leq 2^{k+1} \omega(f, 1-r)$$

для

$$t \in [2^k(1-r), 2^{k+1}(1-r)]$$

получаем

$$\int_{2^k(1-r)}^{2^{k+1}(1-r)} \frac{\omega(f, t)}{t^3} dt \leq \frac{2^{k+1} \omega(1-r)}{2^{2k} (1-r)^2} = \frac{2\omega(1-r)}{2^k (1-r)^2}.$$

Значит

$$I_2 \leq 2 \left(\sum_{k=0}^N \frac{1}{2^k} \right) \frac{\omega(1-r)}{1-r} = \frac{4\omega(1-r)}{1-r}. \quad (1.3)$$

Объединяя оценки (1.2), (1.3), получаем

$$|f|_{h(n)}^* \leq \text{const } |f|_{h(n)}.$$

Первое неравенство в (1.1) следует из следующей теоремы Б. Я. Геронимуса.

Теорема (см. [12]). Пусть f голоморфна в D и удовлетворяет условию

$$|f(z)| < \psi(1-|z|), \quad z \in D, \quad \text{где} \quad \int_0^1 \psi(x) dx < +\infty,$$

$\psi(x)$ возрастает вместе с $\frac{1}{x}$, тогда первообразная

$$F(z) = \int_a^z f(t) dt, \quad |a| \leq 1$$

имеет в $\bar{D}$ модуль непрерывности с оценкой

$$\omega(F, \delta) \leq \cos t \int_0^\delta \psi(t) dt. \quad (1.4)$$

Действительно, чтобы получить левое неравенство в (1.1), положим $\psi(x) = \frac{\omega(x)}{x}$, тогда из (1.4)

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq C \|f\|_{\omega}^{(0)} \int_0^{|\zeta_1 - \zeta_2|} \frac{\omega(t)}{t} dt \leq C_1 \|f\|_{\omega}^{(0)} \omega(|\zeta_1 - \zeta_2|)$$

по условию (*). Отсюда, учитывая, что $f(x) = 0$, $x \in E_0(f)$, получаем (1.1). ●

Пусть $f \in X$, $\|f\|_\infty \leq 1$, $z \in \bar{D}$ а I_z — дополнительный интервал множества $E = E_n(f)$ на Γ , которому принадлежит $\arg z$. Положим

$$a(z) = \int_{I_z} \frac{\log \frac{1}{|f(t)|}}{|t-z|^2} |dt|.$$

Лемма 1.3. Пусть $H_k(z) = [G_k(z)]^\delta$, тогда справедлива оценка

$$|H_k^{(m)}(z)| \leq C \sum_{k=1}^m \frac{\delta^k (\rho(z, E))^\delta a^k(z)}{[\rho(z, E)]^{m-k}}, \quad z \in \bar{D}, \quad m=1, \dots, n+1, \quad (1.5)$$

где G_k — функция, построенная в лемме 1.1, ρ — расстояние от точки z до множества E .

Доказательство. Сначала докажем, что

$$|H_k(z)| \leq 2\pi (\rho(z, E))^\delta, \quad z \in \bar{D}. \quad (1.6)$$

Пусть z — фиксированная точка из $\bar{D}$, $\rho(z, E) = |z - e^{i\alpha}|$, $e^{i\alpha} \in E$. Не ограничивая общности можно предполагать, что точка $e^{i\alpha}$ — концевая точка некоторого дополнительного интервала, поскольку множество таких точек всюду плотно в E . Положим

$$\psi(\zeta) = \frac{H_\delta(\zeta)}{(\zeta - e^{i\varphi})^\delta}.$$

Тогда легко видеть, что

$$|\psi(e^{i\varphi})| = \left(\frac{\varphi - \alpha_k}{\varphi - \alpha_k + \delta} \right)^{N\delta} \left(\frac{\beta_k - \varphi}{\beta_k - \varphi + \delta} \right)^{N\delta} \frac{1}{|e^{i\varphi} - e^{i\alpha}|^\delta}$$

при $\alpha_k < \varphi < \beta_k$, $(e^{i\alpha_k}, e^{i\beta_k})$ — некоторый дополнительный интервал множества E . Следовательно

$$|\psi(e^{i\varphi})| \leq \frac{1}{\delta^\delta} \left(\frac{\pi}{2} \right)^\delta < \frac{\pi e}{2}.$$

Так как ψ принадлежит известному классу В. И. Смирнова (см. [13]) то по принципу максимума такая же оценка справедлива в D :

$$|\psi(\zeta)| \leq \frac{\pi e}{2}, \quad \zeta \in \bar{D},$$

в частности при $\zeta = z$. Оценка (1.6) доказана. Оценку (1.5) докажем по индукции. Пусть $m = 1$. Сначала отметим, что если $f \in \lambda_\omega^{(n)}$, $n \geq 0$ и ω удовлетворяет условию (*), то $f \in \lambda_\alpha$ при некотором $\alpha > 0$ (см. [14]). Поэтому

$$\int_{\Gamma \cap I_z} \frac{h_\delta(t)}{|t - z|^2} |dt| \leq C\alpha(z). \quad (1.7)$$

В то же время

$$\alpha(z) = \int_{\Gamma \cap I_z} \frac{\lg \frac{1}{|f(t)|} |dt|}{|t - z|^2} \geq C_1 \int_{\Gamma \cap I_z} \frac{\lg \frac{1}{\rho(t, E)} |dt|}{|t - z|^2} \geq C_2 \frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{\rho(z, E)}. \quad (1.8)$$

Далее

$$\begin{aligned} |H'_\delta(z)| &= 2\delta |H_\delta(z)| \left| \int_{\Gamma} \frac{h_\delta(t) dt}{(t - z)^2} \right| = \\ &= 2\delta |H_\delta(z)| \left| \int_{\tilde{\Gamma} \cap I_z} \frac{N h_\delta(t) dt}{(t - z)^2} + \int_{\tilde{I}_z} \frac{h_\delta(t) dt}{(t - z)^2} \right|, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{I}_z = \left\{ \zeta: \frac{\zeta}{|\zeta|} \in I_z, |\zeta| = 1 + \rho\left(\frac{\zeta}{|\zeta|}, E\right) \right\}. \quad (1.9)$$

Поэтому, учитывая оценку

$$\int_{\tilde{I}_z} \frac{|h_\delta(t)|}{|t - z|^2} |dt| \leq C \frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{\rho(z, E)} \quad \text{и (1.8), получаем}$$

$|H'_\delta(z)| \leq C\delta \alpha(z)$, т. е. оценка (1.5) при $m = 1$ доказана.

Теперь предположим, что оценка (1.5) справедлива для $1 \leq k \leq m-1$ и докажем ее справедливость для m .

Положим

$$W_{\delta}(z) = \frac{N}{\pi} \int_{\Gamma} h_{\delta}(t) \frac{t+z}{t-z} |dt|.$$

Тогда

$$H_{\delta}^{(m)}(z) = (\exp \{ \delta W_{\delta}(z) \})^{(m)} = (\delta W_{\delta}(z) H_{\delta}(z))^{(m-1)}. \quad (1.9)$$

Используя формулу Лейбница, получим следующее неравенство:

$$|H_{\delta}^{(m)}(z)| \leq C \delta \sum_{k=0}^{m-1} |W_{\delta}^{(m-k)}(z)| |H_{\delta}^{(k)}(z)|.$$

Поскольку мы предполагали справедливость оценки (1.5) при $1 \leq k \leq m-1$, то

$$|H_{\delta}^{(m)}(z)| \leq C \delta \sum_{k=1}^{m-1} [|W_{\delta}^{(m-k)}(z)| \left(\sum_{l=1}^k \frac{\delta^l [\rho(z, E)]^{\delta} \alpha^l(z)}{[\rho(z, E)]^{k-l}} \right) + \delta |W_{\delta}^{(m)}(z)| |H_{\delta}(z)|].$$

Но

$$|W_{\delta}^{(m-k)}(z)| \leq C \left(\int_{\Gamma \setminus \Gamma_z} \frac{|h_{\delta}(t)| |dt|}{|t-z|^{n-k+1}} + \int_{\Gamma_z} () \right) \leq C_1 \frac{\alpha(z)}{[\rho(z, E)]^{m-k-1}}.$$

В итоге получаем

$$|H_{\delta}^{(m)}(z)| \leq C \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{l=1}^k \frac{\delta^{l+1} [\rho(z, E)]^{\delta} \alpha^{l+1}(z)}{[\rho(z, E)]^{m-l-1}} + \frac{\delta \alpha(z) \rho^{\delta}(z)}{[\rho(z, E)]^{m-1}} \leq C_1 \sum_{k=1}^m \left(\frac{\delta^k \alpha^k(z) \rho^{\delta}(z)}{[\rho(z, E)]^{m-k}} \right) \right\} \bullet$$

Лемма 1.4. Пусть $D_E = \left\{ z \in D; 2(1-|z|) < \rho\left(\frac{z}{|z|}, E\right) \right\}$ и $|f|_{\infty} \leq 1$, $f \in \lambda_{\infty}^{(n)}$, $E = E_n(f)$, тогда равномерно относительно $z \in D_E$ имеет место оценка

$$|f^{(m)}(z)| = o \left(\frac{\log \frac{1}{\rho(z, E)}}{\alpha(z)} \right)^{n-m} o \left(\frac{\log \frac{1}{\rho(z, E)}}{\alpha(z)} \right), \quad m=0, 1, \dots, n, \quad (1.10)$$

при $\rho(z, E) \rightarrow 0$.

Доказательство. Пусть $f = G_f F_f$, где G_f — внутренняя часть, а F_f — внешняя часть функции f . Используя формулу Лейбница и тот факт, что $|G_f^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{(1-|z|)^m}$, легко установить неравенство

$$|f^{(m)}(z)| \leq C \frac{|F_f(z)|}{(1-|z|)^{2n}}, \quad m=1, \dots, n. \quad (1.11)$$

Выберем $0 < r < 1$, тогда

$$f^{(m)}(z) = f^{(m)}(rz) + f^{(m+1)}(rz) + \dots + \frac{1}{(n-m)!} \int_{rz}^z (z-t)^{n-m} f^{(n+1)}(t) dt \quad (1.12)$$

Кроме того, учитывая оценку (1.11) и лемму 1.2, приходим к неравенству

$$|f^{(m)}(z)| \leq C \left(\frac{|F_f(rz)|}{(1-r)^{2n}} + \frac{1}{(n-m)!} \int_r^1 (1-t)^{n-m} \frac{\omega(f, 1-t|z|)}{1-t|z|} dt \right).$$

Но поскольку

$$\frac{\omega(f, 1-t|z|)}{(1-t|z|)} \leq \frac{\omega(f, 1-t)}{1-t} \leq \frac{\omega(1-t)^*}{1-t}, \quad \text{при } |z| \leq 1,$$

то

$$|f^{(m)}(z)| \leq C \left(\frac{|F_f(rz)|}{(1-r)^{2n}} + \int_r^1 (1-t)^{n-m-1} \omega(1-t) dt \right). \quad (1.13)$$

Так как ω удовлетворяет условию (*), то

$$\int_r^1 (1-t)^{n-m-1} \omega(1-t) dt \leq c (1-r)^{n-m} \omega(1-r).$$

Отсюда получаем

$$|f^{(m)}(z)| \leq c \left(\frac{|F_f(rz)|}{(1-r)^{2n}} + (1-r)^{n-m} \omega(1-r) \right). \quad (1.14)$$

Пусть N — положительное число, заметим, что если

$$\lg \frac{1}{\frac{\rho(z, E)}{\alpha(z)}} > \frac{1}{N} \rho(z, E),$$

то оценка (1.10) — простое следствие того, что $f \in \lambda_{\omega}^{(n)}$ и $E = E_n(f)$.

Повтому будем предполагать, что $\lg \frac{1}{\frac{\rho(z, E)}{\alpha(z)}} < \frac{1}{N} \rho(z, E)$, положим

в неравенстве (1.14)

* Отметим, что на самом деле имеет место более точная оценка

$$o \left(\frac{\omega(1-t)}{1-t} \right) \text{ при } t \rightarrow 1-0$$

$$1-r = \frac{N \lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} < \rho(z, E) < 1, \quad (1.15)$$

и оценим

$$|F_f(rz)| = \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{t,z}} \lg \frac{1}{|f(t)|} \frac{1-r^2|z|^2}{|t-rz|^2} |dt| \right\} \leq \\ \leq \exp \left\{ -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{t,z}} \lg \frac{1}{|f(t)|} \frac{(1-r)(|t-z|^2(1-r^2|z|^2))}{|t-z|^2(|t-rz|^2(1-r))} \right\}.$$

Докажем, что

$$\inf_{e^{it} \in \Gamma_{t,z}} \left\{ \frac{|e^{it}-z|^2(1-r^2|z|^2)}{|e^{it}-rz|^2(1-r)} \right\} > \frac{1}{4}. \quad (1.16)$$

Выражение в скобках обозначим через J . Имеем

$$J(t, r, z) = \frac{(1-r^2|z|^2) \left((1-|z|)^2 + 4|z| \sin^2 \frac{(t-\varphi)}{2} \right)}{\left((1-r|z|)^2 + 4r|z| \sin^2 \frac{t-\varphi}{2} \right) (1-r)},$$

где $z = |z| e^{i\varphi}$.

Ясно, что

$$J(t, r, z) \geq \left(1 + \frac{r(1-|z|)}{1-r} \right) \frac{\left(\frac{1-|z|}{1-r} \right)^2 + 4|z| \left(\frac{\sin \frac{(t-\varphi)}{2}}{1-r} \right)^2}{\left(1 + \frac{r(1-|z|)}{1-r} \right)^2 + 4r|z| \left(\frac{\sin \frac{(t-\varphi)}{2}}{1-r} \right)^2}.$$

Положим

$$u = \frac{1-|z|}{1-r}, \quad v = \frac{2\sqrt{|z|} \left| \sin \frac{t-\varphi}{2} \right|}{1-r}.$$

Тогда ввиду

$$(1-r)^2 \leq |z - e^{it}|^2 = ((1-|z|)^2 + |z||e^{i\varphi} - e^{it}|^2).$$

Значит $u^2 + v^2 > 1$ и

$$J > \frac{1}{2} (1+u) \frac{u^2 + v^2}{(1+u)^2 + v^2} - \frac{(1+u)}{2} \frac{x}{1+2u+x},$$

где $x = u^2 + v^2$. Теперь заметим, что функция $\psi(x) = \frac{x}{x+a}$, $a > 0$ возрастает. Следовательно

$$J > \frac{(1+u)}{2} \frac{1}{2+2u} = \frac{1}{4}.$$

Оценка (1.16) доказана. Из (1.16) получаем

$$|F(rz)| \leq \exp \left\{ -\frac{N}{4\pi} \lg \frac{1}{\rho(z, E)} \right\} = [\rho(z, E)]^{N/4\pi}.$$

Используя тот факт, что N можно брать настолько большим, что выражение

$$\frac{[\rho(z, E)]^{N/4\pi}}{\left[\lg \frac{1}{\rho(z, E)} \right]^{2n}} \cdot a^{2n}(z) \text{ было меньше, чем } \left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right)^{n-\pi} \omega \left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right)$$

и учитывая сноску на стр. 181, получаем (1.10). ●

Замечание. Лемма 4 для случая алгебры $A^{(n)}$, когда z находится на Γ , доказана в работе [5]. Однако доказательство, приведенное здесь, показывает, что аналогичный результат верен равномерно в $D_l = \{ \zeta \in D : \arg \zeta \in l, (\rho(z, E) < 1,) \}$ где l — дополнительный интервал множества E .

Лемма 1.5. Пусть $f \in \mathcal{H}_\infty^{(n)}$ и $f_\delta = fH_\delta$, тогда имеет место

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f_\delta - f\|_{\mathcal{H}_\infty^{(n)}} = 0. \quad (1.17)$$

Доказательство. Используя лемму 1.2, достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{z \in D} \left\{ |f_\delta^{(n+1)}(z) - f^{(n+1)}(z)| \frac{1 - |z|}{\omega(1 - |z|)} \right\} = 0,$$

а для этого, учитывая формулу Лейбница и

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{z \in D} \left\{ |f^{(n+1)}(z) (1 - H_\delta)(z)| \frac{1 - |z|}{\omega(1 - |z|)} \right\} = 0,$$

необходимо установить, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sup_{z \in D} \left\{ |f^{(n+1-m)}(z) H_\delta^{(m)}(z)| \frac{1 - |z|}{\omega(1 - |z|)} \right\} = 0, \quad m=1, 2, \dots, n+1. \quad (1.18)$$

Пусть $E = E_n(f)$ и

$$D_E = \left\{ z \in D : 2(1 - |z|) < \rho \left(\frac{z}{|z|}, E \right) \right\}. \quad (1.19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in D} \{ |f^{(n+1-m)}(z) H_\delta^{(m)}(z)| \} \leq \\ & \leq \sup_{z \in D_E} \{ \quad \} + \sup_{z \in D \setminus D_E} \{ \quad \} \stackrel{\text{def}}{=} J_1^\delta + J_2^\delta. \end{aligned}$$

Сначала докажем, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J_2^\delta = 0.$$

С этой целью заметим, что при $z \in D|D_E$

$$\rho(z, E) \leq \rho\left(\frac{z}{|z|}, E\right) + (1 - |z|) \leq 3(1 - |z|). \quad (1.20)$$

Но поскольку $f \in \lambda_{\infty}^{(n)}$, то для любого положительного ε можно найти $\eta > 0$ такое, что

$$|f^{(m)}(z)| < \varepsilon (\rho(z, E))^{n-m} \omega(\rho(z, E)), \quad m = 0, 1, \dots, n$$

как только $\rho(z, E) < \eta$.

Из (1.20)

$$|f^{(n+1-m)}(z)| < 3^m \varepsilon (1 - |z|)^{m-1} \omega(1 - |z|).$$

Теперь, учитывая элементарную оценку

$$|H_0^{(m)}(z)| \leq \frac{m!}{(1 - |z|)^m},$$

приходим к неравенству

$$\sup_{z \in D|D_E} \left\{ |f^{(n+1-m)}(z)| |H_0^{(m)}(z)| \frac{1 - |z|}{\omega(1 - |z|)} \right\} < < 3m! \varepsilon + \sup_{\substack{D \in D|D_E \\ \rho(z, E) > \eta}} \{ \quad \}.$$

Но по лемме 1.1 последнее выражение стремится к нулю, когда $\delta \rightarrow 0$. Поэтому существует $\delta_0 > 0$ такое, что $I_2^{\delta} < (3m! + 1)\varepsilon$, если $0 < \delta < \delta_0$.

Теперь оценим I_1^{δ} . Здесь мы используем леммы 1.3 и 1.4.

По лемме 1.4 для $\varepsilon > 0$ существует $\eta_1 > 0$ такое, что

$$|f^{(m)}(z)| < \varepsilon \left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right)^{n-m} \omega \left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right)$$

при $z \in D_E$, $\rho(z, E) < \eta_1$.

Тогда

$$I_1^{\delta} \leq \sup_{\substack{z \in D_E \\ \rho(z, E) > \eta_2}} \{ \quad \} + \sup_{\substack{z \in D_E \\ \rho(z, E) < \eta_1}} \{ \quad \}. \quad (1.21)$$

По лемме 1.1 первое слагаемое будет меньше ε , если $0 < \delta < \delta_1$. Для оценки второго слагаемого достаточно предположить, что

$$\lg \frac{1}{\frac{\rho(z, E)}{a(z)}} > 1 - |z|, \quad (1.22)$$

так как в противном случае нужно лишь повторить рассуждения, приведенные при выводе оценки I_2^{δ} .

В случае (1.22) имеем при $z \in D_E$, $\rho(z, E) < \eta_1$,

$$\begin{aligned}
& \left\{ |f^{(n+1-m)}(z) H_{\delta}^{(m)}(z)| \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)} \right\} < \varepsilon \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)} \left(\lg \frac{1}{\rho(z, E)} \right)^{n-m} \times \\
& \times \omega \left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right) \sum_{k=1}^m \left(\frac{\delta^k [\rho(z, E)]^k a^k(z)}{[\rho(z, E)]^{m-k}} \right) < \\
& < c \varepsilon \frac{(1-|z|)}{\omega(1-|z|)} \omega \left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right) \sum_{k=1}^m \delta^k [\rho(z, E)]^k \left(\lg \frac{1}{\rho(z, E)} \right)^k \frac{a(z)}{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}} < \\
& < C_1 \varepsilon \left(\frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)} \frac{a(z)}{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}} \omega \left(\frac{\lg \frac{1}{\rho(z, E)}}{a(z)} \right) \right).
\end{aligned}$$

Теперь, учитывая (1.22) и тот факт, что функция $\frac{\omega(t)}{t}$ монотонно убывает, получаем $I_{\delta}^{(n)} < C_1 \varepsilon$, как только $0 < \delta < \delta_1$ ●

Доказательство теоремы. Пусть $\gamma > 0$, $\delta > 0$, как и выше положим

$$f_{\delta} = f H_{\delta}, \quad f_{\delta, \gamma} = f_{\gamma} G_{\gamma},$$

где H_{δ} определяется как в лемме 1.3, а функция G_{γ} по лемме 1.1. Согласно вышедоказанным леммам 1.1 и 1.5, функция $f_{\delta, \gamma}$ при указанных γ и δ удовлетворяет всем условиям теоремы 3. Кроме того, по лемме 1.4

$$f_{\delta}^{(m)}(z) = o \left(\frac{1}{a(z)} \right) \omega \left(\frac{1}{a(z)} \right), \quad \rho(z, E) \rightarrow 0. \quad (1.23)$$

$z \in D_E$

В силу леммы 1.5 для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} f_{\delta, \gamma} = f_{\delta} \quad (1.24)$$

в пространстве $\lambda_{\omega}^{(n)}$, а доказательство (1.24) по существу повторяет доказательство леммы 1.5. Приведем его в общих чертах. Как и при доказательстве леммы 1.5, достаточно установить, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{z \in D} \left\{ |f_{\delta}^{(n+1-m)}(z) G_{\gamma}^{(m)}(z)| \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)} \right\} = 0, \quad 1 \leq m \leq n+1. \quad (1.25)$$

Аналогично, как и выше

$$\sup_{z \in D} \{ \quad \} \leq \sup_{z \in D_E} \{ \quad \} + \sup_{z \in D \setminus D_E} \{ \quad \}. \quad (1.26)$$

Оценка $\sup_{z \in D \setminus D_E} \{ \}$ точно такая же, как для соответствующего результата из леммы 1.5. Повтому получим оценку для первого слагаемого в (1.26). Учитывая лемму 1.3, легко установить неравенство

$$|G_1^{(m)}(z)| \leq C (a(z))^m, \quad m = 1, \dots, n+1, \quad (1.27)$$

где $a(z) = \int_{|t|=z} \frac{\lg \frac{1}{|f(t)|}}{|t-z|^2} |dt|$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — положительное число, по (1.23) существует $\eta > 0$ такое, что

$$|f_0^{(m)}(z)| < \varepsilon \left(\frac{1}{a(z)} \right)^{n-m} \omega \left(\frac{1}{a(z)} \right), \quad m = 0, \dots, n, \quad (1.28)$$

как только $z \in D_E$, $\rho(z, E) < \eta$.

Положим

$$D_{E, \eta} = \{z \in D_E : \rho(z, E) < \eta\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{z \in D_{E, \eta}} \left\{ |f_0^{(n+1-m)}(z)| G_1^{(m)}(z) \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)} \right\} &\leq \\ &\leq \sup_{\substack{z \in D_{E, \eta} \\ \frac{1}{a(z)} > (1-|z|)}} \{ \} + \sup_{\substack{z \in D_{E, \eta} \\ \frac{1}{a(z)} < (1-|z|)}} \{ \} \stackrel{\text{def}}{=} I_1^0 + I_2^0. \end{aligned}$$

Теперь, используя (1.28), имеем

$$|f_0^{(n+1-m)}(z)| < \varepsilon (1-|z|)^{m-1} \omega(1-|z|)$$

при

$$\frac{1}{a(z)} < 1-|z|, \quad z \in D_{E, \eta}.$$

В то же время $|G_1^{(m)}(z)| < \frac{m!}{(1-|z|)^m}$. Из этих оценок сразу следует, что

$$I_2^0 < m! \varepsilon. \quad (1.29)$$

Аналогично легко заметить, что

$$I_1^0 < \varepsilon \sup_{\substack{z \in D_{E, \eta} \\ \frac{1}{a(z)} > (1-|z|)}} \left\{ \frac{1-|z|}{\omega(1-|z|)} \omega \left(\frac{1}{a(z)} \right) a(z) \right\}.$$

Остается учесть, что функция $\frac{\omega(t)}{t}$ монотонно убывает при $t \in [0, 1]$, поэтому

$$I_1^0 < \varepsilon. \quad (1.30)$$

Но согласно лемме 1.1

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \sup_{z \in D/D_{E, \gamma}} \left\{ \frac{1 - |z|}{\omega(1 - |z|)} |f_0^{(n+1-m)}(z) G_1^{(m)}(z)| \right\} = 0.$$

Следовательно, из (1.29) и (1.30) получаем утверждение теоремы. ●

§ 2. Доказательство теоремы 3 в случае алгебры H_{n+1}^p

1°. Пусть $f \in H_{n+1}^p$, обозначим через $M(f^{(n+1)})(e^{i\varphi})$ максимальную функцию Харди-Литтльвуда от $f^{(n+1)}(e^{i\varphi})$ (см. (0.2)).]

Лемма 2.1. Пусть $f \in H_{n+1}^p$ и $l_\varphi = (e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ — дополнительный интервал множества $E = E_n(f)$ на Γ , которому принадлежит $e^{i\varphi}$. Тогда имеет место оценка

$$|f^{(m)}(e^{i\varphi})| \leq \text{const} \left(\frac{\log \frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{\alpha(e^{i\varphi})} \right)^{n+1-m} M(f^{(n+1)})(e^{i\varphi}). \quad (2.1)$$

Доказательство. Пусть N — положительное число и

$$\left(\frac{\log \frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{\alpha(e^{i\varphi})} \right) > \frac{1}{N} \rho(e^{i\varphi}, E),$$

где $\rho(e^{i\varphi}, E) = |e^{i\varphi} - e^{i\alpha}|$, $e^{i\alpha} \in E$. Тогда

$$f^{(m)}(e^{i\varphi}) = \frac{1}{(n-m)!} \int_{e^{i\alpha}}^{e^{i\varphi}} (e^{i\varphi} \zeta)^{n-m} f^{(n+1)}(\zeta) d\zeta, \quad m = 0, \dots, n.$$

Отсюда

$$|f^{(m)}(e^{i\varphi})| \leq \frac{1}{(n-m)!} [\rho(e^{i\varphi}, E)]^{n+1-m} \left[\frac{1}{|e^{i\varphi} - e^{i\alpha}|} \int_{e^{i\alpha}}^{e^{i\varphi}} |f^{(n+1)}(e^{it})| dt \right].$$

Но поскольку

$$\frac{1}{|e^{i\varphi} - e^{i\alpha}|} \int_{e^{i\alpha}}^{e^{i\varphi}} |f^{(n+1)}(e^{it})| dt < \text{const} M(f^{(n+1)})(e^{i\varphi}),$$

то оценка (2.1) доказана в этом случае. Если же

$$\frac{\log \frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{\alpha(e^{i\varphi})} < \frac{1}{N} \rho(e^{i\varphi}, E),$$

то повторяя рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 1.4, получаем



$$|f^{(m)}(e^{i\varphi})| \leq \text{const} \left(\frac{\log \frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{\alpha(e^{i\varphi})} \right)^{n+1-m} \sup_{0 < r < 1} |f^{(n+1)}(re^{i\varphi})|.$$

Остается применить теорему Б.

Лемма 2.2. Пусть $f \in H_{n+1}^p$ и $f_\delta = fH_\delta$, тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|f_\delta - f\|_{H_{n+1}^p} = 0. \quad (2.2)$$

Доказательство. Для установления (2.2) достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{\pi} |H_\delta^{(m)}(e^{i\varphi}) f^{(n+1-m)}(e^{i\varphi})|^p d\varphi = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n+1.$$

С этой целью используем леммы 1.3 и 2.1, согласно которым

$$\begin{aligned} |H_\delta^{(m)}(e^{i\varphi}) f^{(n+1-m)}(e^{i\varphi})| &\leq CM(f^{(n+1)}(e^{i\varphi})) \left(\frac{\log \frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{\alpha(e^{i\varphi})} \right)^m \times \\ &\times \sum_{k=1}^m \left(\frac{\delta^k \rho^\delta(e^{i\varphi}, E) \alpha^k(e^{i\varphi})}{\rho^{m-k}(e^{i\varphi}, E)} \right) = CM(f^{(n+1)}(e^{i\varphi})) \times \\ &\times \sum_{k=1}^m \frac{\delta^k \left(\log \frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)} \right)^m \rho^\delta(z)}{[\alpha(e^{i\varphi}) \rho(e^{i\varphi}, E)]^{m-k}}. \end{aligned}$$

Теперь, используя оценку

$$\alpha(e^{i\varphi}) > C \frac{\log \frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)}}{\rho(e^{i\varphi}, E)},$$

получаем

$$\begin{aligned} |H_\delta^{(m)}(e^{i\varphi}) f^{(n+1-m)}(e^{i\varphi})| &\leq CM(f^{(n+1)}(e^{i\varphi})) \sum_{k=1}^m \delta^k (\rho(e^{i\varphi}, E))^\delta \times \\ &\times \left(\log \frac{1}{\rho(e^{i\varphi}, E)} \right)^k \leq C_1 M(f^{(n+1)}(e^{i\varphi})). \end{aligned}$$

Для доказательства леммы остается применить теорему Лебега и лемму 1.1. ●

Доказательство теоремы. Положим снова $f_{\delta, \gamma} = f_\delta G_\gamma$. Исходя из лемм 1.1 и 2.2, достаточно доказать, что

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} f_{\delta, \gamma} = f_\delta$$

в пространстве H_{n+1}^p . А для этого достаточно заметить, что

$$|f_0^{(n+1-m)}(e^{i\varphi})| \leq C \left(\frac{1}{\alpha(e^{i\varphi})} \right)^m M(f^{(n+1)})(e^{i\varphi}),$$

и

$$|G_1^{(m)}(e^{i\varphi})| \leq C \alpha^m(e^{i\varphi}), \quad m=1, 2, \dots, n+1.$$

Следовательно

$$|f_0^{(n+1-m)}(e^{i\varphi}) G_1^{(m)}(e^{i\varphi})| \leq CM(f^{(n+1)})(e^{i\varphi}).$$

Остальное следует из теоремы А, леммы 1.1 и теоремы Лебега (см. [13]).

2°. Отметим, что имеет место аналог теоремы 1 для односвязных областей Ω с достаточно хорошей границей. В связи с известной теоремой П. Лакса остановимся только на случае, когда $\Omega = \Pi_+ = \{z: \operatorname{Im} z > 0\}$. Обозначим через H_+^p класс аналитических в Π_+ функций, для которых

$$\|f\|_{H_+^p} = \sup_{y>0} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty$$

и через

$$H_+^{p,n} = \{f: f^{(n)} \in H_+^p, \|f\|_{H_+^{p,n}} = \max_{0 \leq k \leq n} \|f^{(k)}\|_{H_+^p}\}.$$

Легко видеть, что при $p \geq 1$, $H_+^{p,n}$ представляет банаховую алгебру относительно поточечного умножения. Рассмотрим в $H_+^{p,n}$ оператор

$$T_\lambda(t)(z) = e^{i\lambda z} f(z), \quad \lambda > 0.$$

Нетрудно убедиться, что замкнутые идеалы алгебры $H_+^{p,n}$ совпадают с инвариантными подпространствами этого оператора в $H_+^{p,n}$.

Теорема 1*. Пусть I — замкнутый идеал в $H_+^{p,n}$, $1 < p < +\infty$, тогда

$$I = \{f \in H_+^{p,n}: E_m(f) \supset E_m(I), \quad m=0, 1, \dots, n-1,$$

$$G_I \text{ делит } G_f\},$$

где G_I , $E_m(f)$ определяются как в § 1, только вместо Γ нужно подставить R^1 .

Особо следует отметить, что теорема 1* не получается из теоремы 1 при помощи конформного отображения. В отличие от случая $n=0$ пространства H_n^p в круге и $H_+^{p,n}$ в полуплоскости не „сравнимы“ при $n \geq 1$.

Пусть

$$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^{2k}, \quad a_k \geq 0, \quad (2.3)$$

причем $a_{2n}, a_0 \neq 0$.

Рассмотрим в пространстве

$$L_{\rho_{2n}}^2(0, +\infty) = \{f: \|f\|_{L_{\rho_{2n}}} = \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 P_{2n}(x) dx \right)^{1/2} < +\infty,$$

оператор

$$S_\lambda(f)(x) = f(x - \lambda), \lambda \geq 0. \quad (2.4)$$

П. Лаксом в известной работе [16] была дана характеристика инвариантных подпространств этого оператора в пространстве $L^2(0, +\infty)$. Из теоремы 1* легко вывести аналогичные описания в пространствах $L^2_{p_{2n}}(0, +\infty)$ для P_{2n} вида (2.3). С этой целью заметим, что пространство $L^2_{p_{2n}}(0, +\infty)$ по теореме Пэли-Винера переводится на пространство $H^{p, n}_+$, и каждое замкнутое инвариантное подпространство оператора $S_\lambda - M \subset L^2_{p_{2n}}$ переходит в замкнутый идеал I_M :

$$I_M \subset H^{p, n}_+ : I_M = \{\hat{\varphi} : \varphi \in M\}, \text{ где } \hat{\varphi}(z) = \int_0^{+\infty} e^{iz} \varphi(t) dt.$$

Следствие 2.1. Пусть M — нетривиальное замкнутое подпространство в $L^2_{p_{2n}}(0, +\infty)$, инвариантное относительно $S_\lambda, \lambda \geq 0$. Тогда

$$M = \{\varphi \in L^2_{p_{2n}}(0, +\infty) : a_\varphi \geq a_M, E_k(\varphi) \supset E_k(I_M), k=0, \dots, n-1,$$

$$G_{I_M} \text{ делит } G_\lambda\},$$

где $a_\varphi = \sup_a \{a : \varphi(t) = 0 \text{ почти всюду в } 0 < t < a\}$, $a_M = \inf_{\varphi \in M} |a_\varphi|$, $G_\lambda \hat{\varphi}$, G_{I_M} определяются как выше.

И в заключение отметим, что используя теоремы 1 и 1* и учитывая результат С. В. Хрущева (см. [17]), легко получить следующую теорему.

Теорема 4. *Каждый замкнутый идеал алгебры X является главным.*

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 5.IX.1980

Յ. Ա. ՇԱՄՈՅԱՆ. Փակ իդեալները անալիտիկ և միջին եզրը ունեցող ֆունկցիաների հանրահայտներում (ամփոփում)

Դիցուք $\lambda_\omega^{(n)}$ -ն և $H^{p, n}_+$ -ն շրջանում անալիտիկ այն ֆունկցիաների հանրահայտներն են, որոնց n -րդ կարգի ածանցյալը պատկանում է համապատասխանաբար $Lip \omega$ և H^p դասերին: Հոդվածում ստացված է նշված հանրահայտներում փակ իդեալների լրիվ բնութագրերը:

F. A. SHAMOYAN. *Closed ideals in the algebras of analytic functions with smooth boundary values (summary)*

Let $\lambda_\omega^{(n)}$ and $H^{p, n}_+$ be the set of all analytic functions f which are n times differentiable in the closed disc analytic in the interior $f^{(n)} \in Lip \omega$ respectively $f^{(n)} \in H^p$. The article gives complete description of closed ideals in these algebras.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. К. Гoffman. Банаховы пространства аналитических функций, М., ИЛ, 1963.
2. A. Beurling. On two problems concerning linear transformations in Hilbert space, Acta Math, 81, 1949.
3. W. Rudin. The closed ideals in an algebra of continuous analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1956.
4. B. A. Taylor and D. L. Williams. Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values, Canad. J. Math., 22, 1970.
5. Б. И. Коренблум. Замкнутые идеалы кольца $A(n)$, Функци. анализ и его прилож., 6, 3, 1972.
6. Б. И. Коренблум. Инвариантные подпространства оператора сдвига во взвешенном гильбертовом пространстве, Мат. сб., 89, № 1, 1972, 110—137.
7. Ф. А. Шамоян. Построение одной специальной последовательности, и структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах аналитических функций, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., 7, № 6, 1972.
8. Ф. А. Шамоян. Структура замкнутых идеалов в некоторых алгебрах функций, аналитических в круге и гладких вплоть до его границы, ДАН Арм.ССР, 60, № 3, 1975, 133—136.
9. A. Matheson. Closed ideals in rings of analytic functions, satisfying Lipschitz conditions, Lecture Notes in Math, 604, 1977.
10. A. Matheson. Approximation of analytic functions, satisfying Lipschitz conditions, Mich. Math. Journal, 25, № 3, 1978.
11. И. Стейн. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., «Мир», 1973.
12. Б. Я. Геронимус. О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге и круговом секторе, Мат. сб., 38 (80), № 3, 1956.
13. И. И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, М., Гостехиздат, 1950.
14. Н. К. Бари, С. Б. Стечкин. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций, Труды ММО, т. 5, 1956.
15. И. П. Натансон. Теория функций вещественной переменной, М., Гостехиздат, 1957.
16. P. Lax. Translation invariant subspaces, Acta Math., 101, 1959.
17. С. В. Хрущев. Всякий идеал $S_A^{(n)}$ является главным, Исслед. по линейн. опер. и теории функц., Записки научн. семин. ЛОМИ, т. 65, 1976, 149—160.