ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 2, 1981 Математика

Р. Л. ШАХБАГЯН

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

В работе М. И. Вишика и А. В. Марченко [1] исследована задача Дирихле для эллиптических и параболических операторов второго порядка на специальном классе бесконечномерных многообразий с краем. Как выяснилось основную роль при изучении краевых задач на бесконечномерных многообразиях с краем играет, как и в конечномерном случае, изучение соответствующей задачи в полупространстве.

Настоящая статья является обобщением результатов работы [1] по разрешимости задачи Дирихле в полупространстве на случай некоторого класса эллиптических операторов порядка $2m$, $m>1$, содержащих комплексный параметр. Построен двусторонний регуляризатор и доказана однозначная разрешимость первой краевой задачи (в соответствующих функциональных пространствах) при достаточно больших значениях входящего в оператор параметра.

1°. Введем некоторые обозначения, используемые в дальнейшем (подробнее см. в [1], [2]).

H — вещественное гильбертово пространство l_2, H_1, по определению, — гильбертово пространство последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_1=\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2\, \sigma_k^{-2}\right)^{1/2},$$

где последовательность $\{\sigma_k\}_{k=1}^{\infty}$ задана, при этом $\sigma_k>0$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^{-2}<+\infty.$$

H_1^+ обозначает полупространство: $H_1^+=\{x\in H_1,\ x_1>0\}$, H^N—подпространство H_1 элементов вида $(y_1, y_2,\cdots, y_N, 0,\cdots)$, P^N — оператор ортогонального проектирования H_1 на H^N.

2°. В полупространстве H_1^+ рассмотрим оператор с символом $P(x, A(x, \xi, \lambda))$ вида

$$P(x, A(x, \xi, \lambda))=\sum_{j=0}^{m} a_j(x)\,[A(x, \xi, \lambda)]^j,\quad x\in H_1^+,\ \xi\in H, \tag{1}$$

где

$$A(x, \xi, \lambda) = (A_1(x)\xi, \xi) + \lambda^2,$$

$$(A_1(x)\xi, \xi) = \xi_1^2 + \sum_{l,k=2}^{\infty} a_{lk}(x)\xi_l\xi_k,$$

λ — комплексный параметр, принадлежащий $C_+ = \{\lambda \in C, \operatorname{Re}\lambda > 0\}$. Матрица $\|a_{lk}\|$ предполагается симметрической, а функции $a_{lk}(x)$ бесконечно дифференцируемы на H_1^+.

Коэффициенты $a_j(x)$, $j = 0, 1, \cdots, m$ предполагаются бесконечно дифференцируемыми и ограниченными на H_1^+, $a_m(x) \neq 0$, $x \in H_1^+$. Пусть выполнено условие эллиптичности: существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\forall x \in H_1^+$ и $\xi \in H$

$$\gamma^{-1}\|\xi\|^2 \leqslant \xi_1^2 + \sum_{l,k} a_{lk}(x)\xi_l\xi_k \leqslant \gamma\|\xi\|^2, \tag{2}$$

где $\|\xi\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2\right)^{1/2}$.

Все результаты статьи остаются в силе, если вместо A рассмотреть символы более общего вида, а именно

$$\tilde{A}(x, \xi, \lambda) = \tilde{A}_0(\xi, \lambda) + \tilde{A}_1(x, \xi),$$

где $\tilde{A}_0(\xi, \lambda) = (\tilde{A}_0\xi, \xi) + \lambda$, $\tilde{A}_0$ удовлетворяет условию эллиптичности (2), а

$$(\tilde{A}_1(x)\xi, \xi) \geqslant 0, \ \forall x \in H_1^+, \ \xi \in H.$$

3°. Введем в рассмотрение классы символов.

Класс $\sum_{A_0}^{q, s}$. Пусть $A_0(\xi, \lambda)$ — фиксированный символ, удовлетворяющий условию (2) (в качестве A_0 можно взять, например, символ бесконечномерного оператора Лапласа: $-\Delta + \lambda^2$.

Функция $Q(x, \xi, \lambda)$, определенная на $H_1(x) \times \{H(\xi)\setminus 0\} \times C_+(\lambda)$ бесконечно дифференцируема.

Пусть, далее $Q(x, \xi^N, \lambda) = Q(x, P_1^N\xi, \lambda)$ — ограничение $Q(x, \xi, \lambda)$ на $H_1(x) \times \{H^N \setminus 0\} \times C_+$.

Обозначим через

$$G(x, z^N, \lambda) = F^{-1}_{\xi^N \to z^N} Q(x, \xi^N, \lambda) = (2\pi)^{-N/2}\int_{H^N} e^{i(\xi^N, z^N)} Q(x, \xi^N, \lambda)\, d\xi^N.$$

Пусть $L_1(H_z^N)$ — пространство, натянутое на вообще говоря обобщенные функции следующего вида: $f(z^N) = f(z^{N_1}) \times \delta('z^{N_2})$, где $'z^{N_2} = (0, \cdots, 0, z_{N_1+1}, \cdots, z_N)$, $z^N = z^{N_1} + 'z^{N_2}$, $N_1 + N_2 = N$, $f \in L_1(R_z^{N_1})$, $\delta(z^{N_2})$ — δ-функция. Норму вводим таким образом:

$$\|f\|_{L_1(H_z^N)} = \int_{R^{N_1}} f(z^{N_1})\, dz^{N_1}.$$

Предположим, что для любого целого неотрицательного N и $\forall\lambda \in \mathbf{C}_+$ соответствующее символу $Q(x, \xi^N, \lambda)$ ядро

$$G^N(x, z^N, \lambda) \in L_1(H_z^N).$$

Положим

$$\|Q(x, \xi, \lambda)\|_0 = \sup_N \|G^N(x, z^N, \lambda)\|_{L_1(H_z^N)}$$

и

$$\|Q(x, \xi, \lambda)\|_0^{(q)} = \sup_{\alpha, \beta} \|A_0^{-\frac{q+|\beta|}{2}}(\xi, \lambda)\, D_x^\alpha \partial_\xi^\beta\, Q(x, \xi, \lambda)\|_0, \tag{3}$$

где верхняя грань берется по всевозможным $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $|\beta| \leqslant \beta_0$, $\operatorname{Re}\lambda > a > 0$.

Обозначим далее

$$|||\, Q(x, \xi, \lambda)\, |||_{s, R}^{(q)} = \sum_{|\alpha| < s} \sup_{\substack{\|x\|_1 < R \\ \operatorname{Re}\lambda > a}} |||\, D_x^\alpha\, Q(x, \xi, \lambda)\, |||_0^{(q)}.$$

Определение. Символ $Q(x, \xi, \lambda)$ принадлежит классу $\sum_{\lambda_0}^{q, s}$, если при любых a, α_0, β_0 выполняются следующие условия:

1. $$|||\, Q(x, \xi, \lambda)\, |||_{s, \infty}^{(q)} < +\infty \tag{4}$$

и $$\forall N \quad |||\, Q(x^N, \xi, \lambda)\, |||_{s, \infty}^{(q)} < +\infty,$$

2. $$\lim_{N \to \infty} |||\, Q(x, \xi, \lambda) - Q(x^N, \xi, \lambda)\, |||_{s, R}^{(q)} = 0, \tag{5}$$

$$\forall R,\ 0 < R < +\infty.$$

Топология вводится следующим образом:

Последовательность символов $\{Q_k(x, \xi, \lambda)\}_{k=1}^{\infty}$, $Q_k \in \sum_{\lambda_0}^{q, s}$ сходится к нулю, если

а) $$\sup_k |||\, Q_k(x, \xi, \lambda)\, |||_{s, \infty}^{(q)} < +\infty,$$

б) $$\lim_{k \to \infty} |||\, Q_k(x, \xi, \lambda)\, |||_{s, R}^{(q)} = 0,\ \forall R,\ 0 < R < +\infty.$$

В связи с изучением краевой задачи (см. [1]), введем в рассмотрение класс $'\sum_{\lambda_0; (\xi', \lambda)}^{q, s}$.

Обозначим $\xi = (\xi_1, \xi')$, $\xi' = (\xi_2, \xi_3, \cdots)$.

По определению, символ $S(x, \xi') \in {}'\sum_{\lambda_0}^{q, s}$, если выполнены условия (4), (5), при этом преобразование Фурье берется по $(\xi')^{N-1} = (\xi_2, \xi_3, \cdots, \xi_N)$, а под знаком нормы в (3) стоит дифференцирование по ξ'.

4°. Введем в рассмотрение функциональные пространства, связанные с изучением краевой задачи.

Через C_Φ обозначим пространство бесконечно дифференцируемых финитных цилиндрических функций.

Пространства $CL^s(H_1)$ и $CL^s(H_1^+)$.

По определению, функция $f \in CL^s(H_1)$, если $f \in C^s$ и для нее существует последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ цилиндрических функций, $f_n \in C_\Phi$ такая, что

$$1^\circ. \quad \sup \|f_n\|_{s,\infty} \leqslant M < +\infty, \; M - \text{некоторая константа,} \tag{6}$$

$$2^\circ. \quad \|f_n - f\|_{s,R} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \;\; \forall R > 0, \tag{7}$$

где

$$\|f\|_{s,R} = \sum_{|\alpha|<s} \|D^\alpha f\|_{0,R}, \; 0 < R < \infty,$$

$$\|f\|_{0,R} = \sup_{\|x\|_1 < R} |f(x)|, \; 0 < R \leqslant \infty.$$

При выполнении условий (6), (7) последовательность $f_n \in CL^s(H_1)$ будем считать сходящейся к f.

Функция $f \in CL^s(H_1^+)$, по определению, если она является сужением на H_1^+ функции пространства $CL^s(H_1)$.

5°. Обозначим через $\hat{P}$ оператор, порожденный символом (1).

Теорема 1. *Оператор $\hat{P}$ допускает замыкание в $CL^\circ(H_1^+)$.*

Доказательство. Очевидно оператор $\hat{P}$ определен на цилиндрических функциях класса $C_\Phi(\overline{H}_1^+)$ и отображает его в пространство $CL^\circ(\overline{H}_1^+)$.

Рассмотрим последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $u_n \in C_\Phi(\overline{H}_1^+)$, стремящуюся к нулю в $CL^0(\overline{H}_1^+)$, такую, что $\hat{P}u_n(x) \to f(x)$ также в $CL^\circ(\overline{H}_1^+)$. Наша цель доказать, что $f \equiv 0$ в $\overline{H}_1^+$.

Следуя схеме доказательства, проведенного в [2], построим гладкое продолжение функций $u_n(x)$ на пространство H_1. Пусть lu_n есть это продолжение, причем $lu_n \in C^{2m}(H_1)$, а lf — продолжение функции $f \in CL^\circ(\overline{H}_1^+)$ на пространство H_1.

Имеем

$$lu_n \to 0 \text{ в } CL^\circ(H_1) \text{ и } \hat{P}lu_n \to lf \text{ также в } CL^\circ(H_1). \tag{8}$$

(Это очевидным образом следует из свойства ограниченности оператора продолжения).

Построим последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in C_\Phi(H_1)$, обладающую следующими свойствами:

$$\varphi_n \to 0 \text{ в } CL^0(H_1) \text{ и } \hat{P}\varphi_n \to lf \text{ в } CL^0(H_1).$$

Докажем возможность построения такой последовательности.

Пусть $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\varepsilon_n > 0$ — последовательность, стремящаяся к нулю. Для каждой функции lu_n выберем $\varphi_n \in C_\Phi(H_1)$ так, чтобы выполнялись условия

$$|D^\alpha \varphi_n - D^\alpha lu_n| < \varepsilon_n \gamma_\alpha, \tag{9}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n, 0, \cdots)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \leqslant 2m$, а $\gamma_\alpha > 0$ — некоторые постоянные, удовлетворяющие условию

$$\sum_{|\alpha|<2m} \gamma_\alpha < +\infty. \tag{10}$$

Из ограниченности оператора продолжения вытекает, что $\varphi_n \to 0$ в $CL^0(H_1)$. Далее, в силу линейности оператора $\hat{P}$ можем записать

$$\hat{P}\varphi_n = \hat{P}\, lu_n + \hat{P}(\varphi_n - lu_n). \tag{11}$$

Оценим

$$|\hat{P}(\varphi_n - lu_n)| \leqslant K\varepsilon_n \left(|\lambda|^{2m} + \sum_{|\alpha|<2m} \gamma_\alpha \right),$$

где $K > 0$ — некоторая постоянная.

Отсюда, переходя к пределу в (11), в силу (8) и (10) имеем $\hat{P}\varphi_n \to lf$ в $CL^0(H_1)$.

Далее, из оценки

$$|A_0^{-\frac{q+|\beta|}{2}}(\xi, \lambda)\, D_x^\alpha \partial_\xi^\beta P(x, A(x, \xi, \lambda))| \leqslant C\|\xi\|^{-q+2m}$$

вытекает конечность нормы

$$\|P(x, A(x, \xi, \lambda))\|_0^{(q)} < +\infty,$$

а также норм $\|| P(x, A(x, \xi, \lambda)) \||_{s, R}^{(q)}$ для любого $0 < R < +\infty$ и $s > 0$ если положить $q = 2m + \varepsilon$. Иными словами символ $P \in \sum_{A_0}^{2m+\varepsilon, s}$. Но, тогда, в силу теоремы 6.1 из [3], оператор $\hat{P}$ допускает замыкание в $CL^0(H_1)$, при $s > 2(m+1) + \varepsilon$, то есть $lf = 0$ в H_1, а отсюда следует, что ее сужение на $H_1^+ : f(x) = 0$ в H_1^+. Теорема доказана.

6°. Краевая задача. Для оператора $\hat{P}$ в полупространстве рассмотрим задачу Дирихле:

$$\hat{P}u(x) = f(x), \; x \in H_1^+, \tag{12}$$

$$\left.\frac{\partial^j u}{\partial x_1^j}\right|_{x_1=0} = 0, \; j = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{13}$$

где $f \in CL^0(H_1^+)$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ оператор, соответствующий краевой задаче (12), (13):

$$\mathfrak{M}\, u(x) = \left\{ \hat{P}u(x), \; x \in H_1^+, \left.\frac{\partial^j u}{\partial x_1^j}\right|_{x_1=0}, \; j = 0, 1, \cdots, m-1 \right\}.$$

Область определения замыкания оператора $\mathfrak{M}$ обозначим $\Omega_{\mathfrak{M}}$, а через $\Omega^0_{\mathfrak{M}}$ обозначим следующее множество:

$$\Omega^0_{\mathfrak{M}} = \left\{ u \in \Omega_{\mathfrak{M}}, \left.\frac{\partial^j u}{\partial x^j_u}\right|_{x_1=0} = 0, j = 0, 1, \cdots, m-1 \right\}.$$

Построим регуляризатор задачи (12), (13).

Пусть $P_0(x, \xi, \lambda)$ — главная часть символа P, т. е.

$$P_0(x, \xi, \lambda) = a_m(x)\,[A(x, \xi, \lambda)]^m, \tag{14}$$

а

$$P_1(x, \xi, \lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(x)\,[A(x, \xi, \lambda)]^j. \tag{15}$$

Поскольку $a_m(x) \neq 0$, то не ограничивая общности, можно считать, что $a_m(x) \equiv 1$.

Представим символ $P_0(x, \xi, \lambda)$ в виде:

$$P_0(x, \xi, \lambda) = (\xi_1 + iS(x, \xi', \lambda))^m\,(\xi_1 - iS(x, \xi', \lambda))^m, \tag{16}$$

где

$$S(x, \xi', \lambda) = \left(\sum_{j,k=2}^{\infty} a_{jk}\,\xi_j\,\xi_k + \lambda^2 \right)^{1/2}.$$

Обозначим

$$A_{\pm}(x, \xi, \lambda) = (\xi_1 \pm iS(x, \xi', \lambda))^m.$$

По аналогии с конечномерным случаем правый и левый регуляризатор задачи (12), (13) будем искать в виде

$$\hat{R}f = P^{+}\,{}^{\wedge}\,(\psi(x_1)\,A_{+}^{-1}(x, \xi, \lambda))\,\theta(x_1)\,{}^{\wedge}\,(\psi(x_1)\,A_{-}^{-1}(x, \xi, \lambda)\,lf^{*}, \tag{17}$$

где lf—гладкое продолжение функции $f \in CL^0(H_1^+)$ на H_1, $lf \in CL^0(H_1)$, $\theta(x_1)$ — функция Хевисайда, а $\psi \in C_0^{(\infty)}(R^1)$, $\psi(x_1) \equiv 1$, при $x_1 > -\frac{\varepsilon}{2}$, $\psi(x_1) \equiv 0$, при $x_1 \leqslant -\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, P^+ —оператор сужения функции, заданной на H_1, на полупространство H_1^+.

В силу теоремы 1.2 из [1] символы $\psi(x_1)\,A_{\pm}^{-1}(x, \xi, \lambda)$ принадлежат классу $\sum_{A_0(\xi', \lambda)}^{-m+\varepsilon, s}$ (отличающемуся, по определению, от класса $\sum_{A_0}^{q, s}$ лишь тем, что эталонный оператор A_0 зависит только от ξ', т. е. не зависит от ξ_1).

Естественно считать упомянутые символы продолженными нулем для $\{x = (x_1, x') \in H_1,\ x_1 < -\varepsilon\}$.

Теорема 2. *Оператор $\hat{R}$, задаваемый формулой* (17), *отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в пространство $CL^{2m}(H_1^+) \cap \Omega^0_{\mathfrak{M}}$,*

---

* Можно доказать, что $\hat{R}$ не зависит от конкретного выбора оператора продолжения.

Предварительно докажем лемму.

Лемма 1. *Оператор* $P^+\psi(x_1)\hat{A}_+^{-1}\theta(x_1)$ *отображает пространство* $CL^{2m}(H_1)$ *в пространство* $CL^{2m}(H_1^+)\cap\mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}}$.

При доказательстве леммы нам понадобится результат, обобщающий теорему 3.2 из [3], на случай операторов высокого порядка.

Теорема 3. *Оператор* $\hat{Q}$, *порожденный символом* $Q(x,\xi)\in\in\Sigma_{A}^{p,s}{}_{0}^{m}$, *продолжается с пространства* C_Φ *до непрерывного оператора, отображающего пространство* $CL^s(H_1)$ *в пространство* $CL^+(H_1)$, *где* $s=t+r$

$$r=\begin{cases}[p]+2m, & при\ p>0\\ 0, & при\ p\leqslant 0\end{cases}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 3.2 из [3] и поэтому мы его опускаем.

Доказательство леммы 1 будет опираться также на теорему 1.2 работы [1]. Приведем ее формулировку.

Теорема А. *Если символ* $P(x,\xi')\in{}'\Sigma^{p,s}_{A_0(\xi',\lambda)}$, *то символы*

$$Q(x,\xi,\lambda)=\frac{P(x,\xi')}{(\xi_1\pm iS(x,\xi',\lambda))^k\,S^l(x,\xi',\lambda)}$$

принадлежат классу $\Sigma^{q,s}_{A_0}$, *где* $q=p-k-l-\varepsilon$, $k\in Z_+$, $\varepsilon>0$ — *произвольное число. При этом справедлива оценка*

$$\|A_0(\xi',\lambda)^{-q/2}Q(x,\xi,\lambda)\|_0\leqslant M|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\varepsilon_1/2},\ 0<\varepsilon_1<\varepsilon,\ \mathrm{Re}\,\lambda>a>0.$$

Доказательство леммы. Рассмотрим последовательность функций $[\varphi_n]_{n=1}^\infty$, $\varphi_n\in C_\Phi$, сходящуюся в $CL^{2m}(H_1)$ к функции $f\in CL^{2m}(H_1)$.

Обозначим через

$$v_N(x^N)=P^+\hat{A}_+^{-1}(x^N,\xi^n,\lambda)\,\theta\varphi_n\ \ (N>n) \tag{18}$$

(здесь мы опустили сомножитель $\psi(x_1)$, поскольку перед ним стоит оператор P^+).

Докажем, что последовательность v_N сходится в $CL^{2m}(H_1^+)$. С этой целью рассмотрим для $\forall\alpha$, $|\alpha|\leqslant 2m$ производную $D^\alpha v_N$:

$$D^\alpha v_N=\sum_{\substack{\alpha_1+|\alpha'|+|\alpha''|=|\alpha|\\ \alpha_1\geq 1}}C_{\alpha_1,\alpha',\alpha''}P^+D^{\alpha'}\hat{A}_+^{-1}\frac{\partial^{\alpha_1}\theta(x_1)}{\partial x_1^{\alpha_1}}D^{\alpha''}\varphi_n+$$

$$+\sum_{|\alpha'|+|\alpha''|=|\alpha|}C_{\alpha',\alpha''}P^+D^{\alpha'}\hat{A}_+^{-1}\theta(x_1)D^{\alpha''}\varphi_n \tag{19}$$

(в первой сумме производная $\dfrac{\partial^{\alpha_1}\theta}{\partial x_1^{\alpha_1}}$ понимается в смысле теории обобщенных функций). Слагаемые первой суммы выражения (19) можно вычислить следующим образом. Пусть $\varphi(x_1)$— произвольная финитная бесконечно дифференцируемая функция: $\varphi \in C_0^{(\infty)}(R_1)$.

Тогда

$$< \frac{\partial^{\alpha_1}\theta}{\partial x_1^{\alpha_1}} D^{\alpha^{\prime\prime}} \varphi_n, \varphi > = < \frac{\partial^{\alpha_1}\theta}{\partial x_1^{\alpha_1}}, D^{\alpha^{\prime\prime}} \varphi_n \cdot \varphi > =$$

$$= D^{\alpha^{\prime\prime}} \varphi_n (0, (x')^{n-1})\ \delta^{\alpha_1 - 1}_{(x_1)}. \tag{20}$$

Заметим, что символ $A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda) = (\xi_1 + iS(x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda))^{-m}$ как функция от ξ_1 аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Im} \xi_1 > 0$ и удовлетворяет условию гладкости, приведенному в [4], откуда следует, что $v_N \in C^{(\infty)}(H_1^+)$ и, следовательно, $CL^{2m}(H_1^+)$.

Символы $A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)$, $\dfrac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)$, а также $\xi_1^{\alpha_1} A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda)$, $\forall \alpha_1 \leqslant m-1$ аналитичны и ограничены в полуплоскости $\operatorname{Im} \xi_1 > 0$, откуда следует (см. [4]), что $v_N \in \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}$. Таким образом, установили, что $v_N \in CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}$.

Перейдем к доказательству сходимости $\{v_N\}_{N=1}^{\infty}$.

Поскольку функция $A_+^{-1} \in \sum_{A_0(\xi^n, \lambda)}^{-m+\varepsilon, \delta}$, то для любого целого $s > 0$ имеем в силу (5)

$$\sum_{|\alpha| \leqslant 2m} \| D_x^{\alpha} (A_+^{-1}(x^N, \xi^n, \lambda) - A_+^{-1}(x, \xi^n, \lambda)) \|_0 \underset{N \to \infty}{\longrightarrow} 0, \tag{21}$$

откуда, в частности, следует сходимость последовательности v_N, то есть существование предела $\lim\limits_{N \to \infty} v_N(x^N)$ в $CL^0(H_1^+)$.

Обозначим

$$\lim_{N \to \infty} v_N(x^N) = v^{(n)}(x). \tag{22}$$

Рассмотрим вначале вторую сумму выражения (19). Пусть

$$v_N^{(1)} \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{|\alpha'| + |\alpha''| = |\alpha|} c_{\alpha', \alpha''} P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1} \theta(x_1) D^{\alpha''} \varphi_n. \tag{23}$$

Из (21) и того, что $\varphi_n \to f$ в $CL^{2m}(H_1)$ непосредственно следует, что

$$\lim_{N \to \infty} v_N^{(1)} = \sum_{|\alpha'| + |\alpha''| = |\alpha|} c_{\alpha', \alpha''} P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1}(x, \xi^n, \lambda)\, \theta D^{\alpha''} \varphi_n \tag{24}$$

(предел понимается в смысле сходимости в $CL^0(H_1^+)$), ибо $\forall R > 0$,

$$\lim_{N \to \infty} \sup_{x \in S_R^+} \left\| v_N^{(1)} - \sum_{|\alpha'| + |\alpha''| = |\alpha|} c_{\alpha', \alpha''} P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1}(x, \xi^n, \lambda)\, \theta D^{\alpha''} \varphi_n \right\|_0 = 0,$$

где $S_R^+ = \{x \in H_1,\ x_1 > 0,\ \|x\|_1 \leqslant R\}$.

Рассмотрим теперь первую сумму выражения (19), состоящую из слагаемых вида

$$v_N^{(2)} = P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1} D^{\alpha''} \varphi_n (0, (x')^{n-1}) \delta^{(\alpha_1-1)}(x_1). \tag{25}$$

Перепишем (25) следующим образом:

$$v_N^{(2)} = P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1} \hat{A}_0^{-\varepsilon\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)} \hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} D^{\alpha''} \varphi_n (0, (x')^{n-1}) \delta^{(\alpha_1-1)}(x_1). \tag{26}$$

Обозначим через

$$g_n^{(\alpha'')}((x')^{n-1}) \overset{\text{def}}{=} \hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} D^{\alpha''} \varphi_n(0, (x')^{n-1}).$$

Тогда (26) примет вид

$$v_N^{(2)} = P^+ D^{\alpha'} \hat{A}_+^{-1} \hat{A}_0^{-\varepsilon\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)} g_n^{(\alpha'')}((x')^{n-1}) \overset{\text{def}}{=} \hat{G}_N g_n^{(\alpha'')}. \tag{27}$$

Докажем теперь, что оператор $\hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}$ отображает пространство $CL^{2m-|\alpha''|}(H_1)$ в $CL^0(H_1)$. Действительно, пусть $\varepsilon_1 > \varepsilon$, тогда очевидно, что символ $A_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} \in \sum_{A_\varepsilon(\xi',\lambda)}^{2\varepsilon_1, s} m-\frac{\alpha''}{2}$. Выбирая теперь $\varepsilon_1 > 0$ настолько малым, чтобы $2\varepsilon_1 < 1$ и применяя теорему 3, получим

$$\hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} : CL^{2m-|\alpha''|}(H_1) \to CL^0(H_1).$$

Отсюда выводим, что оператор $\hat{A}_0^{\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} D^{\alpha''}$ отображает непрерывным образом пространство $CL^{2m}(H_1)$ в $CL^0(H_1)$.

Символ $D^{\alpha'} A_+^{-1} A^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}$ представляет собой сумму, слагаемые которой имеют вид

$$\frac{P(x^N, (\xi')^{n-1}) A_0^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}((\xi')^{n-1}, \lambda)}{(\xi_1 + iS(x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda))^k S^l(x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda)} \equiv$$

$$\equiv Q_{k,l}(x^N, \xi^n, \lambda) A_0^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}, \tag{28}$$

где

$$Q_{k,l}(x^N, \xi^n, \lambda) = \frac{P(x^N, (\xi')^{n-1})}{(\xi_1 + iS)^k S^l}.$$

Ядра этих операторов

$$G_{k,l}^N(x^N, z_1, (z')^{n-1}) = F^{-1}_{\xi^n \to z^n} Q_{k,l} A_0^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}((\xi')^{n-1}, \lambda)$$

представляют собой операторы типа поверхностного потенциала. Докажем, что они обладают следующими свойствами:

а) $\|G^N_{k,l}\|'_0 = \int\limits_{R^{n-1}} |G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1})| \, d(z')^{n-1} \leqslant K, \ \forall x^N \in R^N, x_1, n,$

б) $\sup\limits_{\|x\|_1 < R} \|G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1}) - G^{N+s}_{k,l}(x^{N+s}, x_1, (z')^{n-1}\|'_0 \underset{N,\, s \to \infty}{\longrightarrow} 0,$

с) $\sup\limits_{i \geqslant 2} \int\limits_{R^{n-1}} |z_i^2 G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1})| \, d(z')^{n-1} \leqslant M < +\infty, \ \forall x^N, N, n.$

Докажем свойство а). С этой целью представим $Q_{k,l} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)}$ в виде

$$Q_{k,l} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} = \frac{P(x^N, (\xi')^{n-1})}{(\xi_1 + iS)^k S^{l-\varepsilon_1}} S^{\varepsilon_1} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}. \tag{29}$$

Как следует из леммы 3.3 работы [3]

$$\|S^{\varepsilon_1} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}\|_0 \leqslant C \tag{30}$$

при $\varepsilon_1 < (2m - |\alpha''|)\varepsilon$.

Рассмотрим обратное преобразование Фурье по переменной ξ_1 функции $\dfrac{P(x^N, (\xi')^{n-1})}{(\xi_1 + iS)^k S^{l-\varepsilon_1}}$.

Легко видеть (ср. [3]), что оно вычисляется по формуле

$$\widetilde{G}^N_{k,l}(x^N, z_1, (\xi')^{n-1}, \lambda) \overset{\text{def}}{=} F^{-1}_{\xi_1 \to z_1} \frac{P(x^N, (\xi')^{n-1})}{(\xi_1 + iS)^k S^{l-\varepsilon_1}} =$$

$$= C_1 z_1^{k-1} e^{-Sz_1} P(x^N, (\xi')^{n-1}) S^{-l+\varepsilon_1}(x^N, (\xi')^{n-1}, \lambda), \tag{31}$$

при $z_1 \geqslant 0$, а при $z_1 \leqslant 0$ $\widetilde{G}^N_{k,l} \equiv 0$; $C_1 > 0$ — постоянная.

Заметим, что $P \in {}'\sum^{2|\alpha'|+\varepsilon}_{A_0}$, где $|\alpha'| \leqslant 2m - 1$.

Представим $\widetilde{G}^N_{k,l}$ в виде

$$\widetilde{G}^N_{k,l} = C_1 z_1^{k-1} e^{-Sz_1} S^{-l+\varepsilon_1+\rho} S^{-\rho} P,$$

где $\rho > 4m - 2 + \varepsilon$. Тогда легко получить, что

$$\|S^{-\rho} P\|'_0 \leqslant C_2. \tag{32}$$

Далее проводя оценку, аналогичную оценке 1.14 работы [1], получаем

$$\|z_1^{k-1} e^{-Sz_1} S^{-l+\varepsilon_1+\rho}\|'_0 \leqslant C_3. \tag{33}$$

Из неравенств (30), (32) и (33) вытекает оценка для $G^N_{k,l}$:

$$\|G^N_{k,l}\|'_0 \leqslant \|z_1^{k-1} e^{-Sz_1} S^{-l+\varepsilon_1+\rho}\|'_0 \|S^{-\rho} P\|'_0 \times$$

$$\times \|S^{\varepsilon_1} A_0^{-\left(m - \frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}\|'_0 \leqslant C_3 \cdot C_2 \cdot C, \tag{34}$$

при этом участвующие в неравенствах константы не зависят от N и n. Свойство а) доказано.

Докажем теперь свойство б), а именно, покажем, что

$$\sup_{\|x\|_1<R} \| G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1}) - G^{N+s}_{k,l}(x^{N+s}, x_1, (z')^{n-1}) \|'_0 \to 0 \qquad (35)$$

при N, $s \to \infty$.

Действительно, из теоремы A легко вывести, что символы $Q_{k,l} A_0^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}$, соответствующие ядрам $G^N_{k,l}$, принадлежат классу $\sum^{q,s}_{A_0}$, где $q = 2|\alpha'| - k - \rho - (2m - |\alpha'| + 1)\varepsilon$.

Далее, в силу свойства (5) определения класса $\sum^{q,s}_{A_0}$ принадлежащие им символы „слабо" зависят от далеких переменных, откуда непосредственно следует (35). Свойство б) также установлено.

Докажем, наконец, свойство с). Из принадлежности символа $Q_{k,l} A_0^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon}$ классу $\sum^{q,s}_{A_0}$ следует, в частности, что

$$\sup_{l>2} \left\| \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} Q_{k,l} A_0^{-\left(m-\frac{|\alpha''|}{2}\right)\varepsilon} \right\|'_0 \leqslant M < +\infty,$$

откуда получаем, что

$$\sup_{l>2} \int\limits_{R^{n-1}} |z_l^2 G^N_{k,l}(x^N, x_1, (z')^{n-1})| \, d(z')^{n-1} \leqslant M_1 < +\infty$$

для любых N, x^N и n.

Из свойств а) и б) следует сходимость последовательности $v_N^{(2)}$ в $CL^0(H_1)$. Объединяя это с (24) получим, что $\{v_N\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в $CL^{2m}(H_1^+)$ к $v^{(n)}(x)$, т. е. $\lim\limits_{N\to\infty} v_N(x^N) = v^{(n)}(x)$ в смысле сходимости в $CL^{2m}(H_1^+)$. Таким образом, доказано, что $v^{(n)} \in \mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}} \cap CL^{2m}(H_1^+)$.

Докажем, наконец, сходимость последовательности $\{v^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$. Подставляя в (18), (23) и (25) x вместо x^N и пользуясь тем, что соответствующие символы принадлежат классам $\sum^{p,s}_{A_0}$ (с соответствующими p) замыканием легко получить, что $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = w(x)$ (где предел понимается в смысле сходимости в пространстве $CL^{2m}(H_1^+)$. При этом сходимость последовательности $\{v_2^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$, где $v_2^{(n)} \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{N\to\infty} v_N^{(2)}$, является следствием того, что условия а)—с) обеспечивают существование семейства мер $\mu(x, x_1, dz')$, заданных на H_1 с равномерно ограниченной вариацией (по z') таких, что их проекции на $R^{n-1}_{(z')_{n-1}}$ порождаются плотностями $G_n(x, x_1(z')^{n-1})$.

Воспользовавшись полнотой пространства $CL^{2m}(H_1^+)$ получаем, что $w(x) = P^+ \hat{A}_+^{-1}(x, \xi, \lambda)\, \theta(x_1) f$ принадлежит пространству $CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{Q}^0_{\mathfrak{M}}$. Лемма 1 доказана.

Следствие. В условиях леммы 1 справедливо следующее утверждение: оператор $\overset{\bullet}{R}$, задаваемый формулой (17), непрерывным образом отображает пространство $CL^0(H_1^+)$ в себя.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. Следует рассмотреть последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n \in CL^{2m}(H_1^+)$, сходящуюся к f в $CL^0(H_1^+)$ при $n \to \infty$. Тогда по лемме $\overset{\bullet}{R} f_n \in CL^{2m}(H_1^+)$, совершая предельный переход, легко получить утверждение о том, что $\overset{\bullet}{R} : CL^0(H_1^+) \to CL^0(H_1^+)$.

Доказательство теоремы 2. Оператор продолжения l отображает пространство $CL^{2m}(H_1^+)$ в $CL^{2m}(H_1)$:

$$l : CL^{2m}(H_1^+) \to CL^{2m}(H_1). \tag{36}$$

Далее, поскольку символ $A_-^{-1} \in \sum_{A_0}^{-m+\varepsilon, s}$, а $\psi \in C_0^{(\infty)}(R^1)$, то в силу теоремы 3

$$\psi(x_1)\overset{\bullet}{A}{}^{-1} : CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_1) \tag{37}$$

(здесь мы воспользовались тем, что $p = -m + \varepsilon < 0$).

Применяя лемму 1 имеем

$$P^+ \psi(x_1)\overset{\bullet}{A}{}_+^{-1}\theta : CL^{2m}(H_1) \to CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}. \tag{38}$$

Из (36) — (38) следует, что оператор

$$\overset{\bullet}{R} : CL^{2m}(H_1^+) \to CL^{2m}(H_1^+) \cap \mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}},$$

при этом $\overset{\bullet}{R}$ непрерывен в смысле топологии пространства $CL^{2m}(H_1^+)$. Теорема 2 доказана.

7°. В этом пункте будет сформулирован и доказан основной результат статьи.

Теорема 4. *Пусть оператор P с символом, задаваемым формулой* (1), *удовлетворяет условию* (2). *Тогда при достаточно больших* $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ *оператор* $\overset{\bullet}{R}$, *определяемый формулой* (17), *является двусторонним регуляризатором задачи* (12), (13), *то есть имеют место представления*

$$\mathfrak{M} \circ \overset{\bullet}{R} = E + \overset{\bullet}{T}_1, \text{ где } \|\overset{\bullet}{T}_1\|_{C(H_1^+)} < 1 \tag{39}$$

$$\overset{\bullet}{R} \circ \mathfrak{M} = E + \overset{\bullet}{T}_2, \text{ где } \|\overset{\bullet}{T}_2\|_{C(H_1^+)} < 1, \tag{40}$$

операторы $\overset{\bullet}{T}_i$, $i = 1, 2$ *отображают* $\mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}$ *в себя.*

При доказательстве теоремы будет существенно использована формула композиции псевдодифференциальных операторов с символами, принадлежащими классам $\sum_{A_0}^{p, s}$ и оценка для остаточного члена.

Приведем формулировку соответствующих теорем.

Теорема В. ([1], теорема 2.3). *Пусть символы* $Q_i(x, \xi, \lambda)$, $i=1, 2$ *принадлежат классам* $\sum_{A_0}^{p_i, s}$, *где* s *достаточно велико. Тогда оператор* $\hat{Q}=\hat{Q}_1\circ\hat{Q}_2$ *порождается символом* $Q(x, \xi, \lambda)$, *принадлежащим классу* $\sum_{A_0}^{p, s}$, *где* $p=p_1+p_2$, *при этом имеет место разложение*

$$Q(x, \xi, \lambda)=\sum_{|\alpha|<r}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha Q_1(x, \xi, \lambda)\, D_x^\alpha Q_2(x, \xi, \lambda)+Q_3(x, \xi, \lambda) \tag{41}$$

и $Q_3\in\sum_{A_0}^{p_3, s}$ *для любого* $p_3>p_1+p_2-r$.

Замечание. Теорема остается справедливой и в том случае, когда $Q_1=S^{p_1}$, $Q_2\in\sum_{A_0}^{p_2, s}$, а также при $Q_1\in\sum_{A_0}^{p_1, s}$, $Q_2=\xi_1^2+S^2$.

Теорема С. ([1], теорема 2.4). *Пусть* $Q_1\in\sum_{A_0}^{p_1}(\xi', \lambda)$, $Q_2(x, \xi', \lambda)=S^{p_2}(x, \xi', \lambda)$. *Если* $\rho=p_1+p_2-r$, *то оператор* $\hat{Q}_3$ (*остаточный член в формуле* (41) *порождается мерой* $\mu(x, dz, \lambda)$, *при этом*

$$\mathrm{Var}_z\,\mu_3(x, dz, \lambda)=\|Q_3(x, \xi, \lambda)\|_0\leqslant C|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{\rho}{2}+\varepsilon} \tag{42}$$

($\varepsilon>0$ *достаточно мало*).

Доказательство теоремы 4. Доказательство теоремы в идейном отношении близко доказательству теоремы 3.2 работы [1]. Установим формулу (39) (представление (40) доказывается аналогично). Пусть вначале $f\in CL^{2m}(H_1^+)$, тогда в силу теоремы 2 $\hat{R}f\in CL^{2m}(H_1^+)$. Применим к $\hat{R}$ слева дифференциальный оператор $\hat{P}_0$, определенный по символу (16).

Имеем

$$\hat{P}_0\circ P^+\,\hat{}\,(\psi(x_1)A_+^{-1})\,\theta(x_1)\,\hat{}\,(\psi(x_1)A_-^{-1})\,lf=$$

$$=P^+(\hat{A}_+\circ\hat{A}_-\,\hat{}\,(\psi(x_1)A_+^{-1})\,\theta(x_1)\,\hat{}\,(\psi(x_1)A_-^{-1})\,lf.$$

Воспользовавшись теоремой В и замечанием к ней, а также тем, что $A_+^{-1}\in\sum_{A_0}^{-m+\varepsilon, s}$, можно записать

$$P^+(\hat{A}_+\circ\hat{A}_-(\psi(x_1)\hat{A}_+^{-1})=P^+(\hat{A}_-+\sum_{l=-m+1}^{m}\hat{C}_{-l}, \tag{43}$$

где символы C_{-l} в соответствии с формулой композиции имеют вид

$$C_{-l}=\sum_{|\alpha|=l+m}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha P_0(x, \xi, \lambda)\, D_x^\alpha A_+^{-1}(x, \xi, \lambda). \tag{44}$$

Рассмотрим теперь операторы $P^+(\hat{A}_-\theta\hat{A}_-^{-1})$ и $P^+(\hat{C}_{-l}\theta\hat{A}_-^{-1})$, $i=-m+1,\cdots, m$.

Имеем

$$P^{+}(\hat{A}_{-}\theta\hat{A}_{-}^{-1})=P^{+}(E+\sum_{l=1}^{m}\hat{C}'_{-l}+C'_{-(m+1)} \tag{45}$$

(здесь мы воспользовались тем, что оператор $\hat{A}_{-}$ — дифференциальный по переменной x_1), а символы

$$C'_{-l}=\sum_{|\alpha|=l}\partial_{\xi}^{\alpha}A_{-}(x,\xi,\lambda)D_{x}^{\alpha}A_{-}^{-1},$$

$C'_{-(m+1)}$ — символ остаточного члена. В силу теоремы A и приведенной там оценки, символы $C'_{-l}\in\sum_{A_0}^{-l+\varepsilon,s}$, причем справедливо неравенство

$$\|C'_{-i}(x,\xi,\lambda)\|_0<M|\operatorname{Re}\lambda|^{-\frac{i}{2}+\varepsilon},\ i=1,2,\cdots,m+1. \tag{46}$$

Операторы $P^{+}(\hat{C}_{-i}\theta\hat{A}_{-}^{-1})$, $(i=-m+1,\cdots,m)$ разделим на две группы. В первую группу включим операторы с индексами $1\leqslant i\leqslant m$, а во вторую — остальные.

Заметим, что операторы $\hat{C}_{-l}$ первой группы порождаются мерами, поскольку их символы $C_{-l}\in\sum_{A_0}^{-l+\varepsilon,s}\subset\sum_{A_0}^{0,0}$ (см. [1], теорема 2.2).

При этом справедлива оценка

$$\|C_{-l}A_{-}^{-1}\|_0\leqslant C|\operatorname{Re}\lambda|^{-\frac{l+m}{2}+\varepsilon}.* \tag{47}$$

Операторы второй группы представим в виде

$$\begin{gathered}P^{+}(\hat{C}_{-l}\theta\hat{A}_{-}^{-1})=P^{+}(\hat{C}_{-l}\circ\hat{A}_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}}\theta A_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}}\circ\hat{A}_{-}^{-1})=\\=P^{+}\widehat{(C_{-l}A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}})}\theta\hat{A}_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}}\circ\hat{A}_{-}^{-1},\ i=-m+1,\cdots,0,\end{gathered} \tag{48}$$

где символ оператора $\hat{A}_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}}$ есть $A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}}(\xi',\lambda)$.

Заметим, что $C_{-l}A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}}\in\sum_{A_0}^{\varepsilon-\varepsilon_1,s}$ и при $\varepsilon_1>\varepsilon$ $C_{-l}A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}}\in\sum_{A_0}^{0,0}$, откуда следует, что соответствующие операторы порождаются мерами, при этом справедлива оценка

$$\|C_{-l}A_0^{\frac{l-\varepsilon_1}{2}}\|_0\leqslant C. \tag{49}$$

В соответствии с формулой композиции (41) можем записать, что

$$\hat{A}_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}}\hat{A}_{-}^{-l}=\widehat{\ }A_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}}A_{-}^{-1}+Q_{-(m+l+1)+\varepsilon+\varepsilon_1},$$

---

* Здесь и далее через C будут обозначаться различные константы.

при этом символы $A_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}} A_-^{-1} \in \Sigma_{A_\varepsilon}^{-(m+l)+\varepsilon_1+\varepsilon}$ и при достаточно малых ε, $\varepsilon_1>0$ имеем $-(m+l)+\varepsilon+\varepsilon_1<0$, если $-m+1\leqslant l\leqslant 0$. Следовательно, операторы $\widehat{A_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}} A_-^{-1}}$ и $\hat{Q}_{-(m+l+1)+\varepsilon+\varepsilon_1}$ также порождаются мерами, при этом имеют место оценки

$$\|A_0^{\frac{\varepsilon_1-l}{2}} A_-^{-1}\|_0\leqslant C|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{m+l}{2}+\varepsilon_1}, \tag{50}$$

$$\|Q_{-(m+l+1)+\varepsilon+\varepsilon_1}\|_0\leqslant C|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{m+l+1}{2}+\varepsilon_1}. \tag{51}$$

Таким образом, оператор $\hat{P}_0\circ\hat{R}f$ представим в виде

$$\hat{P}_0\circ\hat{R}f=P^+f+\hat{T}_1f, \tag{52}$$

при этом в силу неравенств (46), (47), (49) — (51) имеет место оценка

$$\|\hat{T}_1 f\|_{C(H_1^+)}\leqslant C|\mathrm{Re}\,\lambda|^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\|f\|_{C(H_1^+)}, \tag{53}$$

где $\varepsilon>0$ достаточно мало, откуда следует, что при достаточно больших $|\mathrm{Re}\,\lambda|$ можно добиться того, чтобы $\|\hat{T}_1 f\|_{C(H_1^+)}$ была достаточно мала.

Для завершения доказательства теоремы обратимся к оценке оператора $\hat{P}_1\circ\hat{R}f$.

Обозначим через $\hat{P}_j$ оператор, соответствующий символу $a_j(x)[A(x,\xi,\lambda)]^j$:

$$P_j(x,\xi,\lambda)=a_j(x)(\xi_1^2+S^2)^j,\quad j=0,1,\cdots,m-1.$$

Рассмотрим композицию

$$\begin{aligned}\hat{P}_j\circ\hat{R}f&=\hat{P}_j\circ P^+\,\widehat{(\psi(x_1)A_+^{-1})}\,\theta(x_1)\,\widehat{\ }\,(\psi(x_1)A_-^{-1})\,lf=\\&=a_j(x)\circ P^+(\hat{A}_+^{j/m}\circ\hat{A}_-^{j/m}\,\widehat{(\psi(x_1)A_+^{-1})}\,\theta(x_1)\,\widehat{\ }\,(\psi(x_1)A_-^{-1}))\,lf\end{aligned} \tag{54}$$

(здесь мы воспользовались тем, что оператор $\hat{A}^j$ дифференциальный по переменной x_1).

Для оператора $P^+(\hat{A}_+^{j/m}\circ\hat{A}_-^{j/m}\,\widehat{(\psi(x_1)A_+^{-1})})$ имеем представление (в силу формулы композиции)

$$P^+(\hat{A}_+^{j/m}\circ\hat{A}_-^{j/m}\,\widehat{(\psi(x_1)A_+^{-1})})=P^+(\hat{A}_-^{j/m}\hat{A}_+^{\frac{j}{m}-1}+\sum_{l=-2j+m+1}^{m}\hat{Q}_{-l}), \tag{55}$$

где символы оператов $\hat{Q}_{-l}$ имеют вид

$$Q_{-l}(x, \xi, \lambda) = \sum_{|\alpha| = l + 2j - m} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha A^j(x, \xi, \lambda) D_x^\alpha A_+^{-1}(x, \xi, \lambda). \qquad (56)$$

Запишем операторы $P^+(\hat{A}_-^{j/m} \hat{A}_+^{\frac{j}{m}-1} \circ \theta \hat{A}_-^{-1}$ в виде

$$P^+(\hat{A}_-^{j/m} \hat{A}_+^{\frac{j}{m}-1} \circ \theta \hat{A}_-^{-1}) = P^+(\hat{A}^j \hat{A}_+^{-1} \hat{A}_0^{\frac{m-s}{2}-j}(\xi', \lambda) \circ \theta \hat{A}_0^{-\frac{m-s}{2}+j} \circ \hat{A}_-^{-1}),$$

$$j = 0, 1, \cdots, m-1,$$

при этом, как легко видеть, операторы

$$\hat{A}^j \frown (A_+^{-1} A_0^{\frac{m-s}{2}-j}) \text{ и } \hat{A}_0^{-\frac{m-s}{2}+j} \circ \hat{A}_-^{-1}$$

порождаются мерами и имеют место оценки

$$\| A^j A_+^{-1} A_0^{\frac{m-s}{2}-j} \|_0 \leqslant C, \qquad (56')$$

$$\| A_0^{-\frac{m-s}{2}+j} A_-^{-1} \| \leqslant C |\mathrm{Re}\, \lambda|^{s_1+j-m}, \; j = 0, 1, \cdots, m-1. \qquad (57)$$

Из оценок (56′), (57) следует, что

$$\| \hat{P}_j \circ \hat{R} f \|_{C(H_1^+)} \leqslant C |\mathrm{Re}\, \lambda|^{s_1+j-m} \| f \|_{C(H_1^+)}, \qquad (58)$$

$$j = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Далее, из неравенств (58) вытекает, что

$$\| \hat{P}_1 \circ \hat{R} f \|_{C(H_1^+)} \leqslant C |\mathrm{Re}\, \lambda|^{s_1-1} \| f \|_{C(H_1^+)}. \qquad (59)$$

Представление (39) теперь следует из (52) и оценок (53), (59), если обозначить полученный в результате оператор через $\hat{T}_1$, а неравенство $\| \hat{T}_1 \|_{C(H_1^+)} < 1$ обеспечивается выбором достаточно большого $|\mathrm{Re}\, \lambda|$.

Теорема полностью доказана.

С л е д с т в и е. Оператор $\mathfrak{M}$ гомеоморфно отображает $\mathfrak{L}^0_{\mathfrak{M}}$ на пространство $CL^0(H_1^+)$ при достаточно больших $|\mathrm{Re}\, \lambda|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу представления и оценки (39) оператор $E + \hat{T}_1$ обратим, при этом обратный оператор $(E + \hat{T}_1)^{-1}$ представим в виде ряда Неймана и

$$(E + \hat{T}_1)^{-1} : CL^0(H_1^+) \to CL^0(H_1^+),$$

отображение непрерывно. Имеем

$$\mathfrak{M} \circ \hat{R} = E + \hat{T}_1.$$

Применим справа оператор $(E+\hat{T}_1)^{-1}$. Получим

$$\mathfrak{M} \circ \hat{R} \circ (E+\hat{T}_1)^{-1} = E,$$

откуда следует, что оператор $\hat{R} \circ (E+\hat{T}_1)^{-1}$ является правым обратным оператором к оператору $\mathfrak{M}$. Совершенно аналогично из (40) можно вывести, что существует также левый обратный оператор для $\mathfrak{M}$. Этим завершается доказательство утверждения.

Ереванский государственный университет,
Институт математики АН Армянской ССР

Поступила 25.XII.1980

Ռ. Լ. ՇԱՀԲԱՂՅԱՆ. Դիրիխլեի խնդիրը կիսատարածությունում անվերջ թվով անկախ փոփոխականներով բարձր կարգի էլիպտական տիպի օպերատորների համար *(ամփոփում)*

Հոդվածում ընդհանրացված են Մ. Ի. Վիշիկի և Ա. Վ. Մարչենկոյի արդյունքները կիսատարածությունում Դիրիխլեի խնդրի լուծման գոյության և միակության վերաբերյալ բարձր կարգի էլիպտական տիպի օպերատորների համար։

Կառուցված է դիտարկվող խնդրի պարամետրիքսը համապատասխան ֆունկցիոնալ տարածություններում և ապացուցված է լուծման գոյությունն ու միակությունը դիտարկվող օպերատորում մասնակցող պարամետրի բավականաչափ մեծ արժեքների դեպքում։

R. L. SHAKHBAGIAN. *The Dirichlet problem in the half-space for the elliptic operators of higher order with infinite number of independent variables* (summary)

The paper deals with the solvability of the Dirichlet problem in the half space for a class of the elliptic operators of order $2m$, $m > 1$, which contain a complex parameter. The main theorems generalize the results of the paper by Visik and Marchenko [1]. The bilateral regularization is constructed and unique solvability of the first boundary value problem in the appropriate functional spaces is proved for value of parameter large enough.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. И. Вишик, А. В. Марченко.* Кравые задачи для эллиптических и параболических операторов второго порядка на бесконечномерных многообразных с краем, Матем. сб., 90, № 3, 1973, 331—371.
2. *Р. Л. Шахбагян.* Эллиптическая задача с параметром для уравнений второго горядка с бесконечным числом независимых переменных, Изв. АН Арм.ССР, сер. матем., XII, № 4, 1977, 252—261.
3. *П. М. Блехер, М. И. Вишик.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов с бесконечным числом переменных и их приложениях, Матем. сб., 86, № 3, 1971, 446—494.
4. *М. И. Вишик, Г. И. Эскин.* Параболические уравнения в свертках в ограниченной области, Матем. сб., 71, № 2, 1966, 162—190.