ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 2, 1981 Математика

Г. Р. ОГАНЕСЯН, К. А. ЯГДЖЯН

ЗАДАЧА КОШИ В КЛАССАХ ЖЕВРЕ ДЛЯ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей работе приводятся достаточные условия корректности в классах Жевре задачи Коши для псевдодифференциальных (п.д.) уравнений специального вида, к которым сводятся слабо гиперболические дифференциальные уравнения. Такого рода условия для дифференциальных уравнений были получены ранее в работах [1], [2], [3].

Использование алгебры п.д. операторов, действующих в шкале банаховых пространств Жевре ([4]) и получение энергетических оценок для п.д. операторов, образующих модуль над кольцом п.д. операторов нулевого порядка, позволяет в данной работе значительно упростить доказательства и охватить более широкий класс уравнений.

Статья построена следующим образом. В § 1 формулируются основные теоремы. В § 2 приводятся вспомогательные факты из теории п.д. операторов, действующих в классах Жевре, а также энергетические оценки для простейших гиперболических (эволюционных) операторов. Здесь же уточняется большинство определений и обозначений. В § 3 устанавливаются достаточные условия C^∞-корректности задачи Коши, а в § 4 на их основе доказывается основная теорема о корректности задачи Коши в классах Жевре (теорема 2 из § 1). В § 5 приводятся примеры.

§ 1. Постановка задачи и основные результаты

Обозначим через $H^m(S_t)$ пространство Соболева с нормой

$$|D^m u, S_t| = \sum_{|\alpha| < m} |D^\alpha u|^2 \equiv \sum_{|\alpha| < m} \left\{ \int |D^\alpha u|^2 \, dS_t \right\}^{1/2}, \tag{1}$$

здесь

$$V = V_t = \{(x_0, x),\ 0 < x_0 < t,\ x \in S \subset\subset R^n\},$$

$$S_t = \{(x_0, x) \in V,\ x_0 = t\}.$$

Шкала гильбертовых пространств Жевре определяется как

$$G(\gamma, s) = \{f(x),\ \|f\|_{\gamma, s} < \infty\}, \tag{2}$$

где

$$\|f\|_s \equiv \|f\|_{\gamma, s} \equiv \{\sum_{\alpha} (|\alpha|!^{-\gamma} s^{\alpha} \|D_x^\alpha f\|)^2\}^{1/2},\ \gamma \geq 1.$$

Если $\Omega \subset R$, а X — линейное топологическое пространство, то $C^m(\Omega, X)$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых отображений Ω в X. Введем элементарные гиперболические операторы первого порядка

$$\partial_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - \Lambda_j(t, x, D_x), \; j=1, 2, \cdots, m,$$

где Λ_j — п.д. операторы первого порядка с вещественными символами $\lambda_j(t, x, \xi)$. Для единообразия дальнейших формул положим $\partial_{m+1}=1$.

С целью описания класса символов п.д. операторов введем функцию

$$A(x, \xi) = A_1(\xi) + A_2(x, \xi), \tag{3}$$

где $A_1 \in C^\infty(R^n)$, $A_2 \in C^\infty(R^n \times R^n)$. Если ρ, $m > 0$, $\gamma > 1$, l, $q \in Z^n_+$, то введем обозначение

$$N(A, \gamma, \rho, m, q, l) = N_1(A_1, m, q) + N_2(A_2, \gamma, \rho, m, q, l), \tag{4}$$

где

$$N_1(A_1, m, q) = \sup_\xi |<\xi>^{|q|-m} |\partial_\xi^q A_1(\xi)||,$$

$$N_2(A_2, \gamma, \rho, m, q, l) = \sup_{x, \xi, p} |\rho^{|p|} |p|!^{-\gamma} <\xi>^{|q|-m} |x^l D_x^p \partial_\xi^q A_2(x, \xi)||,$$

$$<\xi> = (1 + |\xi|^2)^{1/2}.$$

Класс символов Жевре GS определяется как

$$GS(\gamma, \rho, m) = \{A(x, \xi), \; N(A, \gamma, \rho, m, q, l) < \infty \text{ для всех } q, l \in Z^n_+\}. \tag{5}$$

Соответствующий класс п.д. операторов обозначим через GO.

Класс символов S^m состоит из бесконечно дифференцируемых функций $a(x, \xi)$ таких, что для любых мультииндексов α, $\beta \in Z^n_+$ и компакта $K \subset R^n$ справедлива оценка

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta, K} <\xi>^{m-|\alpha|}. \tag{6}$$

Пространства GS и S^m являются линейными топологическими пространствами с топологией, индуцированной полунормами (4), (6). Монотонно убывающую функцию $p(t) \in C([0, \infty))$ назовем масштабной, если $p(0) = 1$, $p(t) > 0$ и существуют положительные постоянные M, d такие, что

$$p(t) \leqslant e^{-tM}(1 + td)^{-1}. \tag{7}$$

Если X_s — шкала банаховых пространств, а $p(t)$ — масштабная функция, то $f(t) \in B[T, X_s, p, m]$ означает, что

$$\sup_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_{sp(t)} < \infty, \; f(\tau) \in C^m[0, \tau], \; X_{sp(\tau)}), \; \tau \in [0, t].$$

Настоящая работа посвящена изучению задачи Коши для п.д. оператора порядка m вида

$$P \equiv P_0 + \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{j=2}^{p+1} b_{jp}(\partial_1 - \partial_j)(\partial_2 - \partial_j) \cdots (\partial_{j-1} - \partial_j)\, \partial_{m+j-p} \cdots \partial_{m-1} \partial_m, \tag{8}$$

где

$$P_0 \equiv \partial_1\partial_2\cdots\partial_m + \sum_{p=0}^{m-2} b_{1p}\,\partial_{p+2}\cdots\partial_{m-1}\,\partial_m + b_{1,m-1}, \tag{9}$$

а b_{jp}, b_{1p} — п.д. операторы нулевого порядка.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество непрерывно дифференцируемых на $[0, T]$ вектор-функций $\bar{\mu}(t) = (\mu_1(t), \mu_2(t), \cdots, \mu_{m-1}(t))$, компоненты которых на полуинтервале $(0, T]$ положительны вместе со своими производными:

$$\mu_j(t) > 0,\ \mu_j'(t) \geqslant 0 \text{ при } 0 < t \leqslant T,\ j = 1, 2, \cdots, m-1 \tag{10}$$

(но могут обращаться в нуль при $t = +0$), а также упорядочены в том смысле, что

$$\frac{\mu_j'(t)}{\mu_j(t)} \leqslant c\,\frac{\mu_{j+1}'(t)}{\mu_{j+1}(t)},\ \mu_{j+1}(t) \leqslant c\mu_j(t),\ j=1, 2, \cdots, m-2. \tag{11}$$

Отметим, что если при $t = +0$ слипаются r характеристических корней оператора P $(1 \leqslant r \leqslant m)$, то

$$\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \cdots \equiv \mu_{m-r} \equiv 1.$$

Пусть существует вектор-функция $\bar{\mu} \in \mathfrak{M}$ такая, что

$$\mu_k^{-1}(t)(\Lambda_{k+1} - \Lambda_1)(\Lambda_{k+1} - \Lambda_2)\cdots(\Lambda_{k+1} - \Lambda_k) \in C(G0(\gamma, \rho, k)), \tag{12}$$

$$k = 1, \cdots, m-1,$$

и

$$\mu_k^{-1}(t) \prod_{j=1}^{k} (\lambda_{k+1} - \lambda_j)(t, x, \xi) \neq 0,\ (t, x, \xi) \in V_T \times R^h \setminus 0,\ k=1, \cdots, m-1, \tag{13}$$

что означает эллиптичность оператора

$$\mu_k^{-1}(t)(\Lambda_{k+1} - \Lambda_1)(\Lambda_{k+1} - \Lambda_2)\cdots(\Lambda_{k+1} - \Lambda_k).$$

Введем операторы коммутирования ($[,]$ — коммутатор)

$$ad_j(\cdot) = [\partial_j, \cdot],\ j = 1, 2, \cdots, m.$$

(A) Пусть существуют неотрицательные постоянные c_1, c_2 $(c_1^2 + c_2^2 > 0)$ и п.д. операторы нулевого порядка $\tilde{\beta}_k$, β_k, β, $\alpha_{i_1\ldots i_q}$:

$$\beta,\ \tilde{\beta}_k,\ \alpha_{i_1\ldots i_q},\ K^{-1}\beta_k(t, x, D_x) \in C(GO(\gamma, \rho, 0)), \tag{14}$$

здесь $K \equiv c_1 + c_2\mu'(t)/\mu(t)$, $\mu(t) \equiv \mu_{m-1}(t)$ и такие, что справедливы операторные равенства

$$ad_{i_1} ad_{i_2} \cdots ad_{i_{k-1}}(\partial_{i_k}) = \beta_k(\partial_{i_k} - \partial_{i_{k-1}}) + \tilde{\beta}_k,\ 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k < m, \tag{15}$$

$$\partial^q_{m+1-p} = \beta + \sum a_{i_1 \ldots i_q} \partial_{i_1} \cdots \partial_{i_q}, \; 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_q \leqslant m-p, \tag{16}$$

$$p = 1, 2, \cdots, m-2, \; q = 1, 2, \cdots, m-p-1.$$

Отметим, что если переписать эти равенства на языке символов (в частных случаях $m=2$, 3 мы проделаем это в § 5), то в случае различных характеристических корней они выполнены всегда, а в противном случае эти равенства означают определенный характер слипания характеристик.

Мы скажем, что младшие коэффициенты оператора P удовлетворяют обобщенным условиям Э. Э. Леви, если

$$b_{1p}, \; t^{m-p-1} b_{jp}(t, x, \xi)/K(t) \in C(GS(\gamma, \rho, 0)), \tag{17}$$

$$p = 1, 2, \cdots, m-1, \; j = 2, 3, \cdots, p+1.$$

Если выполнены условия (12), (14)—(17), где классы символов Жевре $C(GS)$ заменены более широкими классами $C(S^0)$, то справедлива

Теорема 1. *Задачи Коши*

$$Pu = f, \; (t, x) \in V_T, \tag{18}$$

$$\partial_t^k u(+0, x) = 0, \; k = 0, 1, \cdots, m-1, \tag{18'}$$

при $f \in C(H^q(S_t))$ (q — достаточно большая постоянная, зависящая от оператора P) имеет единственное решение $u \in H^m(V_T)$, причем справедлива оценка

$$|D^m u, S_t| \leqslant c \int_0^t |D_\tau^q Pu, S_\tau| \, d\tau \tag{19}$$

для всех функций $u \in H_0^m(V)$.

Замечание. Теорема 1 остается справедливой, если вместо условий (16) потребовать выполнения условий (13).

Пусть

$$\alpha(t) \equiv \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{j=2}^{p+1} t^{m+j-p-1} \mu_{j-1}(t) \|b_{jp}\|_{sp(t)},$$

$$\beta(t) \equiv \sum_{p=1}^{m-1} \sum_{j=2}^{p+1} t^{m-p-1} \|b_{jp}\|_{sp(t)}. \tag{20}$$

Если обобщенные условия Э. Э. Леви (17) не выполнены, но существуют положительные постоянные η, σ, ε, $\gamma \geqslant 1$ такие, что

$$\lim_{t \to 0} \max_{t_1 \in [0, t]} \left\{ \left(t \int_0^t \alpha(\tau) \, d\tau \right)^{1-\eta} \left(\int_{t_1}^t \beta(\tau) \, d\tau \right)^{(\gamma-1)(r-1)-1+\sigma} \right\} = 0, \tag{21}$$

$$b_{1p}, \; \mu^{2-\varepsilon}_{1+m-r} t^{m-p-1} b_{jp} / \mu'_{1+m-r}(t) \in C(GS(\gamma, \rho, 0)), \tag{22}$$

$$j = 2, \cdots, p+1, \; p = 1, 2, \cdots, m-1,$$

то в условиях (12), (14)—(16) справедлива

Теорема 2. *Для любого* $f \in B(\delta, G_s, p, 0)$ *задача Коши* (18), (18′) *имеет единственное решение* $u \in B(T, G_s, p(t), m)$, *причем имеет место оценка* $(0 < s' < s < d)$

$$\sum_{j=0}^{m} \|\partial_t^j u\|_{s' \cdot p(t)} \leqslant c(s, s', \gamma) \int_0^t \|Pu\|_{sp(\tau)} d\tau \tag{23}$$

для произвольных функций $u \in C_0^\infty(G_s)$.

§ 2. Псевдодифференциальные операторы

Свойства алгебры п.д. операторов, действующих в классах Жевре, подробно описаны в работах многих авторов, поэтому мы приведем без доказательств важнейшие свойства, придерживаясь в основном работы [4].

Приведем лемму о непрерывности п.д. операторов в шкале гильбертовых пространств Жевре.

Лемма 1 ([4]). *Если* $A(x, \xi) \in GS(\gamma, \rho, 0)$ *и* $f \in G(\gamma, S)$, *то имеет место оценка*

$$\|A(x, D_x) f\|_s \leqslant cN \|f\|_s, \tag{24}$$

де постоянная c *не зависит от* A *и* s, $s < \rho$, *а*

$$N = \sup_{|l| < k} N(A, \gamma, \rho, 0, 0, l)$$

при некотором k.

Если же $A(\xi) \equiv \langle \xi \rangle^m$, $m > 0$, $0 < a < s' < s < b < \infty$, то

$$\|A(D_x) f\|_{s'} \leqslant c(s - s')^{-m\gamma} \|f\|_s, \tag{25}$$

с постоянной c, не зависящей от s' и s.

Для символов, зависящих от параметра $t \in [0, \delta]$, справедливо

Предложение 1. ([4]). *Пусть* $\gamma, \rho, \rho', m_1, m_2, \delta, m, k, r, s$ *— положительные числа,* $\gamma > 1$, $\rho' < \rho$. *Если (при* $j = 1, 2$) $A_j \equiv A_j(t, x, \xi) \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho, m_j))$, *то*

$$A_1 + A_2 \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho', \max(m_1, m_2))),$$

$$D_x^r \partial_\xi^s A_1(t, x, \xi) \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho', m_1 - s)),$$

$$(A_1 A_2)(t, x, \xi) \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho', m_1 + m_2)),$$

$$A_1 \circ A_2 - \sum_{|p| < m-1} \frac{1}{p!} (\partial_\xi^p A_1)(D_x^p A_2) \in C^k([0, \delta], GS(\gamma, \rho', m_1 + m_2 - m)).$$

Предложение 2 ([4]). *Пусть* δ, ρ *— положительные числа, а полный символ* $\lambda(t, x, \xi)$ *оператора* $\Lambda(t, x, D_x)$ *является вещественнозначной функцией, принадлежащей классу* $C^0([0, \delta], GS(\gamma, \rho, 1))$. *Тогда для любой функции* $g(t) \in C^1([0, \delta], L_2)$ *найдется решение* $f(t) \in C^1([0, \delta], L_2)$ *задачи Коши*

$$\left[\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}-\Lambda(t,\ x,\ D_x)\right]f(t,\ x)=g(t,\ x),\ f(+0,\ x)=0, \tag{26}$$

причем справедлива оценка

$$\frac{d}{dt}\|f(t)\|\leqslant c\|f(t)\|+\|g(t)\|, \tag{27}$$

с постоянной с, не зависящей от f.

Если $D_x^\alpha g\in C([0,\ \eta],\ L_2)$ для всех α, то и $D_x^\alpha f\in C[0,\ \delta],\ L_2)$ для всех α.

Предложение 3. (Неравенство Гординга). *Пусть $A\in GO(d,\ \rho,\ 1)$, причем существует $c>0$ такое, что для любого $u\in C_0^\infty(R_n)$*

$$\|\Lambda u\|^2\leqslant c(\|Au\|^2+\|u\|^2). \tag{28}$$

Тогда существует ρ_0, $0<\rho_0<\rho$ такое, что с некоторой постоянной c_1 имеет место неравенство

$$\|\Lambda u\|_s^2\leqslant c_1(\|Au\|_s^2+\|u\|_s^2) \tag{29}$$

для $u\in G(d,\ s)$, $0<s<\rho_0$.

Доказательство. Очевидно, что

$$\|\Lambda u\|_s^2\leqslant 2c\sum_\alpha(s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\|AD^\alpha u\|)^2+2c\|u\|_s^2. \tag{30}$$

Поэтому достаточно рассмотреть ряд.

Обозначим через $A_{(p)}^{(q)}(x,\ \xi)=\partial_\xi^q D_x^p A(x,\ \xi)$. Тогда

$$D_x^\alpha A(x,\ D_x)u=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\sum_{\beta+\gamma=\alpha}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\xi^\beta A_{(\gamma)}(x,\ \xi)\bar{u}(\xi)\,d\xi$$

и

$$A(x,\ D_x)D^\alpha u=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\xi^\alpha A(x,\ \xi)\bar{u}(\xi)\,d\xi,$$

поэтому

$$[A,\ D^\alpha]u=\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \gamma\neq 0}}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}A_{(\gamma)}(x,\ D_x)(D^\beta u). \tag{31}$$

Следовательно

$$\sum_\alpha(s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\|AD^\alpha u\|)^2=2\|Au\|_s^2+2\sum_\alpha(s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\|[A,\ D^\alpha]u\|)^2. \tag{32}$$

Последний член оценивается сверху через

$$\sum_\alpha\left\{s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \gamma\neq 0}}\left(\|A_{(\gamma)}(x,\ D_x)D^\beta u\|\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\right)\right\}^2. \tag{33}$$

Но для любой функции f

$$(A_{(\gamma)}(x,\ D_x)f)^\sim(\eta)=\int(\eta-\xi)^\gamma\tilde{A}(\eta-\xi,\ \xi)\tilde{f}(\xi)\,d\xi, \tag{34}$$

и

$$|\langle\tau\rangle^{n+1}|\tau^{\gamma}\tilde{A}(\tau,\xi)|\leqslant cc_1(n+1+|\gamma|)!^d\langle\xi\rangle\rho^{-(n+1+|\gamma|)}, \tag{35}$$

где

$$c_1=N_1(A,0,0)+\sup_{\substack{\tau,\xi,p\\ |l|\leqslant n+1}}|\rho^{|p|}|p|!^{-d}\langle\xi\rangle^{-1}|\tau^p\partial_\tau^l\partial_\xi^q\tilde{A}(\tau,\xi)||.$$

Тогда

$$\|A_\gamma(x,D_x)f\|^2\leqslant 2\tilde{c}(cc_1)^2\|\Lambda f\|^2[(n+1+|\gamma|)!^{2d}\rho^{-2(n+1+|\gamma|)}, \tag{36}$$

т. е.

$$\|A_{(\gamma)}(x,D_x)f\|\leqslant c(n+1+|\gamma|)!^d\rho^{-(n|+1+|\gamma|)}\|\Lambda f\|. \tag{37}$$

Из (33) и (37) выводим, что

$$\sum_\alpha\left\{s^{|\alpha|}|\alpha|!^{-d}\sum_{\substack{\beta+\gamma=\alpha\\ \gamma\neq 0}}\frac{\alpha!}{\beta!\gamma!}\|A_{(\gamma)}(x,D_x)D^\beta u\|\right\}^2<$$

$$\leqslant 2c^2\rho^{-2(n+1)}\sum_\alpha\sum_{\substack{\beta_1+\gamma_1=\alpha\\ \gamma_1\neq 0}}\sum_{\substack{\beta_2+\gamma_2=\alpha\\ \gamma_2\neq 0}}(|\beta_1|!^{-d}s^{|\beta_1|}\|D^{\beta_1}\Lambda u\|)^2\times$$

$$\times\left\{\prod_{k=1}^2\left[\prod_{j=1}^{n+1}(j+|\gamma_k|)\left(\frac{\alpha!}{\beta_k!\gamma_k!}\right)\left(\frac{|\beta_k|!\,|\gamma_k|!}{|\alpha|!}\right)^d\left(\frac{s}{\rho}\right)^{|\gamma_k|}\right]\right\}. \tag{38}$$

Но

$$\frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}\,\frac{|\beta|!\,|\alpha-\beta|!}{|\alpha|!}\leqslant 1,\quad \beta<\alpha \tag{39}$$

(см., напр., [8]), поэтому продолжая (38)

$$\leqslant 2c^2\rho^{-2(n+1)}\sum_\alpha\sum_{\beta_1<\alpha}\sum_{\beta_2<\alpha}(|\beta_1|!^{-d}s^{|\beta_1|}\|D^{\beta_1}\Lambda u\|)^2\times$$

$$\times\prod_{k=1}^2\left\{\left(\frac{s}{\rho}\right)^{|\gamma_k|}\prod_{j=1}^{n+1}(j+|\gamma_k|)\right\}\leqslant$$

$$\leqslant 2c^2\rho^{-2(n+1)}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2\|\Lambda u\|^2\left\{\sum_{\gamma=1}^\infty\left(\frac{s}{\rho}\right)^{\gamma-1}(\gamma+n+1)^{2(n+1)}\right\}. \tag{40}$$

Для любого $\varepsilon>0$ можно выбрать ρ_0, $s\leqslant\rho_0<\rho$ так, чтобы

$$2c^2\rho^{-2(n+1)}\left(\frac{s}{\rho}\right)^2\left\{\sum_{\gamma=1}^\infty\left(\frac{s}{\rho}\right)^{\gamma-1}(\gamma+n+1)^{2(n+1)}\right\}<\varepsilon. \tag{41}$$

Выбирая $2\varepsilon<1$ из (30), (32), (40), (41) выводим необходимую оценку (29).

§ 3. Доказательство теоремы 1

Введем интегралы энергии

$$Eu \equiv \sum_{p=0}^{m-1} t^{-p} \|\partial_{p+2} \cdots \partial_{m-1} \partial_m u\| +$$

$$+ \sum_{p=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{p+1} t^{p+1-m} \|(\partial_1 - \partial_j) \cdots (\partial_{j-1} - \partial_j)\, \partial_{j+m-p} \cdots \partial_m\|, \tag{42}$$

$$\tilde{E}u \equiv \sum_{p=0}^{m-1} t^{-p} \|\partial_{p+2} \cdots \partial_m u\| + \sum_{p=2}^{m-1} \sum_{j=2}^{p+1} t^{p+1-m} \|\mu_{j-1} \Lambda^j \partial_{j+m-p} \cdots \partial_m u\|. \tag{43}$$

Имеет место

Лемма 3.1. *В условиях* (12) *и* (A) *справедлива оценка*

$$\|Eu\|_{sp\,(t)} \leqslant c \int_0^t \{\|\partial_1 \cdots \partial_m u\|_{sp\,(\tau)} + K(\tau) \|Eu\|_{sp\,(\tau)}\}\, d\tau \tag{44}$$

для всех $u \in C^m(G_\gamma)$ *удовлетворяющих начальным условиям*

Доказательство. Очевидно, что достаточно оценить через правую часть (44), которую мы обозначим через $J(t)$, каждое слагаемое интеграла энергии. Имеем

$$t^{-p} \|\partial_{p+2} \cdots \partial_m u\|_{sp\,(t)} \leqslant \int_0^t \frac{(t-\tau)^p}{p!\, t^p} \|\partial_1 \cdots \partial_m u\|_{sp\,(\tau)}\, d\tau \leqslant J(t). \tag{45}$$

Так как согласно (16)

$$\partial_j^{j-2} = a + \sum_{k=1}^{j-1} a_k\, \partial_1 \cdots \check{\partial}_k \cdots \partial_{j-1} \tag{46}$$

(знак $\check{}$ означает, что оператор ∂_k опущен), то имеем что

$$\|\partial_j^{j-2} \partial_j \partial_{j+1} \cdots \partial_m\| \leqslant c \sum_{k=1}^{j-1} \|\partial_1 \cdots \check{\partial}_k \cdots \partial_j \partial_{j+1} \cdots \partial^m u\| +$$

$$+ \|\partial_j \cdots \partial_m u\| \leqslant c \sum_{k=1}^{j-1} \int_0^t \|\partial_k \partial_1 \cdots \check{\partial}_k \cdots \partial_m u\|\, d\tau. \tag{47}$$

Протащив оператор ∂_k на свое место с учетом коммутационных соотношений (15), получим оценку

$$\|\partial_j^{j-2} \partial_j \cdots \partial_m u\|_{sp\,(t)} \leqslant J(t). \tag{48}$$

Аналогично оцениваются оставшиеся слагаемые интеграла энергии.

Лемма доказана.

Если операторы $\mu_k^{-1}(\Lambda_{k+1}-\Lambda_1)\cdots(\Lambda_{k+1}-\Lambda_k)$ эллиптичны, т. е. для всех $(t, x, \xi)\in V_T\times R^n\setminus 0$, $k=1,\cdots, m-1$ имеет место (13), то в силу неравенства Гординга (29) справедливы оценки

$$\|\Lambda^{j-1}\partial_{j+1}\cdots\partial_m u\|_s < c\|\mu_{j-1}^{-1}(\partial_1-\partial_j)\cdots(\partial_{j-1}-\partial_j)\partial_{j+1}\cdots\partial_m u\|_s+$$
$$+\|\partial_{j+1}\cdots\partial_m u\|_s,\ j=2, 3,\cdots, m, \tag{49}$$

поэтому справедлива

Лемма 3.2. *В условиях* (12)—(15) *для всех* $u\in C^m(G_T)$, *удовлетворяющих* (18′), *справедливо неравенство*

$$\|\widetilde{E}u\|_{sp(t)} \leqslant \int_0^s (c\|\partial_1\cdots\partial_m u\|_{sp(\tau)} + K(\tau)\|\widetilde{E}u\|_{sp(\tau)})\,d\tau. \tag{50}$$

Отметим, что если выполнено первое из условий (17), то из очевидной оценки

$$\int_0^t d\tau\sum_{p=0}^{m-2}\|b_{1p}\partial_{p+2}\cdots\partial_m u\|_{sp(\tau)} \leqslant c\int_0^t\|\widetilde{E}u\|_{sp(\tau)}\,d\tau \tag{51}$$

следует, что оценка (50) остается в силе, если выражение $\partial_1\cdots\partial_m u$ в правой части (50) заменить на P_0u.

Если же условия (17) выполнены полностью, то справедлива оценка

$$\int_0^t\|(P-P_0)u\|_{sp(\tau)}\,d\tau \leqslant \int_0^t K(\tau)\|\widetilde{E}u\|_{sp(\tau)}\,d\tau, \tag{52}$$

из которой следует, что выражение $\partial_1\cdots\partial_m u$ в правой части (50) можно заменить на Pu.

Полученные в леммах 3.1, 3.2 интегральные неравенства с неинтегрируемым ядром $K(\tau)$ можно обратить, используя обобщенную лемму Гронуолла (см. лемму 2 [5]):

Лемма 3.3. *В условиях лемм* 3.1, 3.2, *соответственно, справедливы оценки*

$$\|Eu\|_{sp(t)} \leqslant c\,\mu^M(t)\int_0^t\mu^{-M}(\tau)\|P_0u\|_{sp(\tau)}\,d\tau, \tag{53}$$

$$\|\widetilde{E}u\|_{sp(t)} < c\mu^M(t)\int_0^t\mu^{-M}(\tau)\|P_0u\|_{sp(\tau)}\,d\tau, \tag{53′}$$

для всех $u\in C^m(G_T)$, *удовлетворяющих* (18′) *и*

$$Eu,\ \widetilde{E}u=\mu^M(t)\,o(1),\ t\to+0,\ \textit{соответственно}. \tag{54}$$

Приведем теперь лемму, позволяющую сводить задачу Коши (18) (18′) к новой с быстроубывающим к нулю при $t\to+0$ свободным членом.

Лемма 3.4. *Пусть $\gamma > 1$, δ, $\rho > 0$, имеет место* (A), *и при некотором $\varepsilon > 0$ выполнено* (22). *Тогда для любых a, b, z, $0 < a < b < \rho$, $z \geqslant 0$, существуют постоянные c, d такие, что для любой масштабной функции $p(t)$ и для любой функции $f \in B[\delta, G(\gamma, bs), p, 0]$ найдется функция $v \in B[\delta, G(\gamma, bs'), p, m]$ такая, что $v(0, x) = v_t(0, x) = \cdots = \partial_t^{m-1} v(0, x) = 0$ и*

$$\|Pv - f\|_{s' p(t)} \leqslant c\mu^z(t) \int_0^t e^{M(t-\tau)} \|f\|_{sp(\tau)} d\tau, \tag{55}$$

для всех $a \leqslant s' < s \leqslant b$ и $0 < t < \delta$, причем

$$\|Ev\|_{s' p(t)} \leqslant c(s', s) \int_0^t e^{M(t-\tau)} \|f(\tau)\| d\tau. \tag{56}$$

Доказательство. Представим P в виде

$$P = P_0 + (P - P_0) \equiv P_0 + P_1 \tag{57}$$

и рассмотрим задачи Коши

$$P_0 v_k = f_{k-1},\ f_0 \equiv f,\ f_k = -P_1 v_k, \tag{58}$$

$$\partial_t^l v_k(0, x) = 0,\ l = 0, 1, \cdots, m-1,\ k = 1, 2, \cdots. \tag{59}$$

Тогда, согласно лемме 3.3

$$\|f_k\|_{s' p(t)} = \|P_1 v_k\|_{s' p(t)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{m} \sum_{j=2}^{p+1} \|b_{jp}(\partial_1 - \partial_j) \cdots (\partial_{j-1} - \partial_j) \partial_{j+m-p} \cdots \partial_{m-1} \partial_m v_k\|_{s' p(t)}. \tag{60}$$

Оценим теперь каждый член получившейся суммы. Очевидно, что

$$\|b_{jp}(\partial_1 - \partial_j) \cdots (\partial_{j-1} - \partial_j) \partial_{j+m-p} \cdots \partial_m v_k\|_{s' p(\tau)} \leqslant$$

$$\leqslant c(s', s_1) \mu'_{j-1}(t) \mu_{j-1}^{\varepsilon-1}(t) \int_0^t \|f_{k-1}\|_{s_1 p(\tau)} d\tau. \tag{61}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$[\mu_{j-1}^{2-\varepsilon} t^{p+2-m-j} b_{jp} / \mu'_{j-1}(t) \in B[T, GO(\gamma, \rho, 0), 1, m], \tag{62}$$

$$\mu_{j-1}^{-1}(t) (\partial_1 - \partial_j) \cdots (\partial_{j-1} - \partial_j) \in C_t(GO(\gamma, \rho, j-1)), \tag{63}$$

Поэтому неравенство (60) приводит к

$$\|f_k\|_{s' p(t)} \leqslant c(s', s_1) \sum_{j=m+2}^{m+1} \sum_{r} \left(\mu'_{j-1} \mu_{j-1}^{\varepsilon-1} \int_0^t \|f_{k-1}\|_{s_1 p(\tau)} d\tau\right). \tag{64}$$

Применяя его k раз, получаем, что левая часть (64) мажорируется функцией

$$c(s', s_1, \cdots, s_k) \sum_{j=m+2-r}^{m+1} \mu'_{j-1} \mu_{j-1}^{k-1}(t) \left(\sum_{j=m+2-r}^{m+1} \mu'_{j-1} \right)^{k-1} \int_0^t \|f\|_{s_k p(\tau)} d\tau.$$

Теперь выберем $\{s_l\}_1^k$ так, чтобы $s_{l+1} - s_l = s_l - s_{l-1}$, $s_k = s$ и вспомним, что согласно условию $\mu'_{j+1} \leqslant c\,\mu_j$, а k может быть выбрано сколь угодно большим.

Обозначим теперь через v сумму $v_1 + v_2 + \cdots + v_k$. Нетрудно убедиться, что $Pv - f$ равно $-f_k$ и поэтому удовлетворяет оценке (55). Теперь уже заметим, что норма любой из функций v_j оценивается через соответствующий интеграл нормы, поскольку v_j есть решение задачи Коши для уравнения $P_0 v_j = f_{j-1}$. Следовательно, мы можем оценить и v и получить желаемую оценку (56). Лемма доказана.

Покажем, что функция v, построенная при доказательстве леммы 3.4 такова, что разность $u - v$ удовлетворяет условию (54).

Перепишем уравнение $Pu = f$ в виде

$$P_0(u - v) = (P_0 - P)(u - v) + f - Pv. \qquad (65)$$

Оценивая первое слагаемое правой части (65) так же, как и при доказательстве оценок леммы 3.4, получим ($s' < s$)

$$\|(P_0 - P)(u - v)\|_{s' p(t)} \leqslant c(s, s')\, \mu^M \int_0^t \|E_0(u - v)\|_{sp(\tau)} d\tau. \qquad (66)$$

Для второго слагаемого правой части (65) справедливо неравенство (55), поэтому при $t \to +0$

$$\|P_0(u - v)\|_{s' p(t)} = \mu^M(t) \cdot o(1). \qquad (67)$$

Энергия $\|E_0(u - v)\|_{s' p(t)}$ мажорируется левой частью (67) и мажорирует с потерей гладкости энергию $\|E(u - v)\|_{sp(t)}$, откуда следует, что

$$\|E(u - v)\|_{sp(t)} = \mu^M(t)\, o(1) \text{ при } t \to +0. \qquad (68)$$

Итак, к разности $u - v$ применима лемма 3.3, поэтому справедлива оценка

$$\|E(u - v)\|_{sp(t)} \leqslant c\mu^M(t) \int_0^t \mu^{-M}(\tau) \|P(u - v)\|_{sp(\tau)} d\tau. \qquad (69)$$

Из неравенства треугольника

$$\|Eu\| \leqslant \|E(u - v)\| + \|Ev\|$$

и оценок (55), (69) получаем энергетическую оценку ($s' < s$)

$$\|\tilde{E}u\|_{s' p(t)} \leqslant c(s, s') \int_0^t \|Pu\|_{sp(\tau)} d\tau. \qquad (70)$$

Аналогично доказывается оценка

$$\|\tilde{E}u\|_{s'p(t)} \leqslant c(s, s') \int_0^t \|Pu\|_{sp(t)}\, d\tau. \tag{71}$$

Замечание 3.1. Для п.д. операторов класса $C(L^m_\tau)$ справедливы аналоги всех утверждений, приведенных в § 2.

Поэтому, если в условиях леммы 3.1—3.4 классы символов (операторов) Жевре $GS(GO)$ заменить более широкими классами $C(S^0)$ $C(L^0_\tau)$, то совершенно аналогично можно доказать справедливость оценок, полученных из (44), (50), (53), (54) заменой норм $\|\cdot\|_{sp(t)}$ на L_2-нормы $\|\cdot\|$. Вместо оценок (55), (56) при этом мы получим оценки (с потерей гладкости q)

$$\|Pv - f\| < c\mu^{x}(t) \int_0^t \sum_{|\alpha| < q} \|D^{\alpha}_x f\|\, d\tau, \tag{55'}$$

$$\|Ev\| \leqslant c \int_0^t \sum_{|\alpha| < q} \|D^{\alpha}_x f\|\, d\tau, \tag{56'}$$

с постоянными c, q, зависящими от символа оператора P, но не зависящими от u.

В этом случае будут справедливы также аналоги оценок (70), (71):

$$\|Eu\| \leqslant c \int_0^t \sum_{|\alpha| < q} \|D^{\alpha}_x Pu\|\, d\tau, \tag{70'}$$

$$\|\tilde{E}u\| \leqslant c \int_0^t \sum_{|\alpha| < q} \|D^{\alpha}_x Pu\|\, d\tau, \tag{71'}$$

из которых следует единственность решения задачи Коши (18)—(18′) а априорная оценка (19).

Доказательство теоремы существования 1 мы опускаем, т. к. оно получается с помощью оценки (19) стандартными рассуждениями (см., например, [9]).

§ 4. Доказательство теоремы 2

С помощью леммы 3.4 задачу (18), (18′) сведем к новой со свободным членом, который достаточно быстро стремится к нулю при $t \to +0$, точнее

$$\mu^{-M}(t) f \in B(\delta, G_s, p, 0). \tag{72}$$

После этого рассмотрим последовательность задач Коши

$$P_0 v_n(t, x) = f_n(t, x), \; n = 0, 1, \cdots, \tag{73}$$

$$\partial_t^{k-1}\varepsilon_n(+0,\ x)=0,\ k=0,\ 1,\cdots,\ m-1,\ n=0,\ 1,\cdots, \tag{74}$$

$$f_0\equiv f,\ f_{n+1}\equiv(P_0-P)\varepsilon_n,\quad n=0,\ 1,\cdots. \tag{75}$$

Согласно теореме 1 и лемме 3.3

$$\|E\,\varepsilon_n\|_{sp\,(t)}\leqslant c\,\mu^M(t)\int_0^t\mu^{-M}(\tau)\,\|(P-P_0)\,\varepsilon_{n-1}\|_{sp\,(\tau)}\,d\tau. \tag{76}$$

Поэтому, если через R обозначим оператор интегрирования по времени, т. е.

$$R_{k+1}(\beta)\,f=\int_0^t(t-\tau)^k\,\beta(\tau)\,f(\tau)\,d\tau/k!,\ k=0,\ 1,\cdots$$

$$\|E\,\varepsilon_n\|_{sp\,(t)}\leqslant c\,\mu^M(t)\int_0^t d\tau\,\mu^{-M}(\tau)\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=2}^{p+1}\|b_{jp}(\partial_1-\partial_j)\cdots(\partial_{j-1}-\partial_j)\times$$

$$\times\partial_{j+m-p}\cdots\partial_m\,\varepsilon_{n-1}\|\leqslant c^{2k}\,\mu^M(t)\,R_1^k(\beta)\,(\|\mu^{-M}\,E\,\varepsilon_{n-k}\|_{sp\,(\tau)}). \tag{77}$$

С другой стороны

$$\|E\,\varepsilon_m\|_{sp\,(t)}\leqslant c\,\mu^M\int_0^t d\tau\,\mu^{-M}\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=2}^{p+1}\mu_{j-1}\,\|b_{jp}\|_{sp\,(\tau)}(s'-s_1)^{\gamma(1-j)}\times$$

$$\times\|\partial_{m+j-p}\cdots\partial_m\,\varepsilon_{n-1}\|_{sp\,(\tau)}\leqslant c\mu^M\int_0^t d\tau\Big\{\mu^{-M}\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=2}^{p+1}\mu_{j-1}\,(s-s_1)^{\gamma(1-j)}\times$$

$$\times\|b_{jp}\|_{sp\,(\tau)}\,R_{m+j-p-1}(1)\,\|E\,\varepsilon_{n-1}\|_{s,\,p}\Big\}\leqslant$$

$$\leqslant c^m\,\mu^z\Big\{\sum_{p=1}^{m}\sum_{j=2}^{p+1}\mu_{j-1}\,\|b_{jp}\|\,(s'-s)^{\gamma(1-j)}\,m^{\gamma(j-1)}\,R_{m+j-p-1}(1)\Big\}^m\times$$

$$\times\int_0^t\|f\|_{s_m p}\,\mu^{-M}(\tau)\,d\tau. \tag{78}$$

Если выбрать $s_0=s,\ s_{l+1}-s_l=s_l-s_{l-1},\ s_m=s'$, то

$$\|E\,\varepsilon_n\|_{sp\,(t)}\leqslant c^n\,\mu^M(t)\,R_1^k(\beta)\Big\{\prod_{l=1}^{n-k}\sum_{p_l=1}^{m}\sum_{j_l=2}^{p_l+1}\mu_{j_l-1}\times$$

$$\times\|b_{j_l p_l}\|_{sp}\left(\frac{s'-s}{n-k}\right)^{\infty}R_{m+j_l-p_l-1}(1)\int_0^t\mu^{-M}(\tau)\,\|f\|_{s'p\,(\tau)}\,d\tau\Big\}, \tag{79}$$

где

$$\omega=\gamma\left(n-k-\sum_{l=1}^{n-k} j_l\right).$$

Принимая во внимание (22), видим, что правая часть (79) не больше, чем

$$c^n \mu^M(t)\left(\int_0^t \mu^{-M}(\tau)\|f\|_{s'p(\tau)}\,d\tau\right)\times$$

$$\times R_1^k(\beta)\left\{\prod_{l=1}^{n-k}\sum_{p_l=1}^{m}\sum_{j_l=2}^{p_l+1}\left(\frac{s'-s}{n-k}\right)^{\omega}\alpha\, R_{m+j_l-p_l-1}(1)\right\}(1). \tag{80}$$

С помощью теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом легко показать, что это, в свою очередь, не больше, чем

$$c^n \mu^M\left(\int_0^t \mu^{-M}(\tau)\|f\|_{s'p(\tau)}\,d\tau\right) R_1^k(\beta)\quad \left\{\frac{s'-s}{n-k}\right)^{\gamma(n-k)(1-m)}\frac{t^{n-k}}{(n-k)!}\times$$

$$\times R_1^{n-k}(\alpha)\frac{1}{(n-k)!}\right\}\leqslant c^n\mu^M(t)\left(\int_0^t \mu^{-M}(\tau)\|f\|_{s'p(\tau)}\,d\tau\right)\left(\frac{s'-s}{n-k}\right)^{\gamma(1-m)(n-k)}\times$$

$$\times\frac{t_1^{n-k}}{k!\,(n-k)!^2}\left(\int_{t_1}^{t}\beta(\tau)\,d\tau\right)^k\left(\int_0^{t_1}\alpha(\tau)\,d\tau\right)^{n-k}. \tag{81}$$

Пусть теперь k — целое, определяемое из условия

$$k=k(n)=n-\left[-\frac{n}{(\gamma-1)(m-1)}\right],\ [\ ]\text{—целая часть числа.} \tag{82}$$

Теперь уже с помощью основного условия (21) нетрудно показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\|E\varepsilon_n\|$ сходится и также, что имеет место (23). Для доказательства единственности достаточно заметить, что решение однородной задачи, как легко видеть, стремится к нулю при $t\to+0$ с нужной скоростью и при некотором $\delta>0$ оценивается через n-й член ряда для всех $t\leqslant\delta$. Теорема доказана.

§ 5. Примеры

Пример 1. Рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка

$$P_2=P_{22}+P_{21}+P_{20}, \tag{83}$$

$$P_{22}=\partial_t^2-a_j(t,\ x)\,\partial_t\partial_{x_j}-a_{lj}(t,\ x)\,\partial_{x_l}\partial_{x_j},$$

$$P_{21}=b_0(t,x)\,\partial_t+b_j(t,x)\,\partial_{x_j},\quad P_{20}=c(t,x),$$

здесь и далее знаки сумм по повторяющимся индексам опускаются. Функции $\{\lambda_j(t,x,\xi)\}_{j=1}^2$ определяются из характеристического уравнения

$$\lambda^2-\lambda\,(a_j(t,x)\,\xi_j)-a_{ij}\,\xi_i\,\xi_j=0, \tag{84}$$

т. е.

$$\lambda_{1,2}=a_j\,\xi_j\mp\sqrt{(a_i\,a_j+4\,a_{ij})\,\xi_i\,\xi_j}\,.$$

Вводя операторы $\partial_j=\partial_t-\Lambda_j$, $j=1,2$, где Λ_j — п.д. операторы с символами λ_1, $\lambda_2(t,x,\xi)$, соответственно, оператор P_2 можно представить в виде

$$P_2=\partial_1\partial_2+b_{10}\partial_2+b_{21}(\partial_1-\partial_2)+b_{11}. \tag{85}$$

Определив скобки Пуассона,

$$\{\lambda_1,\lambda_2\}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_1^{(j)}\lambda_{2(j)}-\lambda_{1(j)}\lambda_2^{(j)}),$$

$$\{\partial_2,\partial_1\}=(\lambda_2-\lambda_1)_t+\{\lambda_2,\lambda_1\}$$

и субсимвол

$$p_2^s(\xi_0)\equiv p_{21}(t,x,\xi)+\frac{i}{2}\,p_{22(j)}^{(j)}(t,x,\xi_0,\xi)=$$

$$=b_0\xi_0+b_j\,\xi_j+\frac{1}{2}\,[(\lambda_1+\lambda_2)_t+\xi_0\,(\lambda_1+\lambda_2)_{(j)}^{(j)}-(\lambda_1\lambda_2)_{(j)}^{(j)}]\,, \tag{86}$$

для символов псевдодифференциальных операторов b_{10}, b_{21}, получаем следующие выражения:

$$b_{10}\equiv b_0(t,x),$$

$$b_{21}(t,x,\xi)=[2\,(\lambda_2-\lambda_1)]^{-1}\,(2\,p_2^s+\{\partial_1,\partial_2\}+(\lambda_1-\lambda_2)\,\lambda_{2\,(j)}^{(j)}). \tag{87}$$

Условия (14)—(17) теоремы 1 упрощаются и имеют вид: существуют неотрицательные постоянные c_1, $c_2\,(c_1^2+c_2^2>0)$ и функция $\mu(t)$ класса $\mathfrak{M}$ такие, что

$$b_{11},\ b_{10},\ \{\partial_1,\partial_2\}\,/\,K(t)\,(\lambda_1-\lambda_2),\ p_2^s(\lambda_2)\,/\,K(\lambda_1-\lambda_2)\in C(S^0), \tag{88}$$

$$K(t)\equiv c_1+c_2\,\mu'(t)\,/\,\mu(t)$$

(см. [6]).

Условия (14) — (16), (22), (21) теоремы 2 в этом случае имеют вид

$$b_{11},\ b_{10},\ \mu^{2-s}\,b_{21}/\mu',\ \{\partial_1,\partial_2\}\,/\,K(t)\,(\lambda_1-\lambda_2)\in C\,(GS\,(\gamma,\rho,0)), \tag{89}$$

$$\lim_{t\to 0}\max_{t_1\in[0,t]}\left\{\int_0^{t_1}\|p_2^s(\lambda_2(\tau))\|_{s\rho(\tau)}\,d\tau\left(\int_{t_1}^{t}\left\|\frac{p_2^s(\lambda_2)}{\mu(\tau)}\right\|_{s\rho(\tau)}d\tau\right)^{\gamma-2}\right\}=0. \tag{90}$$

Если, в частности, $\mu=t^{\alpha}$, $p_2^s=t^{\beta}$, α, $\beta\in Z_+$, $\alpha-\beta>1$, то последнее условие означает, что

$$\gamma < 2 + \frac{\beta+2}{\alpha-\beta-1}. \tag{91}$$

Это условие является необходимым и достаточным условием корректности задачи Коши для оператора P_2 (см. [2], [3]).

Пример 2. Рассмотрим дифференциальный оператор третьего порядка

$$P_3 = \partial_t^3 + c_j \partial_t^2 \partial_{x_j} + c_{ij} \partial_t \partial_{x_i} \partial_{x_j} + c_{ijk} \partial_{x_i} \partial_{x_j} \partial_{x_k} +$$
$$+ b_0 \partial_t^2 + b_j \partial_t \partial_{x_j} + a_{kj} \partial_{x_k} \partial_{x_j} + d_0 \partial_t + d_j \partial_{x_j} + c(t, x). \tag{92}$$

Пусть $\{\lambda_j(t, x, \xi)\}_{j=1}^3$ — корни уравнения

$$\lambda^3 + (c_j \xi_j) \lambda^2 + (c_{jk} \xi_j \xi_k) \lambda + c_{ijk} \xi_i \xi_j \xi_k = 0. \tag{93}$$

Определив элементарные операторы $\{\partial_j\}_1^3$ с помощью функций $\lambda_j(t, x, \xi)$ обычным образом, перепишем оператор в факторизованном виде

$$P_3 = \partial_1 \partial_2 \partial_3 + b_{10} \partial_2 \partial_3 + b_{22} (\partial_1 - \partial_2) \partial_3 +$$
$$+ b_{32} (\partial_3 - \partial_2)(\partial_3 - \partial_1) + b_{11} \partial_3 + b_{21} (\partial_1 - \partial_2) + b_{12}. \tag{94}$$

Приведем формулы главных символов операторов b_{pj} через коэффициенты оператора P_3:

$$b_{10} = b_0(t, x), \quad b_{22} = [b_j \xi_j - b_0 (\lambda_2 + \lambda_3) - \rho_{12}^1 - \rho_{23}^1 - \rho_{13}^1] / (\lambda_2 - \lambda_1), \tag{95}$$

$$b_{32} = [a_{ij} \xi_i \xi_j + \lambda_1 \rho_{23}^1 + \lambda_2 \rho_{13}^1 + \lambda_3 \rho_{12}^1 + b_0 \lambda_2 \lambda_3 + b_{22} \lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2)] / (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_3),$$

$$b_{11} = d_0 + \rho_{12}^0 + \rho_{23}^0 + \rho_{13}^0 + b_{23}^{(j)} (\lambda_1 - \lambda_2)_{(j)},$$

$$b_{21} = (\lambda_2 - \lambda_1)^{-1} \{d_j \xi_j + \lambda_1 \rho_{23}^0 + \lambda_2 \rho_{13}^0 + \lambda_3 \rho_{12}^0 - \lambda_3 b_{11} -$$
$$- \rho_{123}^1 + b_0 \rho_{23}^1 + b_{22}^{(j)} [\lambda_3 (\lambda_1 - \lambda_2)]_{(j)} + b_{22} (\lambda_1 - \lambda_2)^{(j)} \lambda_{3\,(j)} + \tag{95'}$$
$$+ b_{32}^{(j)} [(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)]_{(j)} + b_{32} (\lambda_3 - \lambda_2)^{(j)} (\lambda_3 - \lambda_1)_{(j)}\},$$

где

$$\rho_{kp}^{(1)} = \lambda_k^{(j)} \lambda_{p\,(j)} - \lambda_{pt}, \quad \rho_{kp}^0 = \lambda_k^{(ij)} \lambda_{p\,(ij)},$$
$$\rho_{123}^1 = (\lambda_2^{(j)} \lambda_{3\,(j)} - \lambda_{3t})_t + \lambda_1^{(ij)} \lambda_{3\,t(j)} -$$
$$- \lambda_1^{(j)} (\lambda_2^{(i)} \lambda_{3\,(i)})_{(j)} - \lambda_1^{(ij)} (\lambda_{2\,(i)} \lambda_{3\,(j)} + \lambda_{2\,(j)} \lambda_{3\,(i)}).$$

Введем обозначение для скобки Якоби:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} = \{\lambda_1, \lambda_2\} + \{\lambda_2, \lambda_3\} + \{\lambda_3, \lambda_1\}.$$

Если R — п.д. оператор с главным символом

$$r(t, x, \xi) \equiv \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} / (\lambda_1 - \lambda_3) \in C(S^0), \tag{96}$$

то из тождества

$$\xi_0 - \Lambda_3 = (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} (\Lambda_3 - \Lambda_2)(\xi_0 - \Lambda_1) + (\Lambda_1 - \Lambda_2)^{-1} (\Lambda_1 - \Lambda_3)(\xi_0 - \Lambda_2)$$

следует, что найдутся п.д. операторы α_1, α_2, R класса $C(L_x^0)$ такие, что имеет место условие (16) теоремы 1, что в нашем частном случае означает, что

$$\partial_3 = \alpha_1\partial_1 + \alpha_2\partial_2 + R. \tag{97}$$

При этом условия (12), (14) теоремы 1 принимают вид

$$\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\mu_1},\ [(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)+(\lambda_3-\lambda_1)^{(j)}(\lambda_3-\lambda_2)_{(j)}]/\mu_2 \in C(S^0), \tag{98}$$

$$\frac{\{\partial_i, \partial_j\}}{K_{j-1}(\lambda_i-\lambda_j)},\ \frac{\{\partial_1, \{\partial_2, \partial_3\}\}}{(\lambda_2-\lambda_3)},\ \frac{\{\partial_3, \{\partial_1, \partial_2\}\}}{(\lambda_1-\lambda_2)} \in C(S^0), \tag{99}$$

$$K_1 = c_1 + c_2\,\mu_1'/\mu_1,\quad K_2 = c_1 + c_2\,\mu_2'/\mu_2,\ i<j,\ i, j=1, 2, 3.$$

Обобщенные условия Э. Э. Леви (17) имеют вид

$$b_{10},\ b_{11},\ b_{12} \in C(S^0), \tag{100}$$

$$b_{22}(t, x, \xi)/K_1,\ tb_{21}/K_1,\ b_{32}/K_2 \in C(S^0). \tag{101}$$

Отметим, что в условиях (101) символы b_{32}, b_{22}, b_{21} можно заменить функциями Леви оператора P_3 (например, b_{32} заменить субсимволом p_3^2 и т. д.).

Условия (12), (14), (16), (22), (21) теоремы 2 будут выполнены, если выполнены условия (98), (99), (96), (100) с заменой класса $C(S^0)$ на $C(GS(\gamma, \rho, 0))$ и функций K_1, K_2 на K_2, а также если

$$t\mu^{2-\varepsilon}\,b_{21}/\mu',\ \mu^{2-\varepsilon}\,b_{22}/\mu',\ \mu^{2-\varepsilon}\,b_{32}/\mu' \in C(GS(\gamma, \rho, 0)), \tag{102}$$

$$\varepsilon > 0,\ \mu(t) \equiv \mu_2(t).$$

$$\lim_{t\to 0}\ \max_{t_1\in[0, t]} \left(t_1 \int_0^{t_1} \|b_{32}\|_{sp(\tau)}\, d\tau\right)\left(\int_{t_1}^{t} \left\|\frac{b_{32}}{\mu_2}\right\|_{sp(\tau)} d\tau\right)^{2\gamma-3} = 0, \tag{103}$$

$$\lim_{t\to 0}\ \max_{t_1\in[0, t]} \left(t^{3-j} \int_0^{t_1} \|b_{2j}\|_{sp(\tau)}\, d\tau\right)^{3-j}\left(t^{2-j} \int_{t_1}^{t} \left\|\frac{b_{2j}}{\mu_1}\right\|_{sp(\tau)} d\tau\right)^{\gamma+j-4} = 0,\ j=1, 2 \tag{104}$$

и только один из символов b_{32}, b_{22}, b_{21} не удовлетворяет условиям Э. Э. Леви (101).

Если, в частности, $\alpha, \beta \in Z_+$, $2\alpha-\beta \geqslant 1$ и

$$(\lambda_i-\lambda_j)(t, x, \xi) = t^{\alpha}|\xi|,\ \mu_2 = \mu_1^2 = t^{2\alpha},\ b_{21} = t^{\alpha-2},\ b_{22} = t^{\alpha-1},\ b_{32} = t^{\beta}, \tag{105}$$

то условие (103) упрощается и означает, что

$$\gamma < \frac{3}{2} + \frac{\beta+2}{2(2\alpha-\beta-1)} \tag{106}$$

или

$$\beta > 2\alpha - 1 - \frac{1+2\alpha}{2(\gamma-1)}. \tag{106'}$$

Если

$$b_{21}=t^{\alpha-2},\ b_{32}=t^{2\alpha-1},\ b_{22}=t^{\beta},\ \alpha-\beta\geqslant 1,$$

то условие (104) при $j=2$ означает, что

$$\gamma<2+\frac{\beta+2}{\alpha-\beta-1}. \tag{107}$$

Если же

$$b_{21}=t^{\beta},\ b_{32}=t^{2\alpha-1},\ b_{22}=t^{\alpha-1},\ \alpha-\beta\geqslant 2,$$

то (104) имеет вид

$$\gamma<3+\frac{3(\beta+2)}{\alpha-\beta-2}.$$

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 16.III.1980

Գ. Ռ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ, Կ. Հ. ՅԱՂՋՅԱՆ. Կոշու խնդիրը Ժևրեի դասերում պսևդոդիֆերենցիալ օպերատորների համար (ամփոփում)

Ապացուցվում է Կոշու խնդրի կոռեկտությունը պսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների համար Սոբոլևի տարածությունում, եթե բավարարվում են Է. Է. Լևիի ընդհանրացրած պայմանները։ Եթե այդ պայմանները խախտվում են, ապա նույն խնդրի կոռեկտությունը ապացուցվում է Ժևրեյի դասում, որի ցուցիչը կախված է Լևիի ֆունկցիայի զրոյի ձգտելու արագությունից։ Հոդվածում ուսումնասիրված պսևդոդիֆերենցիալ հավասարումների են բերվում թույլ հիպերբոլական հավասարումները փոփոխական պատիկությամբ։

G. R. HOVHANISIAN, K. H. YAGDJIAN. *The Cauchy problem for pseudo-differential equations in the scale of Gevrey spaces* (summary)

The paper deals with the Cauchy problem for pseudo-differential operator with characteristic roots of variable multiplicity. If the generalized Levi conditions are satisfied then the well posedness in the Gevrey space with the order depending on the symbol of operator is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. Б. Нерсесян.* О бесконечно дифференцируемых решениях задачи Коши для вырождающихся гиперболических уравнений второго порядка, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 4:3, 1969, 182—191.
2. *В. Я. Иврий.* Условия корректности в классах Жевре задачи Коши для гиперболических операторов с характеристиками переменной кратности, Сибирск. мат. журн., 17:6, 1976, 1256—1270.
3. *К. А. Ягджян.* Задача Коши для слабо гиперболического уравнения в классах Жевре, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 13:1, 1978, 3—22.
4. *S. Steinberg.* Existence and uniqueness of solutions of hyperbolic equations which are not necesserily strictly hiperbolic, J. of Differential Equat., 17, № 1, 1975, 119—153.
5. *А. Б. Нерсесян.* О задаче Коши для вырождающегося гиперболического уравнения второго порядка. Изв. АН Арм.ССР, «Математика», 3:2, 1968, 79—100.

6. *Г. Р. Оганесян.* Задача Коши с весом для слабо гиперболических псевдодифференциальных уравнений с данными на гиперплоскости вырождения. Ученые записки ЕГУ, № 1, 1975, 10—16.
7. *К. А. Ягджян.* О некоторых задачах для гиперболических уравнений в классах Жевре, УМН, 34:4, 1979, 146.
8. *Н. Я. Виленкин.* Комбинаторика, М., Изд. «Науак», 1969.
9. *А. Б. Нерсесян, Г. Р. Оганесян.* О задаче Коши для слабо гиперболических уравнений, Изв. АН Арм.ССР, «Математика», IX, № 2, 1974, 149—165.