

М. Ж. ГРИГОРЯН

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ
ДВОЙНЫМИ РЯДАМИ

§ 1. В в е д е н и е

А. А. Талаляном были доказаны следующие теоремы, [(1), (2)].

Теорема I. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — система функций, определенных на измеримом множестве $G \subset [0, 1]$; $|G|^* > 0$ и образующих нормированный базис в пространстве $L^p(G)$; $p > 1$. Тогда для любой измеримой функции $f(x)$, определенной на множестве G , существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) \quad (a_k - \text{действительные числа}), \quad (1.1)$$

обладающий следующими свойствами:

1) если обозначить через A множество тех точек из G , где $f(x)$ конечна, то на множестве A ряд (1.1) асимптотически сходится к $f(x)$ в метрике L^p , а на множестве $G \setminus A$ этот ряд сходится к $f(x)$ по мере;

2) $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

Теорема II. Если $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис пространства $L^p[0, 1]$; $p > 1$, то для любой функции $f(x) \in L^q[0, 1]$; $0 < q < 1$, существует ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (1.2)$$

который сходится к $f(x)$ в метрике $L^q[0, 1]$; $0 < q < 1$, т. е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right|^q dx = 0.$$

В 1977 году К. Гофман и Р. Зинк [3] опираясь на лемму 3 работы [1] доказали следующую теорему.

Теорема III. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис во всех пространствах

$$L^p[0, 1]; \quad p > 1 \text{ и } \inf_k \|\varphi_k\|_{L^p} > 0.$$

Тогда для любой измеримой функции $F(x, y)$ существует ряд

* Символ $|G|$ обозначает меру Лебега множества G .

$$\sum_{k, s=1}^{\infty} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \quad (1.3)$$

обладающий следующими свойствами:

1) на множестве E , где $F(x, y)$ конечна, ряд (1.3) по Принс-хейму асимптотически сходится к $F(x, y)$ в метрике $L^1[0,1] \times [0,1]$, а на множестве $[0,1] \times [0,1] \setminus E$ ряд (1.3) сходится к $F(x, y)$ по мере,

$$2) \lim_{k, s \rightarrow \infty} a_{k, s} = 0.$$

В этой же работе авторы поставили вопрос в возможности доказательства теоремы III при менее жестких условиях на систему $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, в частности, для полных ортонормированных систем.

В настоящей работе удается доказать еще более общий результат, т. е. получен полный аналог теоремы А. А. Талаляна для двумерного случая. При этом здесь также применяется техника работы [1].

Имеет место следующая

Теорема 1. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — нормированный базис пространства $L^p(G)$; $p > 1$; $|G| > 0$.

Тогда для любой измеримой функции $F(x, y)$, определенной на множестве $G \times G$, существует ряд

$$\sum_{k, s=1}^{\infty} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \quad (1.4)$$

обладающий следующими свойствами:

1) на множестве E , где $F(x, y)$ конечна, ряд (1.4) по Принс-хейму асимптотически сходится к $F(x, y)$ в метрике $L^p(G \times G)$, $p > 1$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k, s=1}^{n, m} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - F(x, y) \right\|_{L^p(E_\varepsilon)} = 0; |E_\varepsilon| > |E| - \varepsilon,$$

а на множестве $H \setminus E$ (где $H = G \times G$), ряд (1.4) сходится к $F(x, y)$ по мере,

$$2) \lim_{k, s \rightarrow \infty} c_{k, s} = 0.$$

Основываясь на лемме 2 работы [2] можно установить следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис пространства $L^p[0,1]$, $p \geq 1$.

Тогда для любой функции $f(x, y) \in L^q[0,1] \times [0,1]$; $0 < q < 1$ существует двойной ряд

$$\sum_{k, s=1}^{\infty} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \quad (1.5)$$

который по Прингсхейму сходится к $f(x, y)$ в метрике $L^q [0,1] \times [0,1]$, $0 < q < 1$, т. е.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, s=1}^{n, m} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f(x, y) \right|^q dx dy = 0. \quad (1.6)$$

Теорема 3. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис пространства $L^p [0,1]$, $p \geq 1$.

Тогда существует ряд (1.5), у которого не все коэффициенты $c_{k, s}$ равны нулю и который по Прингсхейму сходится к нулю в метрике всех пространств $L^q [0,1] \times [0,1]$, $0 < q < 1$, т. е.

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, s=1}^{n, m} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right|^q dx dy = 0 \text{ для всех } q, 0 < q < 1. \quad (1.7)$$

В дальнейшем через $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ будем обозначать сопряженную к $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ систему функций.

Мы будем пользоваться следующим хорошо известным свойством базиса.

Если $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — базис пространства $L^p(G)$, $p > 1$, $|G| > 0$, то для любой $f(x) \in L^p(G)$ имеет место неравенство

$$\|S_n(f)\|_{L^p(G)} = \left\| \sum_{k=1}^n a_k(f) \varphi_k(x) \right\|_{L^p(G)} \leq C_p \|f\|_{L^p(G)}, \quad (1.8)$$

где

$$a_k(f) = \int_G f(t) \psi_k(t) dt$$

и C_p — абсолютная постоянная, зависящая только от p и от базиса $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

§ 2. Доказательства основных лемм

Лемма 1. Пусть даны прямоугольник $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \subset T = [0,1] \times [0,1]$, натуральное число N , действительные числа $\gamma \neq 0$; $0 < \delta < 1$ и $\eta > 0$. Пусть, далее $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — нормированный базис пространства $L^p(G)$, $p \geq 1$, $G \subset [0,1]$, $|G| > 0$, $H = G \times G$.

Тогда существуют множество e и функция $g(x, y)$, обладающие следующими свойствами:

$$a) \quad g(x, y) = \begin{cases} \gamma & \text{при } (x, y) \in \Delta \setminus e \\ 0 & \text{вне } \Delta \end{cases}; \quad |e| < \delta |\Delta|,$$

$$б) \quad g(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad (x, y) \in T, \text{ где } f_i(t) \in L^p(\Delta); \quad i = 1, 2.$$

$$в) \|S_{n,m}[g]\|_{L^p(H)} \leq 4 \cdot c_p^2 \cdot \delta^{\frac{2(p-1)}{p}} \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|^{1/p}, \quad m, n=1, 2, \dots,$$

$$г) \|S_{n,m}[g]\|_{L^p(H)} < \eta, \quad \text{при } \min(n, m) \leq N,$$

где

$$S_{n,m}[g] = \sum_{k,s=1}^{n,m} a_{k,s}(g) \cdot \varphi_k(x) \varphi_s(y);$$

$$a_{k,s}(g) = \iint_H g(x, y) \psi_k(x) \psi_s(y) dx dy \quad (2.1)$$

и c_p — константа неравенства (1.8).

Доказательство леммы 1. Положим

$$g_1(x) = \begin{cases} |\gamma|^{1/2} & \text{при } x \in \Delta_1; \\ 0 & \text{вне } \Delta_1 \end{cases}; \quad g_2(y) = \begin{cases} \operatorname{sign} \gamma \cdot |\gamma|^{1/2} & \text{при } y \in \Delta_2; \\ 0 & \text{вне } \Delta_2 \end{cases}. \quad (2.2)$$

Функции $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ продолжим до отрезка $[0,1]$, полагая равными нулю вне множества G .

Применим лемму 1 работы [1] к функциям $g_i(t)$ $i=1, 2$ $\psi_1(t), \dots, \psi_N(t)$, рассматриваемым на Δ_i ; $i=1, 2$. По этой лемме, где положено

$$\epsilon_0 = \frac{\delta}{2} \quad \text{и} \quad \epsilon = \eta \cdot \delta^{\frac{p-1}{p}} \cdot [2 \cdot N \cdot |\gamma|^{1/2} \cdot |\Delta|^{1/2p} \cdot c_p]^{-1},$$

где c_p — константа неравенства (1.8), можно определить ограниченную функцию $f_i(t)$ и множество $e_i \subset \Delta_i$ ($i=1, 2$), обладающие свойствами:

$$f_i(t) = g_i'(t) \quad \text{при } t \in e_i; \quad |e_i| < \frac{\delta}{2} |\Delta_i|; \quad i=1, 2, \quad (2.3)$$

$$\int_{\Delta_i} |f_i(t)|^p dt \leq \frac{2}{(\delta/2)^{p-1}} \int_{\Delta_i} |g_i(t)|^p dt; \quad i=1, 2, \quad (2.4)$$

$$|a_k^{(i)}| = \left| \int_{\Delta_i} f_i(t) \psi_k(t) dt \right| < \eta \cdot \delta^{\frac{p-1}{p}} \cdot [2 \cdot N \cdot |\gamma|^{1/2} \cdot |\Delta|^{1/2p} \cdot c_p]^{-1}; \quad k \leq N. \quad (2.5)$$

Функции $f_i(t)$; $i=1, 2$ продолжим до отрезка $[0,1]$, полагая равными нулю вне Δ_i ; $i=1, 2$.

Положим

$$g(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \text{и} \quad e = e_1 \times \Delta_1 \cup e_2 \times \Delta_2. \quad (2.6)$$

Очевидно

$$S_{n,m}[g] = S_n(f_1) \cdot S_m(f_2) \quad n, m=1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Из (2.2), (2.3), (2.4), (2.6) следует, что функция $g(x, y)$ и множество e удовлетворяют условиям а) и б) леммы 1. Неравенство в) вытекает из условий (1.8), (2.4), (2.6) и (2.7)

$$\|S_{n,m}[g]\|_{L^p(H)} = \|S_n(f_1)\|_{L^p(O)} \cdot \|S_m(f_2)\|_{L^p(O)} \leq c_p^2 \cdot 4 \cdot \delta^{-\frac{2(p-1)}{p}} \cdot |\gamma| \cdot |\Delta|^{1/p}. \quad (2.8)$$

Учитывая (1.8), (2.2), (2.4), (2.5) и (2.7) при $\min(n, m) \leq N$ получаем

$$\begin{aligned} \|S_{n,m}[g]\|_{L^p(H)} &= \|S_n(f_1)\|_{L^p(O)} \cdot \|S_m(f_2)\|_{L^p(O)} \leq \\ &\leq \max_{i=1,2} \left[c_p \cdot \|f_i\|_{L^p(\Delta_i)} \cdot \sum_{k=1}^N |a_k^{(i)}| \cdot \|\varphi_k\|_{L^p(O)} \right] \leq \eta. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^\infty$ — нормированный базис пространства $L^p(G)$, $G \subset [0,1]$, $|\gamma| > 0$, $p > 1$ и $f(x, y)$ — произвольная ступенчатая функция, определенная на $[0,1] \times [0,1]$.

Тогда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ и натурального N_1 можно определить измеримое множество e_0 и действительные числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=N_1}^M$ так, что выполняются условия:

$$1^\circ. e_0 \subset H = G \times G; |e_0| < \varepsilon,$$

$$2^\circ. \left\| \sum_{k,s=N_1}^M a_{k,s} \varphi_k(x) \cdot \varphi_s(y) - f(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_0)} < \varepsilon,$$

$$3^\circ. |a_{k,s}| < \varepsilon, N_1 \leq k, s \leq M,$$

$$4^\circ. \left\| \sum_{k,s=N_1}^{n,m} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^p(e)} \leq \varepsilon + \|f\|_{L^p(e)}; N_1 < n, m \leq M,$$

где e — произвольное измеримое подмножество множества $H \setminus e_0$.

Доказательство леммы 2. Функции $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ и $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ продолжим до отрезка $[0,1]$, полагая равными нулю вне множества G . Пусть Δ_k , $k=1, 2, \dots, \nu$ — прямоугольники постоянства функции $f(x, y)$ и $f(x, y) = \gamma_k$ при $(x, y) \in \Delta_k$. Тогда

$$f(x, y) = \sum_{k=1}^{\nu} \gamma_k \chi_{\Delta_k}(x, y), \text{ где } \chi_{\Delta_k}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } (x, y) \in \Delta_k \\ 0 & \text{вне } \Delta_k. \end{cases} \quad (2.10)$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\max_{1 \leq k \leq \nu} \left[C_p^2 |\gamma_k| |\Delta_k|^{1/p} \cdot \varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p}} \right] \leq \frac{\varepsilon}{4}. \quad (2.11)$$

В формулировке леммы 1. полагая

$$\Delta = \Delta_1, \gamma = \gamma_1, \delta = \varepsilon, \eta = \varepsilon \cdot 2^{-2}, N = N_1,$$

получаем функцию $g_1(x, y)$ и измеримое множество $e_1 \subset \Delta_1$ со следующими свойствами:

$$g_1(x, y) = \begin{cases} \gamma_1 & \text{при } (x, y) \in \Delta_1 \setminus e_1, \quad |e_1| < \varepsilon |\Delta_1| \\ 0 & \text{вне } \Delta_1 \end{cases} \quad (2.12)$$

$$g_i(x, y) = f_i^{(1)}(x) \cdot f_i^{(1)}(y), \text{ где } f_i^{(1)}(t) \in L^p(0, 1), \quad i=1, 2, \quad (2.13)$$

$$\|S_{n,m}^{(1)}[g_1]\|_{L^p(H)} \leq \frac{\varepsilon}{4^i} \text{ при } \min(n, m) < N_1, \quad (2.14)$$

$$\|S_{n,m}^{(1)}[g_1]\|_{L^p(H)} \leq c_p^2 \cdot 4 \cdot \varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p}} \cdot |\gamma_1| \cdot |\Delta_1|^{1/p} < \varepsilon/2^4, \quad n, m=1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

где

$$S_{n,m}^{(1)}[g_1] = \sum_{k,s=1}^{n,m} a_{k,s}^{(1)} \varphi_k(x) \varphi_s(y); \quad a_{k,s}^{(1)} = \iint_{\Delta_1} g_1(x, y) \varphi_k(x) \varphi_s(y) dx dy. \quad (2.16)$$

Из базисности системы $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ в $L^p(G)$ и из условия (2.13) следует

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|S_{n,m}^{(1)}[g_1] - g_1(x, y)\|_{L^p(H)} = 0. \quad (2.17)$$

В силу (2.12) и (2.17) имеем

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} \|S_{n,m}^{(1)}[g_1] - \gamma_1 \cdot \chi_{\Delta_1}(x, y)\|_{L^p(H \setminus e_1)} = 0. \quad (2.18)$$

Возьмем число $N_2 > N_1$ настолько большим, чтобы выполнялись следующие условия:

$$|a_{k,s}^{(1)}| < \varepsilon/2^4 \text{ при } k, s \geq N_2, \quad (2.19)$$

$$\|S_{n,m}^{(1)}[g_1] - \gamma_1 \cdot \chi_{\Delta_1}(x, y)\|_{L^p(H \setminus e_1)} \leq \varepsilon/2^4 \text{ при } n, m \geq N_2. \quad (2.20)$$

Предположим, что определены функции $g_1(x, y), \dots, g_{k_0-1}(x, y)$, числа $N_1 < N_2 < \dots < N_{k_0-1}$ и множества $e_1, \dots, e_{k_0-1}$, где

$$g_i(x, y) = f_i^{(1)}(x) \cdot f_i^{(1)}(y); \quad f_i^{(1)}(t) \in L^p[0, 1]; \quad j=1, 2, \quad i=1, \dots, k_0-1, \quad (2.21)$$

$$g_i(x, y) = \begin{cases} \gamma_i & \text{при } (x, y) \in \Delta_i \\ 0 & \text{вне } \Delta_i \end{cases} \quad i=1, 2, \dots, k_0-1. \quad (2.22)$$

Положим

$$\Delta'_i = \bigcup_{j=1}^i \Delta_j; \quad e'_i = \bigcup_{j=1}^i e_j.$$

Легко видеть, что число $N_{k_0} > N_{k_0-1}$ можно выбрать настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$\left| \iint_{\Delta_{k_0-1}} \left[\sum_{i=1}^{k_0-1} g_i(x, y) \right] \cdot \varphi_s(x) \varphi_j(y) dx dy \right| = \left| \sum_{i=1}^{k_0-1} a_{j,s}^{(i)} \right| < \frac{\varepsilon}{2^{k_0+2}},$$

при $j, s \geq N_{k_0}$ (2.23)

где

$$a_{s,j}^{(l)} = \iint_{\Delta_l \cap H} g_l(x, y) \cdot \psi_s(x) \psi_j(y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 g_l(x, y) \psi_s(x) \psi_j(y) dx dy, \quad (2.24)$$

$$\left\| \sum_{l=1}^{k_0-1} s_{n,m}^{(l)} [g_l] - \sum_{l=1}^{k_0-1} \gamma_l \gamma_{\Delta_l}(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_{k_0-1})} \leq \frac{\varepsilon}{2^{k_0+2}}; \quad n, m \geq N_{k_0}. \quad (2.25)$$

В формулировке леммы 1, полагая

$$\Delta = \Delta_{k_0}; \quad \gamma = \gamma_{k_0}; \quad \delta = \varepsilon, \quad \eta = \varepsilon/2^{k_0+3}, \quad N = N_{k_0},$$

получаем функцию $g_{k_0}(x, y)$ и измеримое множество $e_{k_0} \subset \Delta_{k_0}$ со следующими свойствами:

$$g_{k_0}(x, y) = \begin{cases} \gamma_{k_0} & (x, y) \in \Delta_{k_0} \setminus e_{k_0}; \\ 0 & \text{вне } \Delta_{k_0} \end{cases} \quad |e_{k_0}| < \varepsilon |\Delta_{k_0}|, \quad (2.26)$$

$$g_{k_0}(x, y) = f_1^{(k_0)}(x) \cdot f_2^{(k_0)}(y), \quad \text{где } f_i^{(k_0)}(t) \in L^p[0, 1], \quad i=1, 2, \quad (2.27)$$

$$\|S_{n,m}^{(k_0)}[g_{k_0}]\|_{L^p(H)} \leq \varepsilon/2^{k_0+3} \quad \text{при } \min(n, m) \leq N_{k_0}, \quad (2.28)$$

$$\|S_{n,m}^{(k_0)}[g_{k_0}]\|_{L^p(H)} < 4 \cdot c_p^2 \cdot \varepsilon^{-\frac{2(p-1)}{p}} \cdot |\gamma_{k_0}| \cdot |\Delta_{k_0}|^{1/p} < \frac{\varepsilon}{2^i}, \quad n, m = 1, 2, \dots, \quad (2.29)$$

где

$$S_{n,m}^{(k_0)}[g_{k_0}] = \sum_{s,j=1}^{n,m} a_{s,j}^{(k_0)} \varphi_s(x) \varphi_j(y); \quad a_{s,j}^{(k_0)} = \iint_H g_{k_0}(x, y) \psi_s(x) \psi_j(y) dx dy. \quad (2.30)$$

Ввиду того, что

$$a_{n,m}^{(k_0)} = S_{n,m}^{(k_0)}[g_{k_0}] + S_{n-1,m-1}^{(k_0)}[g_{k_0}] - S_{n-1,m}^{(k_0)}[g_{k_0}] - S_{n,m-1}^{(k_0)}[g_{k_0}] \quad (2.31)$$

из (2.28) получаем

$$|a_{n,m}^{(k_0)}| < \varepsilon/2^{k_0+1} \quad \text{при } \min(n, m) \leq N_{k_0}. \quad (2.32)$$

Таким образом, определяются функции $g_1(x, y), \dots, g_\nu(x, y)$ и числа $N_1 < N_2 < \dots < N_\nu$, такие, что для каждого $k_0, 1 \leq k_0 \leq \nu$ удовлетворяются условия (2.26) — (2.32).

Положим

$$F(x, y) = \sum_{k=1}^{\nu} g_k(x, y), \quad e_0 = \bigcup_{k=1}^{\nu} e_k, \quad (2.33)$$

$$\bar{a}_{k,s} = \iint_H F(x, y) \psi_k(x) \psi_s(y) dx dy, \quad (2.34)$$

$$S_{n,m}[F] = \sum_{k,s=1}^{n,m} \bar{a}_{k,s} \cdot \varphi_k(x) \varphi_s(y). \quad (2.35)$$

Отсюда будем иметь

$$a_{k,s} = \sum_{l=1}^{\nu} a_{k,s}^{(l)}; S_{n,m}[F] = \sum_{l=1}^{\nu} S_{n,m}^{(l)}[g_l]. \quad (2.36)$$

Очевидно, что $|e_0| < \varepsilon$, т. е. условие 1° выполнено.

Легко видеть, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_{n,m}[F] - F(x, y)\|_{L^p(H)} = 0. \quad (2.37)$$

Ввиду того, что $F(x, y) = f(x, y)$ при $(x, y) \in H \setminus e_0$, из (2.37) получаем

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \|S_{n,m}[F] - f(x, y)\|_{L^p(H \setminus e_0)} = 0. \quad (2.38)$$

Выберем натуральное число M настолько большим, чтобы

$$\left\| \sum_{k,s=1}^M a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_0)} < \varepsilon/4. \quad (2.39)$$

Покажем, что числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=N_1}^M$ удовлетворяют всем условиям леммы 2.

В силу (2.28), (2.33), (2.36) имеем

$$\|S_{n,m}[F]\|_{L^p(H)} \leq \sum_{l=1}^{\nu} \|S_{n,m}[g_l]\|_{L^p(H)} < \varepsilon/4 \text{ при } \min(n, m) < N_1. \quad (2.40)$$

Ввиду того, что

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{k,s=N_1}^M a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_0)} \leq \\ & \leq \|S_{M,M}[F] - f(x, y)\|_{L^p(H \setminus e_0)} + \|S_{N_1-1, N_1-1}[F]\|_{L^p(H)} + \\ & + \|S_{N_1-1, M}[F]\|_{L^p(H)} + \|S_{M, N_1-1}[F]\|_{L^p(H)}, \end{aligned} \quad (2.41)$$

из (3.39) и (3.40) вытекает

$$\left\| \sum_{k,s=N_1}^M a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_0)} < \varepsilon. \quad (2.42)$$

Таким образом, условие 2° леммы 2 доказано.

Проверим условия 3° и 4°.

Для любых натуральных чисел k, s , $N_1 \leq k, s < N$, найдутся некоторые i и j , такие что

$$N_i \leq k < N_{i+1}; N_j \leq s < N_{j+1} \quad i, j < \nu. \quad (2.43)$$

Из (2.36) получаем

$$|a_{k,s}| \leq \left| \sum_{l=1}^{q-1} a_{k,s}^{(l)} \right| + |a_{k,s}^{(q)}| + \left| \sum_{l=q+1}^{\nu} a_{k,s}^{(l)} \right|, \text{ где } q = \min(i, j). \quad (2.44)$$

Согласно условию (2.23) первое слагаемое в правой части неравенства (2.44) не больше $\varepsilon/2^{q+1}$.

Из условий (2.29) и (2.31) легко следует, что

$$|a_{k,s}^{(q)}| < \varepsilon/2. \quad (2.45)$$

Согласно условию (2.31), ввиду того, что $\min(k, s) < N_{q+1} < \dots < N_r$, получаем

$$\left| \sum_{l=q+1}^r a_{k,s}^{(l)} \right| \leq \varepsilon/2^{q+2} + \dots + \varepsilon/2^{r+1} < \varepsilon/2^{q+1}. \quad (2.46)$$

Итак, при $k, s < N$, будем иметь

$$|a_{k,s}| < \varepsilon/2^{q+1} + \varepsilon/2 + \varepsilon/2^{q+1} < \varepsilon. \quad (2.47)$$

Неравенство (2.47) для случая $\min(k, s) \leq N$, доказывается аналогично. Если $k, s > N$, то неравенство следует из (2.23).

Выполнение условия 3° доказано.

Теперь проверим условие 4° леммы 2.

Очевидно

$$\left\| \sum_{k, s=N_1}^{n, m} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^p(e)} \leq \|S_{n,m}[F]\|_{L^p(e)} + \\ + \|S_{N_1-1, m}[F]\|_{L^p(e)} + \|S_{n, N_1-1}[F]\|_{L^p(e)} + \|S_{N_1-1, N_1-1}[F]\|_{L^p(e)}, \quad (2.48)$$

где $e \in H \setminus e_0$.

Для любых натуральных чисел $n, m, N_1 < n, m \leq N$, найдутся некоторые i и j , такие что

$$N_i \leq n < N_{i+1}, \quad N_j \leq m < N_{j+1}. \quad (2.49)$$

Из (2.36) вытекает

$$\|S_{n,m}[F]\|_{L^p(e)} \leq \left\| \sum_{l=1}^{q-1} S_{n,m}^{(l)}[g_l] - \sum_{k=1}^{q-1} \gamma_k \chi_k^{(x,y)} \right\|_{L^p(e)} + \\ + \left\| \sum_{k=q}^r S_{n,m}^{(k)}[g_k] \right\|_{L^p(e)} + \left\| \sum_{k=1}^{q-1} \gamma_k \chi_k(x, y) \right\|_{L^p(e)}, \quad (2.50)$$

где $q = \min(i, j)$.

Согласно условию (2.28), (2.29) и ввиду того, что $\min(n, m) < N_{q+1} < \dots < N_r$, получаем

$$\left\| \sum_{k=q}^r S_{n,m}^{(k)}[g_k] \right\|_{L^p(e)} \leq \|S_{n,m}^{(q)}[g_q]\|_{L^p(e)} + \sum_{k=q+1}^r \|S_{n,m}^{(k)}(g_k)\|_{L^p(e)} < \varepsilon/4. \quad (2.51)$$

Отсюда и из (2.10), (2.25), (2.49) и (2.50) получаем

$$\|S_{n,m}[F]\|_{L^p(e)} \leq \varepsilon/4 + \|f\|_{L^p(e)}. \quad (2.52)$$

Учитывая (2.48), (2.40), (2.49), (2.50) и (2.52) при $n, m < N$, имеем

$$\left\| \sum_{k, s=N_1}^{n, m} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^p(e)} < \varepsilon + \|f\|_{L^p(e)}. \quad (2.53)$$

Неравенство (2.53) при $\max(n, m) > N$ доказывается аналогично.

Лемма 2 доказана.

Из леммы 2 непосредственно следует

Лемма 3. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — нормированный базис пространства $L^p(G)$, $p \geq 1$, $G \in [0, 1]$, $|G| > 0$ и $f(x, y)$ — произвольная почти всюду конечная измеримая функция, определенная на G .

Тогда для любого положительного числа $\varepsilon > 0$ и натурального N можно определить измеримое множество e_0 и действительные числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=N}^M$ так, что выполняются условия:

1. $e_0 \subset H = G \times G$, $|e_0| < \varepsilon$,
2. $|a_{k,s}| < \varepsilon$, $N < k$, $s \leq M$,
3. $\left\| \sum_{k,s=N}^M a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f(x, y) \right\|_{L^p(H|e_0)} < \varepsilon$,
4. $\left\| \sum_{k,s=N}^{n,m} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^p(\Delta(r))} \leq \varepsilon + 1/\lambda_{L^p(e_0)}$; $\forall e \subset H \setminus e_0$; $N < n, m \leq M$.

Лемма 4. Пусть $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ — базис пространства $L^r_{[0,1]}$, $r \geq 1$, $f(x, y) \in L^p_{[0,1] \times [0,1]}$, $0 < p < 1$ и p_0 — фиксированное число $0 < p_0 < p$.

Тогда для всякого натурального N и положительного $\eta > 0$ существует полином вида

$$H(x, y) = \sum_{k,s=N}^M c_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \quad (2.55)$$

который удовлетворяет условиям

$$\alpha) \quad \int_0^1 \int_0^1 |H(x, y) - f(x, y)|^q dx dy < \eta, \quad p_0 \leq q < p,$$

$$\beta) \quad \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k,s=N}^{k,s} c_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right|^q dx dy \leq \eta + \\ + \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)|^q dx dy, \quad p_0 \leq q \leq p, \quad N \leq k, s \leq M.$$

Доказательство леммы 4. Возьмем ступенчатую функцию $g(x, y)$ таким образом, чтобы

$$\int_0^1 \int_0^1 |g(x, y) - f(x, y)|^q dx dy < \eta/2, \quad p_0 \leq q \leq p. \quad (2.56)$$

Пусть $\Delta_k = \Delta_k^{(1)} \times \Delta_k^{(2)}$, $1 \leq k \leq v$ — прямоугольники постоянства функции $g(x, y)$ и $g(x, y) = \tau_k$ при $(x, y) \in \Delta_k$.

Положим

$$f_k^{(1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Delta_k^{(1)} \\ 0 & \text{вне } \Delta_k^{(1)} \end{cases}; \quad f_k^{(2)}(y) = \begin{cases} 1 & \text{при } y \in \Delta_k^{(2)} \\ 0 & \text{вне } \Delta_k^{(2)} \end{cases}, \quad k=1, 2, \dots, v. \quad (2.57)$$

Ясно, что

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^v f_k^{(1)}(x) \cdot f_k^{(2)}(y) \quad (2.58)$$

и

$$\int_0^1 \int_0^1 |g(x, y)|^q dx dy = \sum_{k=1}^v \int_0^1 \int_0^1 |f_k^{(1)}(x) \cdot f_k^{(2)}(y)|^q dx dy, \quad p_0 \leq q \leq p. \quad (2.59)$$

Положим

$$a_s = 1 + \sup_{p_0 < q \leq p} \left[\int_0^1 |f_s^{(1)}(x)|^q dx + \int_0^1 |f_s^{(2)}(y)|^q dy \right]. \quad (2.60)$$

В работе [2] для полных ортонормированных систем доказана лемма 2. Точно таким же образом доказывается следующая

Лемма 5. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ — базис пространства $L^r[0,1]$ $r \geq 1$, $f(x) \in L^p[0,1]$; $0 < p < 1$ и p_0 — фиксированное число, $0 < p_0 < p$. Тогда для всякого натурального N и положительного $\varepsilon > 0$ существует полином по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^\infty$ вида

$$H(x) = \sum_{k=N}^m b_k \varphi_k(x), \quad (2.61)$$

который удовлетворяет условиям

$$\int_0^1 |H(x) - f(x)|^q dx < \varepsilon, \quad p_0 \leq q \leq p, \quad (2.62)$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N}^s b_k \varphi_k(x) \right|^q dx < \varepsilon + \int_0^1 |f(x)|^q dx; \quad N < s \leq m, \quad p_0 \leq q \leq p. \quad (2.63)$$

Если N_s — заранее заданное натуральное число и $\varepsilon = \eta \cdot (4v \cdot a_s)^{-1}$, то в силу леммы 5 существует полином

$$\sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(i)} \varphi_k(t), \quad (2.64)$$

удовлетворяющий условиям

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(i)} \varphi_k(t) - f_s^{(i)}(t) \right|^q dt < \eta \cdot [4v \cdot a_s]^{-1}, \quad i=1, 2, \quad p_0 \leq q \leq p, \quad (2.65)$$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=N_s}^m b_k^{(1)} \varphi_k(t) \right|^q dt \leq \eta (4\nu \cdot a_s)^{-1} + \int_0^1 |f_s^{(1)}(t)|^q dt, \quad N_s \leq m \leq m_s, \\ i = 1, 2. \quad (2.66)$$

Таким образом, для фиксированных s и i , $1 \leq s \leq \nu$, $i = 1, 2$ определяется полином по системе $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^m$ вида (2.64), удовлетворяющий условиям (2.65) и (2.66), при этом, очевидно, можно взять

$$N_1 = N + 1, \quad N_s = m_s + 1, \quad 1 < s \leq \nu. \quad (2.67)$$

Докажем, что полином

$$H(x, y) = \sum_{k, s=N}^M c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) = \sum_{l=1}^{\nu} \sum_{k, s=N_l}^{m_l} b_k^{(1)} b_s^{(2)} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \quad (2.68)$$

где

$$M = m_{\nu}^{(1)}, \quad \text{и } c_{k, s} = b_k^{(1)} \cdot b_s^{(2)}, \quad k, s = N, N+1, \dots, M \quad (2.69)$$

удовлетворяет требованиям леммы 4.

Покажем, что

$$J_s = \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, l=N_s}^{m_s} c_{k, l} \varphi_k(x) \varphi_l(y) - f_s^{(1)}(x) \cdot f_s^{(2)}(y) \right|^q dx dy < \\ < \eta/2\nu; \quad s = 1, 2, \dots, \nu; \quad p_0 \leq q < p. \quad (2.70)$$

В самом деле, пользуясь теоремой Фубини получаем

$$J_s = \int_0^1 \left| \sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(1)} \varphi_k(x) - f_s^{(1)}(x) \right|^q dx \cdot \int_0^1 \left| \sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(2)} \varphi_k(y) \right|^q dy + \\ + \int_0^1 \left| \sum_{k=N_s}^{m_s} b_k^{(2)} \varphi_k(y) - f_s^{(2)}(y) \right|^q dy \cdot \int_0^1 |f_s^{(1)}(x)|^q dx, \quad p_0 \leq q \leq p. \quad (2.71)$$

Отсюда и из условий (2.60), (2.65) и (2.66) вытекает (2.70). Учитывая (2.56), (2.58), (2.68) и (2.70), получаем

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, l=N}^M c_{k, l} \varphi_k(x) \varphi_l(y) - f(x, y) \right|^q dx dy \leq \eta, \quad p_0 \leq q \leq p. \quad (2.72)$$

Теперь проверим выполнение условия β) леммы 4. Пусть $N \leq k$, $s \leq M$ и числа i_0 и j_0 , в силу (2.67), выбраны так, что

$$N_{i_0+1} \leq k \leq m_{i_0+1}, \quad N_{j_0+1} \leq s \leq m_{j_0+1}. \quad (2.73)$$

Обозначая $n = \min(i_0, j_0)$ из условий (2.69), (2.73) выводим, что

$$J_{ks} = \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{l, l=N}^{k, s} c_{l, l} \varphi_l(x) \varphi_l(y) \right|^q dx dy = \\ = \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{j=1}^n \sum_{l, l=N_j}^{m_j} c_{l, l} \varphi_l(x) \varphi_l(y) + \sum_{l, l=m_n}^{k, s} c_{l, l} \varphi_l(x) \varphi_l(y) \right|^q dx dy \leq \quad (2.74)$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left| \sum_{l=N_j}^{m_j} b_l^{(1)} \varphi_l(x) \right|^q dx \cdot \int_0^1 \left| \sum_{l=N_j}^{m_j} b_l^{(2)} \varphi_l(y) \right|^q dy +$$

$$+ \max_{m_n < k', s' < m_n+1} \left[\int_0^1 \left| \sum_{l=m_n}^{k'} b_l^{(1)} \varphi_l(x) \right|^q dx \cdot \int_0^1 \left| \sum_{l=m_n}^{s'} b_l^{(2)} \varphi_l(y) \right|^q dy \right].$$

Отсюда и из условий (2.60), (2.67) получаем

$$J_{k'} = \sum_{j=1}^n \left\{ \left[\eta \cdot (4\nu a_j)^{-1} + \int_0^1 |f_j^{(1)}(x)|^q dx \right] \cdot \left[\eta \cdot (4\nu a_j)^{-1} + \int_0^1 |f_j^{(2)}(y)|^q dy \right] \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \left[\eta \cdot 2\nu + \int_0^1 \int_0^1 |f_j^{(1)}(x) \cdot f_j^{(2)}(y)|^q dx dy \right] = \eta/2 + \int_0^1 \int_0^1 |g(x, y)|^q dx dy \leq \eta + 1$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y)|^q dx dy. \quad (2.75)$$

Лемма 4 доказана.

§ 3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $F(x, y)$ — измеримая функция, определенная на множестве $H = G \times G$.

Обозначим

$$A = \{(x, y) \in H, |F(x, y)| < +\infty\}, \quad B = \{(x, y), F(x, y) = +\infty\},$$

$$C = \{(x, y); F(x, y) = -\infty\}. \quad (3.1)$$

Положим

$$f_1(x, y) = \begin{cases} F(x, y) & \text{при } (x, y) \in A \\ 1 & \text{при } (x, y) \in B \\ -1 & \text{при } (x, y) \in C, \end{cases} \quad (3.2)$$

Для $\varepsilon = 1/2^2$, $N = 1$ и функции $f_1(x, y)$ согласно лемме 3 можно определить множество e_1 и действительные числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=1}^{N_1}$, которые удовлетворяют условиям

$$|a_{k,s}| < 1/2^2; \quad 1 \leq k, s \leq N_1, \quad e_1 \subset H, \quad |e_1| < 1/2^2, \quad (3.3)$$

$$\left\| \sum_{k,s=1}^{N_1} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f_1(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_1)} < 1/2^2, \quad (3.4)$$

$$\left\| \sum_{k,s=1}^{n,m} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^{p(e)}} \leq 1/2^2 + \|f_1\|_{L^p(e)}, \quad e \subset H \setminus e_1; \quad n, m \leq N_1. \quad (3.5)$$

Предположим, что определены числа $\{a_{k,s}\}_{k,s=1}^{N_{l-1}}$.

Положим

$$f_i(x, y) = \begin{cases} F(x, y) - \sum_{k, s=1}^{N_{i-1}} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y); & (x, y) \in A \\ 1 & \text{при } (x, y) \in B \\ -1 & \text{при } (x, y) \in C. \end{cases} \quad (3.6)$$

Для $s=1/2^{i+1}$, $N = N_{i-1} + 1$ и функции $f_i(x, y)$ согласно лемме 3 можем определить множество e_i и действительные числа $\{a_{k, s}\}_{k, s=N_{i-1}+1}^{N_i}$, которые удовлетворяют условиям

$$e_i \subset H, |e_i| < 2^{-i-1}, |a_{k, s}| < 2^{-i-1}, N_{i-1} + 1 \leq k, s \leq N_i \quad (3.7)$$

$$\left\| \sum_{k, s=N_{i-1}+1}^{N_i} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f_i(x, y) \right\|_{L^p(H \setminus e_i)} < 2^{-i-1}, \quad (3.8)$$

$$\left\| \sum_{k, s=N_{i-1}+1}^{n, m} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^p(e)} \leq 2^{-i-1} + M d_{L^p(e)};$$

$$\forall e \subset H \setminus e_i, N_{i-1} + 1 \leq n, m \leq N_i. \quad (3.9)$$

Продолжая вышеописанный процесс, можно определить действительные числа $\{a_{k, s}\}_{k=1}^{\infty}$, последовательность натуральных чисел $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ и множества $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$, для которых выполняются условия (3.7), (3.8) и (3.9) для всех i ($i=1, 2, 3, \dots$).

Покажем, что на A двойной ряд

$$\sum_{k, s=1}^{\infty} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \quad (3.10)$$

по Прингсхейму асимптотически сходится к $F(x, y)$ в метрике L^p , $p \geq 1$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число. Положим

$$A_\varepsilon = A \setminus \bigcup_{i=i_0}^{\infty} e_i, \text{ где } i_0 = [\log_2 \varepsilon^{-1}] + 1. \quad (3.11)$$

Очевидно

$$A_\varepsilon \subset A \setminus e_i \text{ при } i \geq i_0 \text{ и } |A_\varepsilon| > |A| - \varepsilon. \quad (3.12)$$

Числа n и m возьмем настолько большими, чтобы

$$q = \min(i, j) > i_0, \quad (3.13)$$

где i и j определяются из условий

$$N_i \leq n < N_{i+1}; \quad N_j \leq m < N_{j+1}. \quad (3.14)$$

Из условий (3.6), (3.8), (3.9), (3.13) и (3.14) ввиду того, что

$$f_{q+1}(x, y) = f_q(x, y) - \sum_{k, s=N_q+1}^{N_q} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \quad (3.15)$$

получаем

$$\begin{aligned}
 & \left\| \sum_{k, s=1}^{n, m} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - F(x, y) \right\|_{L^p(A_0)} \leq \\
 & \leq \left\| \sum_{l=1}^q \sum_{N_{l-1}+1}^{N_l} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - F(x, y) \right\|_{L^p(A_0)} + \\
 & + \max_{N_q < n', m' < N_{q+1}} \left\| \sum_{N_q+1}^{n', m'} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right\|_{L^p(A_0)} \leq \\
 & \leq \left\| \sum_{N_q+1}^{N_q} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - f_q(x, y) \right\|_{L^p(A_0)} + 2^{-q} + \|f_{q+1}\|_{L^p(A_0)} < 3 \cdot 2^{-q}. \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k, s=1}^{n, m} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - F(x, y) \right\|_{L^p(A_0)} = 0. \quad (3.17)$$

Теперь докажем, что ряд (3.10) на множестве B (по Прингсхейму) сходится по мере к $+$ ∞ .

Возьмем i_0 настолько большим, чтобы

$$\sum_{k=i_0}^{\infty} 2^{-k} < \varepsilon \cdot [4(2^p + 1)]^{-1}. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.6), (3.8) получаем

$$\iint_{B \cap H \setminus e_l} \left| \sum_{N_{l-1}+1}^{N_l} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - 1 \right|^p dx dy < 2^{-lp}. \quad (3.19)$$

Из (3.19) следует

$$\left| \left\{ (x, y) \in B \cap H \setminus e_l, \sum_{N_{l-1}+1}^{N_l} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) < 1/2 \right\} \right| < 2^{-lp+p}. \quad (3.20)$$

Отсюда учитывая неравенство (3.7), получаем

$$\left| \left\{ (x, y) \in B, \sum_{N_{l-1}+1}^{N_l} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) < 1/2 \right\} \right| < 2^{-lp+p} + 2^{-l-1} < 2^{-l} (1 + 2^p). \quad (3.21)$$

Пусть $M > 0$ и $1 > \varepsilon > 0$ — произвольные положительные числа. Возьмем некоторое большое число $M_0 > 0$ такое, что

$$\left| \left\{ (x, y) \in B, \sum_{k, s=1}^{N_{i_0}} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) > -M_0 \right\} \right| > |B| - \varepsilon/4. \quad (3.22)$$

Очевидно

$$B \cap \left\{ (x, y); \sum_{N_{i_0+1}}^{N_{j+1}} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) < \right. \\ \left. < (j-i_0) \cdot \frac{1}{2} \right\} \subset \bigcup_{i=i_0}^j B \cap \left\{ (x, y); \sum_{N_{i+1}}^{N_{i+1}} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) < 1/2 \right\}. \quad (3.23)$$

В силу (3.18), (3.21) и (3.23) будем иметь

$$\left| \left\{ (x, y) \in B, \sum_{N_{i_0+1}}^{N_j} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) < (j-i_0) \frac{1}{2} \right\} \right| < \varepsilon/4. \quad (3.24)$$

Для любого $j, j > i_0$, сравнивая (3.22) и (3.24) получаем

$$\left| \left\{ (x, y) \in B, \sum_{k,s=1}^{N_j} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) > (j-i_0) 1/2 - M_0 \right\} \right| > |B| - \varepsilon/4. \quad (3.25)$$

Возьмем $j_0 > i_0$ такое, что

$$(j_0 - i_0) 1/2 - M_0 > M + 2(4/\varepsilon)^{1/p}. \quad (3.26)$$

Из (3.25) и (3.26) для всех $j > j_0$ имеет место неравенство

$$\left| \left\{ (x, y) \in B; \sum_{k,s=1}^{N_j} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) > M + 2(4/\varepsilon)^{1/p} \right\} \right| > |B| - \varepsilon/2. \quad (3.27)$$

Пусть $n > m > N_{j_0}$, тогда для некоторых j и i имеем

$$N_i \leq n < N_{i+1}, \quad N_j \leq m < N_{j+1},$$

Очевидно

$$\sum_{k,s=1}^{n,m} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) = \sum_{k,s=1}^{N_j} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) + \\ + \sum_{k=N_{j+1}}^{N_{j+1}} \sum_{s=N_{j+1}}^m a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \quad (3.28)$$

В силу (3.9), где $i = j+1$, имеем

$$\iint_{B \cap H \setminus \varepsilon_i} \left| \sum_{N_{j+1}}^{n',m'} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right|^p dx dy \leq (1 + 2^{-i-1})^p < 2^p, \\ N_j < n', \quad m' < N_{j+1}. \quad (3.29)$$

Из (3.7) и (3.29) вытекает

$$\max_{N_{j+1} < l, q < N_{j+1}} \left| \left\{ (x, y) \in B, \sum_{N_{j+1}}^{l,q} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) > -2(4/\varepsilon)^{1/p} \right\} \right| > |B| - \varepsilon/2. \quad (3.30)$$

Сравнивая условия (3.27) и (3.30), получаем

$$\left| \left\{ (x, y) \in B; \sum_{k, s=1}^{n, m} a_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \geq M \right\} \right| > |B| - \varepsilon. \quad (3.31)$$

Аналогично доказывается, что ряд (3.10) на множестве C сходится по мере к $-\infty$.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $F(x, y) \in L^p_{[0,1] \times [0,1]}$, $0 < p < 1$. Предположим, что определен полином вида

$$g_l(x, y) = \sum_{k, s=1}^{m_l} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y). \quad (3.32)$$

удовлетворяющий условию

$$\int_0^1 \int_0^1 |F(x, y) - g_l(x, y)|^p dx dy < 2^{-l}, \quad (3.33)$$

Согласно лемме 4, в формулировке которой берется $N = m_l + 1$, $\eta = 2^{-l-1}$, $\eta = 2^{-l-1}$ и $f(x, y) = F(x, y) - g_l(x, y)$, существует полином

$$H_l(x, y) = \sum_{k, s=m_l+1}^{m_{l+1}} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y), \quad (3.34)$$

удовлетворяющий условиям

$$\int_0^1 \int_0^1 |g_{l+1}(x, y) - F(x, y)|^p dx dy < 2^{-l-1}, \quad (3.35)$$

где

$$g_{l+1}(x, y) = g_l(x, y) + H_l(x, y), \quad (3.36)$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, s=m_l+1}^{n, m_l} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right|^p dx dy < 2^{-l-1} + \quad (3.37)$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 |F(x, y) - g_l(x, y)|^p dx dy, \quad n, m < m_{l+1}.$$

По индукции можно определить последовательности полиномов $[H_i(x, y)]_{i=1}^{\infty}$ и $[g_i(x, y)]_{i=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям (3.35), (3.36) и (3.37) для всех i ($i = 1, 2, 3, \dots$).

Ряд

$$\sum_{k, s=1}^{\infty} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \quad (3.38)$$

сходится к $F(x, y)$ в метрике $L^p_{[0,1] \times [0,1]}$ по Прингсхейму.

Действительно, пусть $m_i \leq n < m_{i+1}$, $m_j < m < m_{j+1}$ и $q = \min(i, j)$.

Тогда из (3.35) и (3.37) следует

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, s=1}^{n, m} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - F(x, y) \right|^p dx dy \leq \\ & \leq \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, s=1}^{m_q} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) - F(x, y) \right|^p dx dy + \\ & + \max_{m_q < n', m' < m_q + 1} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{k, s=m_q+1}^{n', m'} c_{k, s} \varphi_k(x) \varphi_s(y) \right|^p dx dy < 2^{-q} + 2^{-q-1} + 2^{-q}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ясно, что $2^{-q} + 2^{-q-1} \rightarrow 0$, при $n, m \rightarrow \infty$.

Теорема 2 доказана.

Теперь докажем теорему 3. Возьмем последовательность $\{p_k\}$, где

$$0 < p_1 < \dots < p_k < p_{k+1} < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = 1. \quad (3.40)$$

Согласно лемме 4, в формулировке которой берется $\eta = 1/2$, $N=2$, $p=p_1$ и $f(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y)$ существует полином

$$H_1(x, y) = \sum_{l, s=2}^{m_1} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y), \quad (3.41)$$

который удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \int_0^1 |H_1(x, y) - \varphi_1(x) \varphi_1(y)|^p dx dy < 1/2. \quad (3.42)$$

Предположим, что определены полиномы

$$H_i(x, y) = \sum_{l, s=m_i+1}^{m_{i+1}} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y), \quad 0 < i \leq j-1, \quad (3.43)$$

где

$$1 < m_0 < m_1 < \dots < m_j \quad (3.44)$$

и имеет место неравенство

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{l, s=2}^{m_j} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y) - \varphi_1(x) \varphi_1(y) \right|^q dx dy < 2^{-j-1}; \quad p_1 < q \leq p_j. \quad (3.45)$$

Согласно лемме 4, где положено $p_0 = p_1$, $p = p_{j+1}$, $N = m_j + 1$,

$\eta = 2^{-j-2}$ и $f(x, y) = \varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y) - \sum_{l, s=2}^{m_j} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y)$, существует

полином

$$\sum_{l, s=m_{j+1}}^{m_{j+1}} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y), \quad (3.46)$$

который обладает свойствами:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{l, s=m_{j+1}}^{m_{j+1}} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y) - \left[\varphi_1(x) \cdot \varphi_1(y) - \sum_{l, s=2}^{m_j} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y) \right] \right|^q \times \\ \times dx dy < 2^{-j-2}; \quad p_0 \leq q \leq p_{j+1}, \quad (3.47)$$

$$\max_{m_j < n, m < m_{j+1}} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{l, s=m_{j+1}}^{n, m} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y) \right|^q dx dy < 2^{-j-2} + \\ + \int_0^1 \int_0^1 \left| \varphi_1(x) \varphi_1(y) - \sum_{l, s=2}^{m_j} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y) \right|^q dx dy. \quad (3.48)$$

Продолжая это построение, определяем двойной ряд

$$\sum_{l, s=2}^{\infty} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y) \quad (3.49)$$

и последовательность натуральных чисел $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$, для которых условия (3.45) и (3.48) выполняются при всех j , $j=2, 3, \dots$.

Покажем, что ряд (3.49) по Прингсхейму сходится к $\varphi_1(x) \varphi_1(y)$ в любой метрике L^q ; $0 < q < 1$.

Пусть $p_1 \leq q < 1$ — натуральные числа, n и m выберем настолько большими, чтобы $m_1 \leq n < m_{j+1}$ и $m_j \leq m < m_{j+1}$, то $p_k \geq q$, где $k = \min(i, j)$.

Тогда имеем

$$\int_0^1 \int_0^1 \left| \varphi_1(x) \varphi_1(y) - \sum_{l, s=2}^{n, m} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y) \right|^q dx dy \leq \\ \leq \int_0^1 \int_0^1 \left| \varphi_1(x) \varphi_1(y) - \sum_{l, s=1}^{m_k} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y) \right|^q dx dy + \\ + \max_{m_k < n', m' < m_{k+1}} \int_0^1 \int_0^1 \left| \sum_{l, s=m_{k+1}}^{n', m'} a_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y) \right|^q dx dy < 2^{-k} + 2^{-k-1} \rightarrow 0 \quad (3.50)$$

и следовательно ряд $\sum_{l, s=1}^{\infty} c_{l, s} \varphi_l(x) \varphi_s(y)$, где $c_{1,1}=1$, $c_{l,s} = -a_{l,s}$, $l, s \geq 2$ по Прингсхейму сходится к нулю одновременно во всех метриках

$$L^q_{[0,1] \times [0,1]}, \quad 0 < q < 1.$$

Теорема 3 доказана.

З а м е ч а н и е. Справедливы также N -мерные аналоги доказанных теорем, $N > 2$.

В заключение выражаю благодарность А. А. Талаляну за постановку задач и внимание к работе.

Ереванский государственный
университет.

Поступила 15.VIII.1979

Մ. Ճ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ. Զափնի ֆունկցիաների ներկայացումը կրկնակի շարքերով (ամփոփում)

Դիտարկվում է 2 փոփոխականի շափնի ֆունկցիաների $\sum_{k,s=1}^{\infty} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y)$, շարքը,

որտեղ $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ սխեմներ L^p , $p > 1$ -ի բազիսն է, կրկնակի շարքերով առիմտոտիկ L^p , $p > 1$ մետրիկայով ներկայացման հարցը:

Տրվում է Գ. Գոֆմանի և Ռ. Ջինկի հարցի դրական պատասխանը.

M. G. GRIGORIAN. *Representation of measurable functions by double series*
(summary)

The question of representation by double series $\sum_{k,s=1}^{\infty} a_{k,s} \varphi_k(x) \varphi_s(y)$ (where

$\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ is the basis in L^p) of two variable measurable functions asymptotically in the L^p , $p > 1$ metric is considered.

The affirmative answer to a question of G. Goffman's and R. Zink's is given.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. А. Талалян. Представление измеримых функций рядами, УМН, XV, вып. 5 (95), 1960, 77—140.
2. А. А. Талалян. Представление функций классов $L^p_{[0,1]}$, $0 < p < 1$, ортогональными рядами, Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus, 21 (1—2), 1970.
3. G. Goffman and R. Zink. On the representation of measurable functions by multiple series associated with a certain class of Schauder bases, Proc. London Math. Soc., 35, № 3, 1977, 527—540.