ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 2, 1981 Математика

В. С. ВИДЕНСКИЙ

О ПРИБЛИЖЕНИИ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА БЕРНШТЕЙНА

1°. В заметках [1], [2] рассмотрено приближение функций $f \in C\,[0;\,1]$ положительными операторами

$$\mathrm{B}_n\,(f;\;x) = \sum_{k=0}^{n} f\,(\tau_{kn})\,p_{kn}\,(x), \tag{1.1}$$

где p_{kn} — неотрицательные на $[0;\,1]$ рациональные дроби с данной матрицей полюсов $(x_{in})_{i=1}^{n}$, $x_{in} \in R \setminus [0;\,1]$, $n \in N$. С другой стороны, в статье [3] при помощи производящей функции, которая встречается в теории вероятностей ([4], стр. 69), введены операторы вида (1.1), где p_{kn} имеют более общую природу, но точки τ_{kn} выбираются равными k/n, как в классических многочленах Бернштейна.

Здесь объединяются оба подхода и указываются достаточные условия равномерной сходимости $\mathrm{B}_n f$ к f, обобщающие результаты для многочленов Бернштейна и их аналогов, исследованных в работах [1]—[3]. В качестве примеров приводятся случаи, когда p_{kn} — функции с вещественными алгебраическими или логарифмическими особенностями, лежащими вне отрезка $[0;\,1]$.

2°. Введем обозначения, $x \in [0;\,1]$; $\|f\| = \sup\limits_{0<x<1} |f\,(x)|$; пусть $h_{in} \in C\,[0,1]$; $i = 1, \cdots, n$; $n \in N$, причем $0 \leqslant h_{in}\,(x) \leqslant 1$, $h_{in}\,(0) = 0$, $h_{in}\,(1) = 1$ и, кроме того, функция

$$\varphi_n\,(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_{in}\,(x) \tag{2.1}$$

строго возрастает на $[0;\,1]$. Точки τ_{kn} определяются равенствами

$$\varphi_n\,(\tau_{kn}) = \frac{k}{n}\ \ (k = 0,\ 1, \cdots,\ n). \tag{2.2}$$

Функции p_{kn} определяются при помощи производящей функции (см. [3], [5])

$$G_n\,(t;\;x) = e^{-t\varphi_n(x)} \prod_{i=1}^{n} (h_{in}\,(x)\,e^{t/n} + 1 - h_{in}\,(x)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{kn}\,(x) \exp\,[\varphi_n\,(\tau_{kn}) - \varphi_n\,(x)]\,t. \tag{2.3}$$

Таким образом, операторы (1.1) построены. Если, в частности, все $h_{in}\,(x) = x$, то $\varphi_n\,(x) = x$, $\tau_{kn} = k/n$, $p_{kn}\,(x) = C_n^k\,x^k\,(1 - x)^{n-k}$, и (1.1) совпадает с многочленом Бернштейна. Если для краткости положим

$$\Phi_{kn}(x) = \varphi_n(\tau_{kn}) - \varphi_n(x), \tag{2.4}$$

$$S_{\nu n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \Phi_{kn}^{\nu}(x)\, p_{kn}(x), \tag{2.5}$$

то можем написать

$$G_n(t;\ x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{S_{\nu n}(x)}{\nu!} t^{\nu}. \tag{2.6}$$

Далее обозначим

$$D_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (\tau_{kn} - x)^2 p_{kn}(x), \tag{2.7}$$

$$\gamma_n(x) = \inf_{0<y<1} [\varphi_n(y) - \varphi_n(x)](y - x)^{-1}. \tag{2.8}$$

Интерес представляет случай, когда $\gamma_n(x) > 0$ в $]0;\ 1[$. При $\varphi_n(x) = x$ имеем $\gamma_n(x) = 1$, но обычно не удается вычислить функцию $\gamma_n(x)$, а находится некоторая ее оценка снизу.

3°. Если в (2.3) положить $t = 0$, то получим

$$S_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} p_{kn}(x) = 1. \tag{3.1}$$

Благодаря (2.4) и (2.8), имеем

$$\gamma_n^2(x)(\tau_{kn} - x)^2 \leqslant \Phi_{kn}^2(x), \tag{3.2}$$

откуда следует неравенство

$$\gamma_n^2(x) D_n(x) \leqslant S_{2,n}(x). \tag{3.3}$$

Применяя известную схему Т. Поповичиу [6], получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Если $\gamma_n(x) > 0$ при $0 < x < 1$ и $f \in C(0;\ 1]$, то*

$$|\mathbf{B}_n(f;\ x) - f(x)| \leqslant 2\,\omega(f;\ \sqrt{D_n(x)}) \leqslant 2\,\omega(f;\ \gamma_n^{-1}(x)\sqrt{S_{2,n}(x)}), \tag{3.4}$$

где $\omega(f;\ \delta)$ — модуль непрерывности f.

Таким образом, $\mathbf{B}_n f$ сходится к f равномерно, если

$$\lim_{n\to\infty} \|\gamma_n^{-2}(x) S_{2,n}(x)\| = 0. \tag{3.5}$$

Так как $\mathbf{B}_n(f;\ 0) = f(0)$ и $\mathbf{B}_n(f;\ 1) = f(1)$, то оценивать разность (3.4) нужно только при $0 < x < 1$. Благодаря (3.1), имеем

$$|\mathbf{B}_n(f;\ x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |f(\tau_{kn}) - f(x)|\, p_{kn}(x) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} \omega(f;\ |\tau_{kn} - x|)\, p_{kn}(x). \tag{3.6}$$

Неравенство $\omega(f;\ \delta) < \omega(f;\ \varepsilon)(1 + \delta/\varepsilon)$ дает

$$\omega(f;\ |\tau_{kn}-x|)\leqslant\omega(f;\sqrt{D_n(x)})\,(1+|\tau_{kn}-x|\,D_n^{-1/2}(x)). \tag{3.7}$$

Подставляя (3.7) в (3.6) и замечая, что

$$\sum_{k=0}^{n}|\tau_{kn}-x|\,p_{kn}(x)\leqslant\sqrt{D_n(x)}, \tag{3.8}$$

получаем (3.4).

4°. Из равенств

$$S_{\nu n}(x)=\frac{\partial^{\nu}G_n(0;\ x)}{\partial t^{\nu}} \tag{4.1}$$

находим

$$S_{1,n}(x)=0;\quad S_{2,n}(x)=n^{-2}\sum_{i=1}^{n}h_{in}(1-h_{in}),$$

$$S_{3,n}(x)=n^{-3}\sum_{i=1}^{n}h_{in}(1-h_{in})(1-2h_{in}), \tag{4.2}$$

$$S_{4,n}(x)=3S_{2,n}^{2}(x)+n^{-4}\sum_{i=1}^{n}h_{in}(1-h_{in})(1-6h_{in}(1-h_{in})).$$

Заметим, между прочим, что формулы (4.2) для $S_{1,n}$ и $S_{2,n}$ легко получаются из соображений теории вероятностей. Если считать, что независимые случайные величины ξ_{in} $(i=1,\cdots,n)$ принимают два значения 1 и 0 с вероятностями h_{in} и $1-h_{in}$, то p_{kn} — вероятность того, что $\Sigma\xi_{in}$ принимает значение k. Остается вычислить математическое ожидание и дисперсию $\Sigma\xi_{in}$.

Так как $0\leqslant h_{in}\leqslant 1$, то имеем оценку

$$S_{2,n}(x)<(4n)^{-1}, \tag{4.3}$$

к сожалению, не достаточно тонкую для некоторых дальнейших применений. Впрочем, в классическом случае, когда все $h_{in}(x)=x$, неравенство (4.3) точное, равенство достигается при $x=1/2$. Очевидно, при $n>4$ справедливы неравенства

$$\begin{gathered}|S_{3,n}(x)|\leqslant n^{-1}S_{2,n}(x)\leqslant(4n^2)^{-1},\\ S_{4,n}(x)\leqslant S_{2,n}(x)(3S_{2,n}(x)+n^{-2})\leqslant n^{-1}S_{2,n}(x)\leqslant(4n^2)^{-1}.\end{gathered} \tag{4.4}$$

Для функций $f\in C^2[0;\ 1]$ при дополнительных предположениях, что $\varphi_n\in C^2[0;\ 1]$ и $\varphi_n'(x)>0$ на $[0;\ 1]$ можно получить формулу типа Вороновской [7]. Обозначим

$$L^0(f;\ x)=f(x);\quad L^{\nu}(f;\ x)=[L^{\nu-1}(f;\ x)]'/\varphi_n'(x) \tag{4.5}$$

и напишем формулу Тейлора в таком виде

$$f(u)=\sum_{\nu=0}^{2}\frac{1}{\nu!}L^{\nu}(f;\ x)\,[\varphi_n(u)-\varphi_n(x)]^{\nu}+R(u),$$

$$R(u)=\frac{1}{2}\int_x^u L^3(f;\ t)[\varphi_n(u)-\varphi_n(t)]\ \varphi_n'(t)\ dt. \tag{4.6}$$

Разлагаем $f(\tau_{kn})$ по формуле (4.6) и подставляем в (1.1); учитывая, что $S_{1,n}(x)=0$, получаем

$$B_n(f;\ x)-f(x)=\frac{1}{2}L^2(f;\ x)\ S_{2,n}(x)+\sum_{k=0}^{n} R(\tau_{kn})\ p_{kn}(x). \tag{4.7}$$

Можно указать некоторую оценку второго слагаемого

$$\sum_{k=0}^{n}|R(\tau_{kn})|\ p_{kn}(x)\leqslant\frac{1}{2}\|L^3 f\|\sum_{k=0}^{n}|\Phi_{kn}(x)|^3\ p_{kn}(x)\leqslant$$

$$<\frac{1}{2}\|L^3 f\|\ S_{2,n}^{1/2}(x)\ S_{4,n}^{1/2}(x)\leqslant(8\ n^{3/2})^{-1}\|L^3 f\|. \tag{4.8}$$

Следует, однако, иметь в виду, что $L^\nu f$ зависит от отношений φ_n^k/φ_n' $(k=2,\cdots,\nu)$. Поэтому утверждать, что первое слагаемое в правой части (4.7) является главным членом, можно только при специальных допущениях относительно свойств φ_n. В случае дробно-рациональных операторов этот вопрос рассмотрен в [1] и [2]. Здесь мы остановимся на нем детально в случае операторов (1.1) с данной матрицей логарифмических особенностей.

5°. В качестве первого примера применения теоремы 1 приведем операторы, которые имеют фиксированные алгебраические особенности. Пусть $(x_{ln})_{l=1}^n$, $(\alpha_{ln})_{l=1}^n$, $n\in\mathbf{N}$, —данные матрицы; $x_{ln}\in\mathbf{R}\setminus[0;\ 1]$, $\alpha_{ln}\in[0;\ 1]$; ρ_{ln} — расстояние от x_{ln} до $[0;\ 1]$; $r_n=\max\limits_{1<l<n}\ \rho_{ln}^{-1}$. Положим

$$h_{ln}(x)=x\left(\frac{1-x_{ln}}{x-x_{ln}}\right)^{\alpha_{ln}}, \tag{5.1}$$

$$\theta_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}(\rho_{ln}|x-x_{ln}|^{-1})^{\alpha_{ln}}, \tag{5.2}$$

$$s_n=\sum_{l=1}^{n}(\rho_{ln}(1+\rho_{ln})^{-1})^{\alpha_{ln}}. \tag{5.3}$$

В дальнейшем индекс n будем как правило опускать. Так как

$$\rho_l\leqslant|x-x_l|\leqslant 1+\rho_l, \tag{5.4}$$

то

$$n^{-1}s_n\leqslant\theta_n(x)\leqslant 1. \tag{5.5}$$

Покажем, что

$$\theta_n(x)\leqslant\gamma_n(x), \tag{5.6}$$

где γ_n определено в (2.8). Действительно, если $x_l<0$ и $0\leqslant x<y\leqslant 1$, то

$$h_l(y)-h_l(x)=(1+\rho_l)^{\alpha_l}\frac{y(x+\rho_l)^{\alpha_l}-x(y+\rho_l)^{\alpha_l}}{(x+\rho_l)^{\alpha_l}(y+\rho_l)^{\alpha_l}}>$$

$$\geqslant\frac{\rho_l^{\alpha_l}(y-x)}{(x-x_l)^{\alpha_l}}>\frac{\rho_l^{\alpha_l}(y-x)}{(y-x_l)^{\alpha_l}},\tag{5.7}$$

так как

$$(x+\rho)^{\alpha}\geqslant\left(1-\frac{x}{y}\right)\rho^{\alpha}+\frac{x}{y}(y+\rho)^{\alpha},$$

благодаря выпуклости функции $(t+\rho)^{\alpha}$. При $x_l>1$ и $0\leqslant x<y\leqslant 1$ из $x_l-x>x_l-y$ непосредственно вытекает

$$h_l(y)-h_l(x)>\frac{\rho_l^{\alpha_l}(y-x)}{(x_l-y)^{\alpha_l}}>\frac{\rho_l^{\alpha_l}(y-x)}{(x_l-x)^{\alpha_l}}.\tag{5.8}$$

Неравенство (5.6) следует из (5.7) и (5.8).

Используя формулу (4.2), докажем, что

$$nS_{2,n}(x)\leqslant\theta_n(x).\tag{5.9}$$

Действительно, при $x_l<0$

$$1-h_l(x)=\frac{(x+\rho_l)^{\alpha_l}-x(1+\rho_l)^{\alpha_l}}{(x+\rho_l)^{\alpha_l}}\leqslant\frac{\rho_l^{\alpha_l}}{(x-x_l)^{\alpha_l}},\tag{5.10}$$

так как

$$(x+\rho)^{\alpha}\leqslant\rho^{\alpha}+x(1+\rho)^{\alpha},$$

благодаря выпуклости функции $(t+\rho)^{\alpha}$. При $x_l>1$ имеем

$$h_l(x)=\frac{x\rho_l^{\alpha_l}}{(x_l-x)^{\alpha_l}}\leqslant\frac{\rho_l^{\alpha_l}}{(x_l-x)^{\alpha_l}}.\tag{5.11}$$

Так как $0\leqslant h_l\leqslant 1$, то (5.9) следует из (4.2), (5.10) и (5.11). Из (5.5) и (5.9) вытекает основная оценка

$$\theta_n^{-2}(x)\,S_{2,n}(x)\leqslant n^{-1}\,\theta_n^{-1}(x)\leqslant s_n^{-1}.\tag{5.12}$$

Благодаря (5.6) и (5.12), теорема 1 приводит к следующему результату для оператора (1.1), построенного по функциям (5.1).

Теорема 2. *Если* $f\in C[0,1]$, *то*

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leqslant 2\omega(f;s_n^{-1/2}).\tag{5.13}$$

Таким образом, для равномерной сходимости $B_n f$ к f достаточно, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}s_n=\infty.\tag{5.14}$$

Заметим, что если в (5.1) все $\alpha_{ln}=0$, то $h_{ln}(x)=x$, и мы получаем классические многочлены Бернштейна. Случай, когда все $\alpha_{ln}=1$, т. е. когда все x_{ln} являются полюсами, рассмотрен в [1] и [2].

Для операторов (1.1), построенных по функциям (5.1), при некотором дополнительном предположении относительно (x_{in}) и (α_{in}) имеет место следующее обобщение теоремы Вороновской (см. [2]).

Теорема 3. *Если* $f\in C^3[0;1]$ *и матрицы* (x_{in}), (α_{in}) *таковы, что*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(1+r_n)^{-2}n^{-1/2}=\infty, \tag{5.15}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} s_n\left|B_n(f;x)-f(x)-\frac{1}{2}L^2(f;x)S_{2,n}(x)\right|=0. \tag{5.16}$$

В [2] указано также обобщение соответствующей теоремы Бернштейна [5] для случая, когда $f\in C^m[0;1]$, $m>3$ и все $\alpha_{in}=1$.

6°. Пусть (x_{in}), ρ_{in}, r_n имеют тот же смысл, что в п. 5°, а в качестве h_{in} выберем функции

$$h_{in}(x)=\frac{\ln\left(1-\dfrac{x}{x_{in}}\right)}{\ln\left(1-\dfrac{1}{x_{in}}\right)}. \tag{6.1}$$

Будем считать, что $x_{in}<0$ при $i=1,\cdots,p$, и что $x_{in}>1$ при $i=p+$ $+1,\cdots,n$. Положим

$$\theta_n(x)=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-x}\sum_{i=1}^{p}(1-h_i(x))+\frac{1}{x}\sum_{i=p+1}^{n}h_i(x)\right), \tag{6.2}$$

$$\sigma_n=\sum_{i=1}^{n}\left((1+\rho_i)\ln\left(1+\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^{-1}. \tag{6.3}$$

Мы докажем, что

$$n^{-1}\sigma_n\leqslant\theta_n(x),\quad nS_{2,n}(x)\leqslant\theta_n(x)\leqslant\gamma_n(x), \tag{6.4}$$

откуда вытекает неравенство, аналогичное (5.12):

$$\theta_n^{-2}(x)S_{2,n}(x)\leqslant\sigma_n^{-1}. \tag{6.5}$$

Из (6.5) и теоремы 1 мы получаем для оператора (1.1), построенного по функциям (6.1), следующую теорему.

Теорема 4. *Если* $f\in C[0;1]$, *то*

$$|B_n(f;x)-f(x)|\leqslant 2\omega(f;\sigma_n^{-1/2}). \tag{6.6}$$

Следовательно, условие

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\infty \tag{6.7}$$

достаточно для равномерной сходимости $B_n f$ к f.

Так как

$$\frac{1-h_i(x)}{1-x}=h_i'(\xi_i),\quad \frac{h_i(x)}{x}=h_i'(\eta_i),$$

то для вывода первого из неравенств (6.4) достаточно заметить, что

$$\left|\ln\left(1-\frac{1}{x_i}\right)\right|' = \ln\left(1+\frac{1}{\rho_i}\right), \tag{6.8}$$

откуда, благодаря (5.4), следует, что

$$h_i'(x) = \left(|x-x_i| \ln\left(1+\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^{-1} \geqslant \left((1+\rho_i)\ln\left(1+\frac{1}{\rho_i}\right)\right)^{-1}. \tag{6.9}$$

Неравенство $nS_{2,n}(x) \leqslant \theta_n(x)$ очевидно, если учесть, что $0 \leqslant h_{in}(x) \leqslant 1$, и формулу (4.2). Доказательство того, что $\theta_n(x) \leqslant \gamma_n(x)$, основано на неравенствах

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y \frac{dt}{t+\rho} > \frac{1}{1-x}\int_x^1 \frac{dt}{t+\rho},$$

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y \frac{dt}{1+\rho-t} > \frac{1}{x}\int_0^x \frac{dt}{1+\rho-t},$$

справедливых при $x, y \in]0;\ 1[$ и $\rho > 0$, из которых следует, что

$$\frac{h_i(y)-h_i(x)}{y-x} > \frac{1-h_i(x)}{1-x} \quad (i=1,\cdots,p),$$
$$\frac{h_i(y)-h_i(x)}{y-x} > \frac{h_i(x)}{x} \quad (i=p+1,\cdots,n). \tag{6.10}$$

Итак, доказаны все неравенства (6.4), а значит доказана и теорема 4.

7°. Для операторов (1.1), построенных по функциям (6.1), справедлива следующая теорема, подобная теореме 3.

Теорема 5. *Если $f \in C^3[0;\ 1]$ и матрица (x_{in}) такова, что*

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n (1+r_n)^{-2} n^{-1/2} = \infty, \tag{7.1}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n \left| \mathrm{B}_n(f;\ x) - f(x) - \frac{1}{2} L^2(f;\ x)\, S_{2,n}(x) \right| = 0. \tag{7.2}$$

Для доказательства заметим, что из явных формул для $\varphi_n^{(\nu)}$ следует неравенство

$$|\varphi_n^{(\nu)}(x)| \leqslant (\nu-1)!\, r_n^{\nu-1} \varphi_n'(x). \tag{7.3}$$

Если положить $g_n = 1/\varphi_n'$ и учесть, что $g_n' = -\varphi_n'' g_n^2$, то можем написать

$$L^2 f = g_n\left(-\varphi_n'' g_n^2 f' + f'' \cdot \frac{1}{\varphi_n'}\right)$$

и оценить это выражение, используя (6.9) и (7.3):

$$|L^2(f;\, x)| \leqslant A_{f,\,2}\, g_n(x)(r_n+1)\frac{n}{\sigma_n}, \tag{7.4}$$

где $A_{f,\,\nu} = \max\limits_{1 \leqslant l \leqslant \nu} \|f^{(l)}\|$. Аналогичное вычисление дает

$$|L^3(f;\, x)| \leqslant 4A_{f,\,3}\, g_n(x)(r_n+1)^2\left(\frac{n}{\sigma_n}\right)^2. \tag{7.5}$$

Применяя (7.5) для оценки интеграла (4.6), получаем

$$|R(\tau_k)| \leqslant 2A_{f,\,3}(r_n+1)^2\left(\frac{n}{\sigma_n}\right)^2 \Phi_k^2(x)\,|\tau_k - x|. \tag{7.6}$$

Далее, если учесть (3.3), (4.4) и (6.4), то будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n} \Phi_k^2(x)\,|\tau_k - x|\, p_k(x) \leqslant \sqrt{S_{4,\,n}(x) D_n(x)} \leqslant n^{-3/2}. \tag{7.7}$$

Предельное равенство (7.2) следует из (4.7), (7.1), (7.6) и (7.7).

Неравенства, подобные указанным в [2], приводят к обобщению теоремы 4 для случая, когда $f \in C^m [0;\, 1]$, $m \geqslant 3$.

Ленинградский государственный
педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступила 11. IV. 1979

Վ. Ս. ՎԻԴԵՆՍԿԻ. Բեռնշտեյնի տիպի օպերատորներով մոտարկման մասին (*ամփոփում*)

h_{ln} ֆունկցիաներով տրված մատրիցայով (2.2) և (2.3) բանաձևերով որոշվում են (1.1) գծային օպերատորները։ Ապացուցվում է բավական ընդհանուր (3.4) անհավասարությունը։ Դիտարկվում են մասնավոր դեպքեր, երբ h_{ln}-երը որոշվում են (5.1) կամ (6.1) բանաձևերով։

V. S. VIDENSKI, *On approximation by Bernstein type operators* (summary)

For a given matrix of functions (h_{ln}) positive linear operators (1.1) are defined by formulas (2.2) and (2.3). A general unequality (3.4) is proved. Special cases where the h_{ln} functions are defined by (5.1) and (6.1) are considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *В. С. Виденский*. Полиномы типа Бернштейна по рациональным дробям, Лит. матем. сборник, 19, № 1, 1979.
2. *В. С. Виденский*. О приближении функций рациональными дробями с фиксированными вещественными полюсами, Изв. АН БССР, сер. физ.-матем. наук, № 1, 1979.
3. *J. P. King*. The Lototsky transform and Bernstein polynomials, Canadian Journal of mathem., 18, № 1, 1966, 89—91.
4. *С. Н. Бернштейн*. Теория вероятностей, М—Л., 1946.
5. *С. Н. Бернштейн*. Добавление к статье Е. В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна», Сочинения, том 2, статья № 57, М., 1954, 155—158.
6. *T. Popoviciu*. Sur l'aproximation des fonctions convexes d'ordre supèrieur, Mathematica (Cluj), 10, 1934, 49—54.
7. *Е. В. Вороновская*. Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна, ДАН СССР, № 4, 1932, 79—85.