ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մաթեմատիկա XVI, № 2, 1981 Математика

Выпуск посвящается XXVI съезду КПСС

В. М. МАРТИРОСЯН

О ЗАМЫКАНИИ, МИНИМАЛЬНОСТИ И БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ

Введение

1. (а) Известна следующая теорема Мюнца—Сасса в обобщенной формулировке [1, 2].

Теорема (Мюнц—Сасс). *Пусть* $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $(\operatorname{Re}\lambda_k > 0)$ — *последовательность комплексных чисел и* s_k — *кратность появления числа* λ_k *на отрезке* $\{\lambda_j\}_1^k$. *Для полноты в* $L_2(0, +\infty)$ *системы* $\{e^{-\lambda_k x}\, x^{s_k-1}\}_1^\infty$ *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 + |\lambda_k|^2)^{-1} \operatorname{Re}\lambda_k = +\infty.$$

М. М. Джрбашяном [2] был исследован вопрос о полноте систем функций, порожденных целой функцией типа Миттаг—Леффлера

$$E_\rho(z;\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})} \quad (\mu > 0,\ \rho > 0),$$

и был установлен критерий полноты этих систем. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем обозначения.

Пусть α, ρ, ω и μ — вещественные параметры и

$$\frac{1}{2} < \alpha < +\infty,\ \rho = \frac{\alpha}{2\alpha - 1},\ -1 < \omega < 1,\ \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Обозначим через $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ гильбертово пространство измеримых на $(0, +\infty)$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{2,\omega}(0,+\infty)} = \left\{ \int_0^{+\infty} |f(x)|^2 x^\omega\, dx \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Пусть, наконец, $\{\lambda_k\}_1^\infty$ $\left(|\arg\lambda_k| < \dfrac{\pi}{2\alpha}\right)$ — последовательность комплексных чисел, а s_k — кратность появления числа λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$.

Следующая теорема является обобщением вышеприведенной теоремы Мюнца—Сасса.

Теорема (М. М. Джрбашян). *Для полноты в* $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ *системы функций*

$$\omega_\rho^*(x;\lambda_k)=E_\rho^{(s_k-1)}(-\lambda_k x;\mu)\,x^{s_k-1}\ (k=1,2,\cdots)$$

необходимо и достаточно условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\varkappa})^{-1}\operatorname{Re}\lambda_k^*=+\infty.$$

(б) В связи с теоремой Мюнца—Сасса Л. Шварц и А. Ф. Леонтьев рассмотрели вопрос описания функций, принадлежащих замыканию системы $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty$, в случае ее неполноты в $C[0,+\infty]$ или $L_p(0,+\infty)$, $p>1$ [3, 4]. Однако в этих исследованиях не была дана собственно внутренняя характеристика замыкания системы $\{e^{-\lambda_k x}\}_1^\infty$.

М. М. Джрбашяном [1] было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{e^{-\lambda_k x}x^{s_k-1}\}_1^\infty$ $(\operatorname{Re}\lambda_k>0)$ в случае ее неполноты в $L_2(0,+\infty)$. В работе С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [5] этот результат был обобщен и было дано полное внутреннее описание замыкания системы $\{\omega_\rho^*(x;\lambda_k)\}_1^\infty$ в случае ее неполноты в $L_{2,\omega}(0,+\infty)$.

(в) Другие обобщения теоремы Мюнца—Сасса были получены в работе М. М. Джрбашяна и автора [6]. Там был установлен критерий полноты системы $\{e^{-\lambda_k z}z^{s_k-1}\}_1^\infty$ при среднеквадратичном приближении в угловых областях. В случае неполноты таких систем в [6] было дано полное внутреннее описание их замыканий.

В совместной работе А. Е. Аветисяна, С. А. Акопяна и И. О. Хачатряна [7] был установлен критерий полноты систем функций типа Миттаг—Леффлера на конечной системе лучей, исходящих из точки $z=0$.

2. В настоящей работе рассматриваются вопросы полноты, описания замыкания, минимальности и базисности систем функций, порожденных целой функцией типа Миттаг—Леффлера*. Эти рассмотрения ведутся в пространствах голоморфных в угловых областях функций, которые определяются следующим образом.

$H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$ $(0<\varkappa-\chi<2\pi,\ -1<\omega<1)$ — это пространство функций F, голоморфных в угловой области $\Delta(\chi;\varkappa)=\{z:\chi<\operatorname{Arg}z<\varkappa\}$ и таких, что

$$\|F\|_{2,\omega}^*=\sup_{\chi<\varphi<\varkappa}\left\{\int_0^{+\infty}|F(re^{i\varphi})|^2r^\omega\,dr\right\}^{1/2}<+\infty.$$

Аналогично определяется пространство $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ в угловой области $\Delta^*(\chi;\varkappa)=\mathbf{C}\setminus\overline{\Delta(\chi;\varkappa)}$.

Такие пространства функций в угловых областях впервые были введены и исследованы М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [10] (см. также гл. VII монографии [11]). Ими же впервые было установ-

---

* Результаты данной работы были частично опубликованы в заметках автора [8, 9].

лено, что в том случае, когда $\Delta(\chi;\varkappa)\equiv\{z\colon \operatorname{Re} z>0\}$ (т. е. когда $\chi=-\frac{\pi}{2}$, $\varkappa=\frac{\pi}{2}$), класс $H_2^{(0)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\right]$ совпадает с известным классом H_2 функций Φ, голоморфных в правой полуплоскости и удовлетворяющих условию

$$\sup_{0<x<+\infty}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty}|\Phi(x+iy)|^2\,dy\right\}<+\infty.$$

В § 1 данной работы приводится ряд известных результатов относительно пространств $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$.

В § 2 рассматриваются вопросы полноты и описания замыкания систем функций типа Миттаг—Леффлера. Эти системы определяются следующим образом. Полагая, что

$$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{\varkappa-\chi}<\rho,\ -1<\omega<1,\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho},$$

с последовательностью

$$\{\lambda_k\}_1^\infty\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho}<\operatorname{Arg}\lambda_k<\varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

ассоциируется система функций

$$\omega_\rho^*(z;\lambda_k)=E_\rho^{(s_k-1)}(\bar\lambda_k z;\mu)\,z^{s_k-1}\ (k=1,2,\cdots).$$

В том же параграфе устанавливается, что расходимость ряда

$$\sum_{k=1}^\infty(1+|\lambda_k|^{2\beta})^{-1}\operatorname{Re}\,[e^{i\eta}\bar\lambda_k]^\beta, \tag{1}$$

$$\eta=\frac{\chi+\varkappa}{2},\ \frac{\pi}{\beta}=\varkappa-\chi-\frac{\pi}{\rho},$$

является необходимым и достаточным условием полноты в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ системы $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$. В случае неполноты этой системы в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ дается полное внутреннее описание ее замыкания.

§ 3 посвящен вопросам минимальности и базисности систем $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$. Устанавливается, что сходимость ряда (1) необходима и достаточна для минимальности системы $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$. В случае минимальности такой системы строится биортогональная с ней система.

В заключение устанавливается следующий критерий базисности системы $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$.

Пусть последовательность $\{\lambda_k^{(\omega)}\}_1^\infty$ определяется следующим образом:

$$\lambda_k^{(\omega)}=\{|\lambda_k|^\omega(|\lambda_k|^{1-\beta}\operatorname{Re}(e^{i\eta}\bar\lambda_k)^\beta)^{2s_k-1}\}^{1/2}\ (k=1,2,\cdots).$$

Тогда, если выполняются условия

$$\inf_{k>1} \prod_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_k}}^{\infty} \left| \frac{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^{\beta} - (e^{i\eta}\bar{\lambda}_j)^{\beta}}{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^{\beta} + \overline{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^{\beta}}} \right| > 0, \ \sup \{s_k\} < +\infty,$$

то система $\{\lambda_k^{(\omega)}\, \omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ является базисом Рисса своего замыкания в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)]$. Если же хоть одно из этих условий нарушено, то система $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ ни при какой перестановке членов не является базисом своего замыкания (в той же метрике).

При установлении результатов настоящей работы вопросы замыкания, минимальности и базисности системы $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ сводятся к соответствующим известным [12] результатам для определенных систем простейших рациональных дробей. Этот переход осуществляется с использованием преобразования типа Бореля, построенного М. М. Джрбашяном и А. Е. Аветисяном [10] (см. также гл. VII монографии [11]).

§ 1. Предварительные сведения и определения

1 (а). Пусть $0 < \varkappa - \chi < 2\pi$ и

$$\Delta(\chi;\ \varkappa) = \{z:\ \chi < \operatorname{Arg} z < \varkappa,\ 0 < |z| < +\infty\},$$

$$\Delta^*(\chi;\ \varkappa) = \{z:\ \varkappa < \operatorname{Arg} z < \chi + 2\pi,\ 0 < |z| < +\infty\}$$

— взаимно-дополнительные угловые области на конечной комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Полагая, что ω изменяется в пределах $-1 < \omega < 1$, обозначим через $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\ \varkappa)]$ класс функций F, голоморфных в $\Delta(\chi;\ \varkappa)$ и удовлетворяющих условию

$$\|F\|_{2,\omega} = \sup_{\chi < \varphi < \varkappa} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\, dr \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Аналогично, через $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)]$ обозначим класс функций F, голоморфных в $\Delta^*(\chi;\ \varkappa)$ и таких, что

$$\|F\|_{2,\omega}^* = \sup_{\varkappa < \varphi < \chi + 2\pi} \left\{ \int_0^{+\infty} |F(re^{i\varphi})|^2 r^{\omega}\, dr \right\}^{1/2} < +\infty.$$

Заметим, что между классами $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\ \varkappa)]$ и $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi,\ \varkappa)]$ нет никакого принципиального различия, поскольку $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)] \equiv H_2^{(\omega)}[\Delta(\varkappa;\ \chi + 2\pi)]$ и класс $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)]$ мы вводим для удобства.

(б) Приведем некоторые свойства классов $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\ \varkappa)]$ $(0 < \varkappa - \chi < 2\pi,\ -1 < \omega < 1)$, необходимые для дальнейшего изложения.

Справедлива следующая теорема (см. [11], теорему 7.5 или [12], теорему 1).

Теорема А. *Для любой функции* $F \in H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\ \varkappa)]$ *справедливы следующие утверждения:*

1°. *Почти всюду на границе $\partial\Delta(\chi;\varkappa)$ угловой области $\Delta(\chi;\varkappa)$ функция F имеет угловые граничные значения $F(\zeta)$, причем*

$$\|F\|_{2,\omega}^{*}=\left\{\int\limits_{\partial\Delta(\chi;\varkappa)}|F(\zeta)|^2|\zeta|^{\omega}|d\zeta|\right\}^{1/2}<+\infty;$$

2°. *Имеет место интегральная формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta(\chi;\varkappa)}\frac{F(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\begin{cases}F(z), & z\in\Delta(\chi;\varkappa),\\ 0, & z\in\Delta^*(\chi;\varkappa),\end{cases}$$

где направление на $\partial\Delta(\chi;\varkappa)$ совпадает с направлением положительного обхода области $\Delta(\chi;\varkappa)$.

В силу утверждения 1° этой теоремы в $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$ можно ввести скалярное произведение равенством

$$(F,G)_{2,\omega}=\int\limits_{\partial\Delta(\chi,\varkappa)}F(\zeta)\overline{G(\zeta)}|\zeta|^{\omega}|d\zeta|,$$

где $F(\zeta)$ и $G(\zeta)$ — граничные значения функций $F, G\in H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$.

Имеет место следующая теорема (см. [12], теорему 2).

Теорема B. *Справедливы утверждения:*

1°. $H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)]$ *со скалярным произведением $(F,G)_{2,\omega}$ является гильбертовым пространством;*

2°. *Нормы $\|F\|_{2,\omega}^{*}$ и $\|F\|_{2,\omega}$ эквивалентны, именно,*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\|F\|_{2,\omega}\leqslant\|F\|_{2,\omega}^{*}\leqslant\|F\|_{2,\omega},\quad\forall F\in H_2^{(\omega)}[\Delta(\chi;\varkappa)].$$

Замечание. Поскольку $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]\equiv H_2^{(\omega)}[\Delta(\varkappa;\chi+2\pi)]$, то утверждения, аналогичные теоремам A и B, справедливы и для класса $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$.

2. В работе М. М. Джрбашяна и А. Е. Аветисяна [10] (см. также гл. VII монографии [11]) для функций класса

$$H_2[\alpha;\omega]\equiv H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]\left(\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1\right)$$

было построено преобразование типа Бореля $G_{\rho,\mu}(\zeta;F)$. Для этого прежде всего вводились два вспомогательных параметра ρ и μ, где

$$\rho>\frac{\alpha}{2\alpha-1},\quad\mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Далее, если $F\in H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]$, то для каждого значения $\vartheta\in\left(-\frac{\pi}{2\alpha},\frac{\pi}{2\alpha}\right)$ образовывалась функция

$$g_\vartheta(\zeta; F) = \rho\,(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\mu\rho}\,\zeta^{-1}\int_0^{+\infty} F(re^{-i\vartheta})\,e^{-(e^{-i\vartheta}\zeta)^\rho r^\rho}\,r^{\mu\rho-1}\,dr, \qquad (2)$$

рассматриваемая в области $\Delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2\rho}; \vartheta + \frac{\pi}{2\rho}\right)$ (при этом рассматриваются те ветви функций $(e^{-i\vartheta}\zeta)^{\mu\rho}$ и $(e^{-i\vartheta}\zeta)^\rho$, которые на луче $\arg\zeta = \vartheta$ принимают положительные значения). О свойствах функции $g_\vartheta(\zeta; F)$ справедлива следующая теорема (см. [11], теорему 7.6).

Теорема С. *Пусть*

$$F \in H_2[\alpha; \omega] \equiv H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]\left(\frac{1}{2} < \alpha < +\infty,\ -1 < \omega < 1\right)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. *Для каждого значения* $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\pi}{2\alpha}\right)$ *функция* (2) *голоморфна в области* $\Delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2\rho}; \vartheta + \frac{\pi}{2\rho}\right)$;

2°. *Существует функция* $G_{\rho,\mu}(\zeta; F)$, *голоморфная в области*

$$\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right),\ \text{где}\ \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho},$$

и такая, что для любого $\vartheta \in \left(-\frac{\pi}{2\alpha}, \frac{\pi}{2\alpha}\right)$

$$g_\vartheta(\zeta; F) \equiv G_{\rho,\mu}(\zeta; F),\ \zeta \in \Delta\left(\vartheta - \frac{\pi}{2\rho}; \vartheta + \frac{\pi}{2\rho}\right);$$

3°. *Функция* $G_{\rho,\mu}(\zeta; F)$ *принадлежит классу*

$$H_2[\gamma, -\omega] \equiv H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}, \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$$

*и справедливо неравенство**

$$\|G_{\rho,\mu}(\zeta; F)\|_{2,-\omega} \leqslant \sqrt{2\sqrt{\pi}}\,\|F\|_{2,\omega}.$$

Таким образом, преобразование типа Бореля $G_{\rho,\mu}$ является ограниченным линейным оператором, отображающим

$$H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]\ \text{в}\ H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right].$$

Из теорем 7.6, 7.7 и 7.9 монографии [11] легко следует обратимость этого оператора, а также аналитический вид обратного оператора. Именно, справедлива следующая

---

* Этого неравенства нет в формулировке теоремы 7, 6 монографии [11]. Оно получено в процессе ее доказательства.

Теорема Д. *Пусть* $\frac{1}{2} < \alpha < +\infty$, $-1 < \omega < 1$, *а параметры* ρ, μ *и* γ *определяются из условий*

$$\rho \geqslant \frac{\alpha}{2\alpha - 1}, \ \mu = \frac{1 + \omega + \rho}{2\rho}, \ \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\rho}.$$

Пусть, далее, $\partial\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right)$ *— граница области* $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right)$, *пробегаемая в положительном относительно этой области направлении. Тогда формулой*

$$F(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right)} E_\rho(w\zeta; \mu)\, G(\zeta)\, d\zeta, \quad w \in \Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\pi}{2\alpha}\right), \tag{3}$$

где $G \in H_2^{-(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$, *определяется ограниченный обратимый линейный оператор, отображающий*

$$H_2^{-(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right] \text{ на } H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right],$$

причем $G_{\rho,\mu}(\xi; F) \equiv G(\zeta)$, $\xi \in \Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right)$.

Следовательно, формулой (3) определяется оператор $G^{-1}_{\rho,\mu}$, обратный к $G_{\rho,\mu}$.

3. Для удобства читателя мы здесь напомним также определения базисных и минимальных систем (см., например, [13]).

Пусть $\{h_k\}_1^\infty$ — система элементов гильбертова пространства H. Обозначим через $(h_k; H)$ замыкание в топологии H линейной оболочки системы $\{h_k\}_1^\infty$.

По определению, $\{h_k\}_1^\infty$ является базисом $(h_k; H)$, если любой элемент $h \in (h_k; H)$ единственным образом представим в виде суммы ряда

$$h = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(h)\, h_k,$$

сходящегося в топологии H. Здесь $c_k(h)$ — комплексные коэффициенты, единственным образом определяемые по элементам h.

Система $\{h_k\}_1^\infty$ называется базисом Рисса пространства $(h_k; H)$, если существует ограниченный обратимый линейный оператор A, отображающий $(h_k; H)$ на $(h_k; H)$ и такой, что система $\{Ah_k\}_1^\infty$ является ортонормированным базисом пространства $(h_k; H)$.

Далее, система $\{h_k\}_1^\infty$ называется минимальной в H, если ни один ее член нельзя приблизить в топологии H линейными комбинациями остальных членов. Минимальность системы $\{h_k\}_1^\infty$ необходима и достаточна для существования биортогональной с ней системы, т. е. такой системы ограниченных линейных функционалов $\{h_k^*\}_1^\infty \subset H^*$, что

$$h_k^*(h_n)=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}\quad (k,\ n=1,\ 2,\cdots).$$

§ 2. Полнота и замыкание систем функций типа Миттаг—Леффлера

1. Пусть вещественные параметры χ, $\varkappa$ и ρ удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{\varkappa-\chi}<\rho.$$

Очевидно, что тогда

$$0<\left(\varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)-\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho}\right)<2\pi$$

и угловая область $\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ является подобластью угловой области $\Delta(\chi;\ \varkappa)$.

Пусть, далее, $\{\lambda_k\}_1^\infty$— произвольная последовательность комплексных чисел из угловой области $\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$.

Для каждого целого $j\geqslant 1$ обозначим через s_j кратность появления числа λ_j на отрезке $\{\lambda_k\}_{k=1}^j$, а через p_j — кратность появления числа λ_j во всей последовательности $\{\lambda_k\}_1^\infty$. Легко видеть, что

$$1\leqslant s_j\leqslant p_j<+\infty\quad (j\geqslant 1).$$

С последовательностью $\{\lambda_k\}_1^\infty$ ассоциируем систему функций $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$, порожденную целой функцией типа Миттаг—Леффлера $E_\rho(z;\ \mu)$, положив

$$\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)=E_\rho^{(s_k-1)}(\overline{\lambda}_k z;\ \mu)\ z^{s_k-1}\ (k=1,\ 2,\cdots),$$

$$-1<\omega<1,\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Из асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\ \mu)$ (см. [11], лемму 3.4) следует, что

$$\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty\subset H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)].$$

Наша ближайшая цель—установить критерий полноты в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)]$ системы $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$. Для этого нам нужно доказать одно утверждение, которое позволит установить связь между системой $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ и определенной системой простейших рациональных дробей. Прежде чем его формулировать, введем обозначения.

Обозначим через

$$\widetilde{\Delta}\equiv\widetilde{\Delta}\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

угловую область, симметричную с областью $\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ относительно вещественной оси, т. е.

$$\tilde{\Delta}=\Delta\left(-\varkappa+\frac{\pi}{2\rho};\ -\chi-\frac{\pi}{2\rho}\right).$$

Через

$$\tilde{\Delta}^*\equiv\tilde{\Delta}^*\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$$

обозначим угловую область, дополнительную к угловой области $\tilde{\Delta}$, т. е. $\tilde{\Delta}^*=\mathbf{C}\setminus\bar{\tilde{\Delta}}$, где $\bar{\tilde{\Delta}}$ — замыкание области $\tilde{\Delta}$. Ясно, что области $\tilde{\Delta}^*$ и $\Delta^*\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ симметричны относительно вещественной оси.

Очевидно также, что

$$\tilde{\Delta}=\left\{\bar{z}:\ z\in\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right\},$$

$$\tilde{\Delta}^*=\left\{\bar{z}:\ z\in\Delta^*\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)\right\}.$$

Далее положим

$$r_k(\zeta)=\frac{(s_k-1)!}{(\zeta-\bar{\lambda}_k)^{s_k}}\quad(k=1,\ 2,\cdots).$$

Наконец, обозначим через $\partial\tilde{\Delta}$ границу области $\tilde{\Delta}$, пробегаемую в положительном относительно этой области направлении.

Полагая, как и раньше,

$$\frac{1}{2}<\frac{\pi}{\varkappa-\chi}<\rho,\ -1<\omega<1,\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho},$$

докажем лемму.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1°. *Формулой*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\tilde{\Delta}}E_\rho(z\zeta;\ \mu)\ g(\zeta)\ d\zeta,\ z\in\Delta^*(\chi;\ \varkappa),$$

где $g\in H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$, *определяется ограниченный обратимый линейный оператор* $g_{\rho,\mu}^{-1}$, *отображающий пространство* $H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$ *на пространство* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ \varkappa)]$;

2°. *Оператор* $g_{\rho,\mu}^{-1}$ *переводит систему* $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ *в систему* $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$:

$$g^{-1}_{\rho,\mu}[r_k(\zeta)]=\omega^*_\rho(z;\lambda_k)\ (k=1,2,\cdots).$$

Доказательство. Пусть

$$\frac{\pi}{\alpha}=2\pi-(\varkappa-\chi)$$

есть раствор угловой области $\Delta^*(\chi;\varkappa)$, а

$$\frac{\pi}{\gamma}=2\pi-\left(\varkappa-\chi-\frac{\pi}{\rho}\right)$$

— раствор угловой области $\tilde{\Delta}^*$.

Имеем, что параметры α, ω, ρ, μ и γ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1,\ \rho>\frac{\alpha}{2\alpha-1},\quad \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho},\ \frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}.$$

Следовательно, по теореме Д формулой (3) определяется ограниченный обратимый линейный оператор $G^{-1}_{\rho,\mu}$, отображающий

$$H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]\ \text{на}\ H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right].$$

Пусть теперь $\{re^{i\delta}:r>0\}$ $\left(\delta=\frac{1}{2}(\chi+\varkappa)+\pi\right)$ — биссектриса угловой области $\Delta^*(\chi;\varkappa)$. Очевидно, что равенством

$$f(z)=F(e^{-i\delta}z)\ z\in\Delta^*(\chi;\varkappa),$$

где $F\in H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]$, определяется изометрический изоморфизм между

$$H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]\quad \text{и}\quad H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)].$$

Очевидно также, что равенством

$$e^{-i\delta}g(\zeta)=G(e^{i\delta}\zeta),\ \zeta\in\tilde{\Delta}^*,$$

где $G\in H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$ определяется изометрический изоморфизм между $H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$ и $H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$.

Следовательно, заменив в (3) $F(w)=F(e^{-i\delta}z)$ на $f(z)$ и $G(\xi)=G(e^{i\delta}\zeta)$ на $e^{-i\delta}g(\zeta)=e^{-i\delta}g(e^{-i\delta}\xi)$, а также w на $e^{-i\delta}z$, получим, что формулой

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\frac{\pi}{2\gamma}\right)}E_\rho(ze^{-i\delta}\xi;\mu)\,g(e^{-i\delta}\xi)\,e^{-i\delta}d\xi,\ z\in\Delta^*(\chi;\varkappa),$$

определяется ограниченный обратимый линейный оператор, отображающий $H_2^{(-\omega)}[\widetilde{\Delta}^*]$ на $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$. Наконец, произведя в этом интеграле замену переменной $e^{-i\delta}\xi=\zeta$, получим утверждение 1° леммы.

Чтобы получить утверждение 2° леммы, сначала заметим, что из асимптотических свойств функции $E_\rho(z;\mu)$ [см. [11], лемму 3.4) следует $E_\rho(\lambda z;\mu)\in H_2^{(\omega)}[\overline{\Delta}]$, когда $z\in\Delta^*(\chi;\varkappa)$ фиксировано. Следовательно, по теореме А справедливо интегральное представление

$$E_\rho(\lambda z;\mu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\overline{\Delta}}\frac{E_\rho(z\zeta;\mu)}{\zeta-\lambda}\,d\zeta,\quad \lambda\in\overline{\Delta}.$$

Продифференцировав обе части этого равенства s_k-1 раз по λ и положив $\lambda=\overline{\lambda}_k$, получим утверждение 2° леммы.

2. Теперь рассмотрим вопрос полноты в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ системы $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$.

Пусть $\{re^{i\eta}:r>0\}$ — биссектриса $\Delta\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho};\varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$, т. е.

$$\eta=\frac{1}{2}(\chi+\varkappa),\ \text{а}\ \pi/\beta=\varkappa-\chi-\pi/\rho\ \text{— раствор}\ \overline{\Delta}.$$

Образуем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+|\lambda_k|^{2\beta})^{-1}\,\mathrm{Re}\,(e^{i\eta}\,\overline{\lambda}_k)^\beta. \tag{4}$$

В силу леммы 1 система $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ полна в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ тогда и только тогда, когда система $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ полна в $H_2^{(-\omega)}[\overline{\Delta}^*]$, что равносильно расходимости ряда (4) (см. [12]). Учитывая также лемму 1, получим такой результат.

Теорема 1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1° $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ *полна в* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$;

2°. *Ряд* (4) *расходится;*

3°. *Замыкание в метрике* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$ *системы* $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ *совпадает с классом функций* f, *единственным образом представимых в виде*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial\overline{\Delta}}E_\rho(z\zeta;\mu)\,g(\zeta)\,d\zeta,\quad z\in\Delta^*(\chi;\varkappa),$$

где $g\in H_2^{(-\omega)}[\overline{\Delta}^*]$.

Таким образом, если ряд (4) сходится, то система $\{\omega_\rho^*(z;\lambda_k)\}_1^\infty$ не полна в $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$, и замыкание этой системы есть некоторое собственное подпространство из $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\varkappa)]$; чтобы его описать введем еще один класс функций.

При условии сходимости ряда (4) обозначим через $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*; \overline{\lambda}_k]$ класс функций $g \in H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*]$ и таких, что $g(\zeta) B_{\widetilde{\Delta}}(\zeta)$, $\zeta \in \partial \widetilde{\Delta}$, является граничной функцией некоторой функции из $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}]$, а

$$B_{\widetilde{\Delta}}(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e^{i\eta}\zeta)^{\beta} - (e^{i\eta}\overline{\lambda}_k)^{\beta}}{(e^{i\eta}\zeta)^{\beta} + (e^{i\eta}\overline{\lambda}_k)^{\beta}} \cdot \frac{|1-(e^{i\eta}\overline{\lambda}_k)^{2\beta}|}{1-(e^{i\eta}\overline{\lambda}_k)^{2\beta}}, \ \zeta \in \widetilde{\Delta}, \tag{5}$$

—сходящееся произведение типа Бляшке для угловой области $\widetilde{\Delta}$ [с нулями в точках $\zeta = \overline{\lambda}_k$.

Теорема 2. *Если ряд (4) сходится, то замыкание в метрике $H_2^{(\infty)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$ системы $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ совпадает с классом функций f, единственным образом представимых в виде*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\widetilde{\Delta}} E_\rho(z\zeta; \mu)\, g(\zeta)\, d\zeta, \ z \in \Delta^*(\chi; \varkappa), \tag{6}$$

где $g \in H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*; \overline{\lambda}_k]$.

Доказательство. В силу леммы 1 замыкание в метрике $H_2^{(\infty)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$ системы $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ совпадает с множеством функций f, представимых в виде (6), где g принадлежит замыканию в метрике $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*]$ системы $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$. Но если ряд (4) сходится, то замыкание в метрике $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*]$ системы $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ совпадает с классом $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*; \overline{\lambda}_k]$ (см. [12], теорему 7), откуда и следует утверждение теоремы.

§ 3. Минимальность и базисность систем функций типа Миттаг—Леффлера

1 (а). Ввиду леммы 1 система $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ минимальна в $H_2^{(\infty)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$ тогда и только тогда, когда система $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ минимальна в $H_2^{(-\infty)}[\widetilde{\Delta}^*]$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд (4) (см. [12], § 2). Следовательно, справедлив следующий критерий минимальности системы $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$.

Теорема 3. *Система $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ минимальна в $H_2^{(\infty)}[\Delta^*(\chi; \varkappa)]$ тогда и только тогда, когда сходится ряд* (4).

(б) Итак, если ряд (4) сходится, то система $\{\omega_\rho^*(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ имеет биортогональную систему. Займемся ее построением.

Предварительно построим другую систему $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty$, функции которой удовлетворяют следующим интерполяционным данным:

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\bar{\lambda}_n)=\begin{cases}1, & k=n,\\ 0, & k\neq n,\end{cases}\quad (k,\ n>1). \tag{7}$$

При этом мы будем следовать схеме, предложенной М. М. Джрбашяном (см., например, [14, 15]).

Сначала заметим, что если ряд (4) сходится, то число p_j (т. е. кратность появления числа $\bar{\lambda}_j$ во всей последовательности $\{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty$) конечно при любом $j\geqslant 1$.

Пусть ряд (4) сходится. Тогда бесконечное произведение (5) сходятся абсолютно и равномерно внутри области $\tilde{\Delta}$ и определяет там ограниченную аналитическую функцию $B_{\tilde{\Delta}}(\zeta)$, обращающуюся в нуль лишь в точках последовательности $\{\bar{\lambda}_k\}_1^\infty$. При этом для функции $B_{\tilde{\Delta}}(\zeta)$ точка $\zeta=\bar{\lambda}_k$ является нулем кратности p_k.

Очевидно, что функция

$$\tau_k(\xi)=\frac{(\xi-\bar{\lambda}_k)^{p_k}}{B_{\tilde{\Delta}}(\xi)} \tag{8}$$

регулярна и отлична от нуля в некоторой окрестности точки $\xi=\bar{\lambda}_k$. Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon>0$ справедливо разложение

$$\tau_k(\xi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(\bar{\lambda}_k)(\xi-\bar{\lambda}_k)^\nu,\quad |\xi-\bar{\lambda}_k|<\varepsilon, \tag{9}$$

где

$$a_\nu(\bar{\lambda}_k)=\frac{1}{\nu!}\tau_k^{(\nu)}(\bar{\lambda}_k)(\nu=0,\ 1,\cdots;\ k=1,\ 2,\cdots).$$

Введем в рассмотрение полиномы

$$q_k(\xi)=\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}a_\nu(\bar{\lambda}_k)(\xi-\bar{\lambda}_k)^\nu\ (k=1,\ 2,\cdots), \tag{10}$$

и функции

$$\Omega_k(\xi)=\frac{B_{\tilde{\Delta}}(\xi)\,q_k(\xi)}{(s_k-1)!\,(\xi-\bar{\lambda}_k)^{p_k-s_k+1}}=\frac{B_{\tilde{\Delta}}(\xi)}{(s_k-1)!}\sum_{\nu=0}^{p_k-s_k}\frac{a_\nu(\bar{\lambda}_k)}{(\xi-\bar{\lambda}_k)^{p_k-s_k+1-\nu}}. \tag{11}$$

Так как функция $B_{\tilde{\Delta}}(\xi)$ аналитична и ограничена в области $\tilde{\Delta}$ и в точке $\xi=\bar{\lambda}_k$ имеет нуль кратности p_k, то $\Omega_k(\xi)$ аналитична и ограничена в той же области $\tilde{\Delta}$. Более того, при $|\xi|\to+\infty$ функция $\Omega_k(\xi)$ имеет порядок $O(|\xi|^{-1})$. Отсюда заключаем, что

$$\Omega_k(\xi)\in H_2^{(\omega)}[\tilde{\Delta}]\ (k=1,\ 2,\cdots).$$

Об интерполяционных свойствах функций $\Omega_k(\xi)$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Функции системы* $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty$ *удовлетворяют интерполяционным данным* (7).

Доказательство. Из (9) и (10) следует, что

$$q_k(\xi) = \tau_k(\xi) - \sum_{\nu=p_k-s_k+1} a_\nu(\overline{\lambda}_k)(\xi - \overline{\lambda}_k)^\nu, \ |\xi - \overline{\lambda}_k| < \varepsilon,$$

а в силу (8) имеем

$$\frac{B_{\widetilde{\Delta}}(\xi)\,\tau_k(\xi)}{(s_k-1)!\,(\xi-\overline{\lambda}_k)^{p_k-s_k+1}} = \frac{(\xi-\overline{\lambda}_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!}.$$

Из этих равенств и (11) получаем

$$\Omega_k(\xi) = \frac{(\xi-\overline{\lambda}_k)^{s_k-1}}{(s_k-1)!} - \frac{B_{\widetilde{\Delta}}(\xi)}{(s_k-1)!}\sum_{j=0}^{-} b_j(\overline{\lambda}_k)(\xi-\overline{\lambda}_k)^j, \ |\xi-\overline{\lambda}_k| < \varepsilon. \qquad (12)$$

Теперь рассмотрим три единственно возможных случая: 1) $k=n$; 2) $\overline{\lambda}_k=\overline{\lambda}_n$, но $k \neq n$; 3) $\overline{\lambda}_k \neq \overline{\lambda}_n$.

Так как $B_{\widetilde{\Delta}}(\xi)$ в точке $\xi=\overline{\lambda}_k$ имеет нуль кратности $p_k \geqslant s_k$, то из (12) имеем

$$\Omega_k^{(s_k-1)}(\overline{\lambda}_k) = 1 \ (k=1, 2, \cdots).$$

Если $\overline{\lambda}_k=\overline{\lambda}_n$, но $k \neq n$, то $s_k \neq s_n$, и из (12) получаем

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\overline{\lambda}_n) = 0.$$

Наконец, если $\overline{\lambda}_k \neq \overline{\lambda}_n$, то из (11) вытекает, что в точке $\xi=\overline{\lambda}_n$ функция $\Omega_k(\xi)$ вместе с $B_{\widetilde{\Delta}}(\xi)$ имеет нуль кратности $p_n \geqslant s_n$. Следовательно, в этом случае

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\overline{\lambda}_n) = 0.$$

Лемма доказана.

(в) Пусть, как и раньше,

$$\frac{1}{2} < \frac{\pi}{\varkappa-\chi} < \rho, \ -1 < \omega < 1, \ \mu = \frac{1+\omega+\rho}{2\rho}.$$

Пусть, далее, $\{re^{i\eta}: r>0\}$ $\left(\eta = \frac{1}{2}(\chi+\varkappa)\right)$ — биссектриса угловой области $\Delta(\chi; \varkappa)$, $\frac{\pi}{\gamma} = \varkappa-\chi$ — раствор той же области, а $\frac{\pi}{\gamma} = \varkappa-\chi-\frac{\pi}{\rho}$ — раствор угловой области $\widetilde{\Delta}$.

Легко видеть, что поворот комплексной плоскости на угол $-\eta$ переводит $\Delta(\chi; \varkappa)$ в $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma}; \frac{\pi}{2\gamma}\right)$, а поворот на угол η переводит $\widetilde{\Delta}$ в $\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha}; \frac{\pi}{2\alpha}\right)$.

Нетрудно также проверить, что параметры α, ω, ρ, μ и γ удовлетворяют условиям

$$\frac{1}{2}<\alpha<+\infty,\ -1<\omega<1,\ \rho>\frac{\alpha}{2\alpha-1},\ \mu=\frac{1+\omega+\rho}{2\rho},\ \frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\rho}.$$

Далее, очевидно, что равенством

$$f(\xi)=e^{i\eta}F(e^{i\eta}\xi),\quad \xi\in\widetilde{\Delta},$$

где $F\in H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\ \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right]$ определяется изометрический изоморфизм между пространствами

$$H_2^{(\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\alpha};\ \frac{\pi}{2\alpha}\right)\right] \text{ и } H_2^{(\omega)}[\widetilde{\Delta}],$$

а равенством

$$h(z)=g(e^{-i\eta}z),\quad z\in\Delta(\chi;\ \varkappa),$$

где $g\in H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\ \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right]$ —между пространствами

$$H_2^{(-\omega)}\left[\Delta\left(-\frac{\pi}{2\gamma};\ \frac{\pi}{2\gamma}\right)\right] \text{ и } H_2^{(-\omega)}[\Delta(\chi;\ \varkappa)].$$

Если теперь $f\in H_2^{(\omega)}[\widetilde{\Delta}]$, то для каждого значения $\varphi\in\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho},\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ образуем функцию

$$h_\varphi(z;\ f)=\rho\,(e^{-i\varphi}z)^{\mu\rho}z^{-1}\int\limits_0^{+\infty}f(re^{-i\varphi})\,e^{-(e^{-i\varphi}z)^\rho r^\rho}r^{\mu\rho-1}\,dr, \tag{13}$$

рассматривая ее в области $\Delta\left(\varphi-\frac{\pi}{2\rho};\ \varphi+\frac{\pi}{2\rho}\right)$. При этом рассматриваются те ветви функций $(e^{-i\varphi}z)^{\mu\rho}$ и $(e^{-i\varphi}z)^\rho$, которые при $\operatorname{Arg} z=\varphi$ принимают положительные значения.

Учитывая приведенные выше замечания, на основании теорем С и Д получаем следующую лемму.

Лемма 3. *Пусть $f\in H_2^{(\omega)}[\widetilde{\Delta}]$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1°. *Для каждого значения $\varphi\in\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho},\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$ функция (13) голоморфна в области $\Delta\left(\varphi-\frac{\pi}{2\rho};\ \varphi+\frac{\pi}{2\rho}\right)$;*

2°. *Существует функция $\overline{G}_{\rho,\mu}(z;\ f)$, принадлежащая классу $H_2^{(-\omega)}[\Delta(\chi;\ \varkappa)]$ и такая, что для любого $\varphi\in\left(\chi+\frac{\pi}{2\rho},\ \varkappa-\frac{\pi}{2\rho}\right)$*

$$h_\rho(z; f) \equiv \widetilde{G}_{\rho, \mu}(z; f), \quad z \in \Delta\left(\varphi - \frac{\pi}{2\rho}; \varphi + \frac{\pi}{2\rho}\right);$$

3°. *Справедливо равенство*

$$f(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\chi; \varkappa)} E_\rho(\xi z; \mu)\, \widetilde{G}_{\rho, \mu}(z; f)\, dz, \quad \xi \in \overline{\Delta},$$

где $\partial\Delta(\chi; \varkappa)$ *— граница* $\Delta(\chi; \varkappa)$, *пробегаемая в положительном относительно этой области направлении.*

(г) Теперь мы уже можем определить биортогональную с $\{\omega^*_\rho(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ систему $\{\Omega^*_\rho(z; \lambda_k)\}_1^\infty$. Для этого вспомним, что $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty \subset H_2^{(\omega)}[\overline{\Delta}]$ и положим

$$\Omega^*_\rho(z; \lambda_k) = \widetilde{G}_{\rho, \mu}(z; \Omega_k) \quad (k=1, 2, \cdots). \tag{14}$$

Ясно, что система $\{\Omega^*_\rho(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ определена лишь при условии сходимости ряда (4) (так как такова и система $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty$), и по лемме 3

$$\Omega^*_\rho(z; \lambda_k) \in H_2^{(-\omega)}[\Delta(\chi; \varkappa)] \quad (k=1, 2, \cdots).$$

Теорема 4. *Системы* $\{\omega^*_\rho(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ *и* $\{\Omega^*_\rho(z; \lambda_k)\}_1^\infty$ *биортогональны в следующем смысле:*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta^*(\chi, \varkappa)} \omega^*_\rho(z; \lambda_n)\, \Omega^*_\rho(z; \lambda_k)\, dz = \begin{cases} 1, & k=n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k, n \geqslant 1), \tag{15}$$

где $\partial\Delta^*(\chi; \varkappa)$ *— граница* $\Delta^*(\chi; \varkappa)$, *пробегаемая в положительном относительно этой области направлении.*

Доказательство. Ввиду (14) и леммы 3 для любого $k \geqslant 1$ можем написать

$$\Omega_k(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\chi, \varkappa)} E_\rho(z\xi; \mu)\, \Omega^*_\rho(z; \lambda_k)\, dz, \quad \xi \in \overline{\Delta}.$$

Продифференцировав обе части этого равенства $s_n - 1$ раз по ξ, получим

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\xi) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\chi, \varkappa)} E_\rho^{(s_n-1)}(\xi z; \mu)\, \Omega^*_\rho(z; \lambda_k)\, dz, \quad \xi \in \overline{\Delta},$$

(при этом дифференцирование под знаком интеграла допустимо ввиду абсолютной и равномерной сходимости полученных после дифференцирования интегралов). Подставив в это равенство $\xi = \overline{\lambda}_n$ и поменяв направление контура интегрирования, будем иметь

$$\Omega_k^{(s_n-1)}(\overline{\lambda}_n) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta(\chi; \varkappa)} E_\rho^{(s_n-1)}(\overline{\lambda}_n z; \mu)\, z^{s_n-1}\, \Omega^*_\rho(z; \lambda_k)\, dz,$$

а это, в силу леммы 2, равносильно (15). Теорема доказана.

Замечание. Отметим, не останавливаясь на подробностях, что воспользовавшись (14) и леммой 3, можно на основании соответствующих результатов из работы [12] для системы $\{\Omega_k(\xi)\}_1^\infty$ описать замыкание в метрике $H_2^{(-\omega)}[\Delta(\chi;\ x)]$ системы $\{\Omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ и получить критерий ее базисности в этом замыкании.

2. В заключение установим критерий базисности системы $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$. С этой целью обозначим через $\{\lambda_k^{(\omega)}\}_1^\infty$ последовательность положительных чисел, положив

$$\lambda_k^{(\omega)}=\{|\lambda_k|^\omega(|\lambda_k|^{1-\beta}\operatorname{Re}(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta)^{2s_k-1}\}^{1/2}\quad(k=1,\ 2,\cdots),$$

где

$$\eta=\frac{\chi+x}{2},\ \frac{\pi}{\beta}=x-\chi-\frac{\pi}{\rho}\cdot$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 5. *Справедливы следующие утверждения:*

1° *Если выполняются условия*

$$\inf_{k\geq 1}\prod_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_k}}^\infty\left|\frac{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta-(e^{i\eta}\bar{\lambda}_j)^\beta}{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_k)^\beta+\overline{(e^{i\eta}\bar{\lambda}_j)^\beta}}\right|>0,\quad \sup_{k\geq 1}|p_k|<+\infty,\tag{16}$$

то система $\{\lambda_k^{(\omega)}\,\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ *является базисом Рисса своего замыкания в метрике* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ x)]$;

2°. *Если хоть одно из условий* (16) *нарушается, то система* $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\}_1^\infty$ *ни при какой перестановке членов не является базисом своего замыкания в метрике* $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ x)]$.

Доказательство. При выполнении условий (16) система $\{\lambda_k^{(\omega)}r_k(\zeta)\}_1^\infty$ является базисом Рисса своего замыкания в метрике $H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$ (см. [12], теорему 11). Тогда, в виду леммы 1, система $\{\omega_\rho^*(z;\ \lambda_k)\,\lambda_k^{(\omega)}\}_1^\infty$ также является базисом Рисса своего замыкания в метрике $H_2^{(\omega)}[\Delta^*(\chi;\ x)]$.

Если же хоть одно из условий (16) нарушается, то система $\{r_k(\zeta)\}_1^\infty$ ни при какой перестановке членов не является базисом своего замыкания в метрике $H_2^{(-\omega)}[\tilde{\Delta}^*]$ (см. [12], теорему 11). Снова воспользовавшись леммой 1, отсюда получаем утверждение 2° теоремы.

Приношу глубокую благодарность академику АН Армянской ССР М. М. Джрбашяну за постановку задач и внимание к работе.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 25.III.1980

Վ. Մ. ՄԱՐՏԻՐՈՍՅԱՆ. Միտագ-Լեֆլերի տիպի ֆունկցիաների փակության, մինիմալության ու բազիսության մասին անկյունային տիրույթներում (*ամփոփում*)

Ուսումնասիրվում է Միտագ-Լեֆլերի տիպի ամբողջ ֆունկցիայով ծնված սիստեմների լրիվության, մինիմալության, բազիսության ու փակույթի նկարագրման հարցերը անկյունային տիրույթներում:

V. M. MARTIROSIAN. *On the closure, minimality and basisity of the systems of Mittag—Leffler type in angular domains* (summary)

The problem of closedness, minimality, basisity and of describing the closure of a systems of Mittag—Leffler type in angular domains are investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *М. М. Джрбашян.* О пополнении и замыкании неполной системы функций $\{e^{-\lambda_k x} x^{s_k-1}\}_1^{\infty}$, ДАН СССР, 141, № 3, 1961, 539—542.
2. *М. М. Джрбашян.* О замкнутости системы типа Миттаг—Леффлера, ДАН СССР, 219, № 6, 1974, 1302—1305.
3. *L. Schwartz.* Etude des sommes d'exponentielles, Actualites scientifiques et industrielles, Paris, 1959.
4. *А. Ф. Леонтьев.* Об одной последовательности полиномов, ДАН СССР, 72, № 4, 1950, 621—624.
5. *С. А. Акопян, И. О. Хачатрян.* О замыкании незамкнутых систем функций типа Миттаг—Леффлере, Изв. АН СССР, сер. матем., 40, № 1, 1976, 96—114.
6. *М. М. Джрбашян, В. М. Мартиросян.* Теоремы типа Винера—Пэли и Мюнца—Сасса, Изв. АН СССР, сер. матем., 41, № 4, 1977, 868—894.
7. *А. Е. Аветисян, С. А. Акопян, И. О. Хачатрян.* О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера на произвольной конечной системе лучей, Изв. АН Арм. ССР, матем., XIII, №№ 5—6, 1978, 389—395.
8. *В. М. Мартиросян.* О замкнутости систем функций типа Миттаг—Леффлера и систем простейших рациональных дробей, ДАН Арм. ССР, 62, № 5, 1976, 269—274.
9. *В. М. Мартиросян.* Базисность некоторых систем аналитических функций и решение интерполяционной задачи в области угла, ДАН Арм. ССР, 63, № 5, 1976, 278—283.
10. *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян.* Интегральные представления некоторых классов функций, аналитических в области угла, ДАН СССР, 120, № 3, 1958, 457—460; Сиб. матем. ж., 1, № 3, 1960, 383—426.
11. *М. М. Джрбашян.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», М., 1966.
12. *В. М. Мартиросян.* Замыкание и базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в угловых областях, Изв. АН Арм. ССР, матем., XIII, №№ 5—6, 1978, 490—531.
13. *И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», М., 1967.
14. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы функций и представления ядра Коши, Изв. АН Арм. ССР, матем., VIII, № 1, 1973, 384—409.
15. *М. М. Джрбашян.* Биортогональные системы рациональных функций и наилучшее приближение ядра Коши на вещественной оси, Матем. сб., 95 (137), № 3 (11), 1974, 418—444.