ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 1, 1981 Математика

Л. Г. АРАБАДЖЯН

О КОНСЕРВАТИВНОМ УРАВНЕНИИ ВИНЕРА—ХОПФА

1°. В настоящей работе изучается интегральное уравнение Винера—Хопфа второго рода (см. [1—11])

$$f(x)=g(x)+\int_0^\infty K(x-t)f(t)\,dt,\ K\in L_1(-\infty,\infty) \tag{1}$$

консервативном случае, когда выполняются условия

$$K\geqslant 0,\ \mu=\int_0^\infty K(x)\,dx=1. \tag{2}$$

Различные частные случаи этой задачи представляют известный интерес в теории переноса излучения и в других приложениях.

Существуют многочисленные работы по однородным уравнениям вида (1), (2) (см., напр., [1—2, 4—11]), где указанное уравнение исследовано с различных точек зрения и разными методами. Неоднородным консервативным уравнениям посвящено относительно небольшое число работ (см. [1, 2, 4, 7, 9—11]).

В известной монографии Е. Хопфа [1] получен ряд важных аналитических формул для решений однородных и неоднородных уравнений (1), (2) при дополнительных условиях

$$K(x)=K(-x),\ K(x)\geqslant\alpha\int_x^\infty K(t)\,dt,\ x>0,\ \alpha=\text{const}>0. \tag{2'}$$

В этом направлении доказана

Теорема (Е. Хопф). Для того чтобы при $g>0$ уравнение (1) при условиях (2), (2′) имело локально интегрируемое решение f необходимо и достаточно, чтобы $g\in L_1(0,\infty)$. ▶

Там же дана классификация неотрицательных решений уравнения (1) при условиях (2), (2′) и показано, что минимальное неотрицательное решение указанного уравнения представимо в виде ряда Неймана.

Нетрудно заметить, что из второго условия (2′) следует, что ядро K на бесконечности убывает быстрее любой степени x.

Впоследствии уравнение (1) с симметричным ядром и несколько иными ограничениями изучалось в работе [4]. В предположении, что функция

$$A(s)=1-\bar{K}(s), \tag{*}$$

где $\bar{K}(s)$ — преобразование Фурье ядра K, имеет в полосе $|\mathrm{Im}\, s|\leqslant C$, $C=\mathrm{const}$, конечное число нулей, а

$$e^{a|x|}K(x)\in L_1^+,\ (L_1^+\equiv L_1(0,\ \infty))$$

для некоторого $a>0$, и при ограниченной вариации функций K и g в бесконечном промежутке доказано существование решения уравнения (1).

В работе М. Г. Крейна [3] получила дальнейшее развитие теория уравнений (1), где вопросы разрешимости изучены при условии

$$1-\bar{K}(s)\neq 0,\ s\in(-\infty,\ \infty),$$

что, однако, в рассматриваемом случае (1), (2) не выполняется $(1-\bar{K}(0)=0)$.

В другой работе [9] того же автора исследованы однородные и неоднородные уравнения (1), (2) для специальных типов ядер и получена асимптотика этих решений.

В настоящей работе предлагается другой подход для изучения уравнения (1), (2) основанный на идее факторизации операторов Винера—Хопфа с использованием методов и результатов работ [8], [11].

2°. В [8] доказано существование факторизации

$$I-\hat{K}=(I-\hat{v}_-)(I-\hat{v}_+), \tag{3}$$

где I — единичный оператор, а $\hat{K}$, $\hat{v}_\pm$ суть интегральные операторы вида

$$(\hat{K}\varphi)(x)=\int_0^\infty K(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$(\hat{v}_-\varphi)(x)=\int_x^\infty V_-(t-x)\,\varphi(t)\,dt,\quad (\hat{v}_+\varphi)(x)=\int_0^x V_+(x-t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$V_\pm\in L_1^+$ и представляют собой каноническое решение нелинейной системы

$$V_\pm(x)=K(\pm x)+\int_0^\infty V_\mp(t)\,V_\pm(x+t)\,dt,\ x>0. \tag{4}$$

Факторизация (3) понимается как равенство операторов действующих в E^+, где E^+ — любое из пространств L_p^+, $p\geqslant 1$, M^+. Однако равенство (3) оказывается справедливым в том или ином классе локально интегрируемых функций (см. [11]).

В [8] доказано, что $V_\pm$ обладают свойствами

$$V_\pm\geqslant 0,\ \gamma_\pm=\int_0^\infty V_\pm(x)\,dx\leqslant 1,\ (1-\gamma_-)(1-\gamma_+)=1-\mu. \tag{5}$$

Введем некоторые обозначения, согласованные с обозначениями из [11]. Пусть

$$m_\lambda(f)=\int_0^\infty f(x)\,x^\lambda\,dx,\ \lambda\in R^+,$$

$$\mu_\pm=\int_0^\infty K(\pm x)\,dx,\ \mu_p^\pm=\int_0^\infty K(\pm x)\,x^p\,dx,\ p\in R^+,$$

$$\nu=\mu_1^+-\mu_1^-=\int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx.$$

В [11] доказана

Теорема А. Пусть

$$K>0,\ \mu=1 \text{ и } \exists\nu=\int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx.$$

Тогда

а) $\nu>0 <-> \gamma_-<1,\ \gamma_+=1,$

б) $\nu<0 <-> \gamma_-=1,\ \gamma_+<1,$

в) $\nu=0 <-> \gamma_\pm=1.$▶

Пусть $\Phi_\pm\geqslant 0$ — локально интегрируемые функции, определяемые из уравнений восстановления (см. [11])

$$\Phi_\pm(x)=V_\pm(x)+\int_0^x V_\pm(x-t)\,\Phi_\pm(t)\,dt, \tag{6}$$

а $S_\pm\geqslant 0$ определяются из уравнений

$$S_\pm(x)=1+\int_0^x V_\pm(x-t)\,S_\pm(t)\,dt. \tag{7}$$

В [11] показано, что

$$S_\pm(x)=1+\int_0^x \Phi_\pm(t)\,dt \tag{8}$$

и $\Phi_\pm\in\Omega$, где Ω — класс функций, удовлетворяющих условию

$$f\in\Omega,\quad \text{если}\quad \int_0^x f(t)\,dt=O(x),\ x\to\infty.$$

Существуют $a_\pm$, $b_\pm<+\infty$ такие, что

$$S_\pm(x)\leqslant a_\pm+b_\pm x,\ x>0. \tag{9}$$

В [11] доказана

Теорема Б. Пусть

$$\gamma_- < 1,\ \gamma_+ = 1 \left(\text{или } \nu = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xK(x)\,dx > 0\right) \text{ и } g \in E^+.$$

Уравнение (1), (2) имеет локально интегрируемое решение, причем

а) если $g \in M^+$, то $f(x) = O(x)$ при $x \to \infty$;

б) если $g \in L_1^+$, то $f \in \Omega$.▶

3°. Рассмотрим уравнение

$$\varphi(x) = g(x) + \int\limits_x^{\infty} V(t-x)\,\varphi(t)\,dt, \tag{10}$$

где

$$0 \leqslant V \in L_1^+,\ \gamma = \int\limits_0^{\infty} V(x)\,dx \leqslant 1.$$

Пусть

$$\Phi \text{ и } S(x) = 1 + \int\limits_0^x \Phi(t)\,dt$$

определяются из уравнений восстановления

$$\Phi(x) = V(x) + \int\limits_0^x V(x-t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{11}$$

$$S(x) = 1 + \int\limits_0^x V(x-t)\,S(t)\,dt. \tag{12}$$

Мы докажем следующую основную лемму.

Лемма 1. а) *При* $g \in L_1^+$ *уравнение* (10) *обладает решением* φ *из класса* Ω, *представляющим собой предел следующего итерационного процесса:*

$$\varphi_{n+1}(x) = g(x) + \int\limits_0^{\infty} V(t)\,\varphi_n(x+t)\,dt,\ \varphi_0 = 0. \tag{13}$$

(*Предел понимается по топологии сходимости по* $L_1(0, r)$, $\forall r < +\infty$).

б) *Справедлива формула*

$$\varphi(x) = g(x) + \int\limits_0^{\infty} \Phi(t)\,g(x+t)\,dt. \tag{14}$$

в) *Если* $(|g|, S) = \int_0^\infty |g(x)| S(x)\,dx < +\infty$, то $\varphi \in L_1^+$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать $g \geq 0$. (В противном случае g можно представить в виде разности двух неотрицательных функций из L_1^+).

При $\gamma_+ < 1$ справедливость леммы очевидна, ибо в этом случае оператор $I - \hat{v}$, где

$$(\hat{v}\varphi)(x) = \int_x^\infty V(t-x)\,\varphi(t)\,dt,$$

обратим в L_1^+.

Рассмотрим итерации (13). Нетрудно проверить, что при $V, g \geqslant 0$

$$\varphi_n \geqslant 0;\ \varphi_n \uparrow \text{ по } n \text{ и из } g \in L_1^+ \to \varphi_n \in L_1^+. \tag{15}$$

Из (13) с учетом (15) имеем

$$\int_a^\infty \varphi_n(x)\,dx \leqslant \int_a^\infty g(x)\,dx + \int_a^\infty \varphi_n(x)\,dx \int_0^{x-a} V(t)\,dt,$$

откуда с учетом $\gamma = 1$ получаем

$$\int_a^\infty \varphi_n(x)\,dx \int_{x-a}^\infty V(t)\,dt \leqslant \int_a^\infty g(x)\,dx,$$

что влечет за собой неравенство

$$\int_0^\infty V(t)\,dt \int_a^{a+t} \varphi_n(x)\,dx \leqslant \|g\|_{L_1^+}. \tag{16}$$

Выберем $r \in (0, \infty)$ так, чтобы $\int_r^\infty V(t)\,dt > 0$. Тогда при $a = mr$ из (16) получаем

$$\int_r^\infty V(t)\,dt \int_{mr}^{(m+1)r} \varphi_n(x)\,dx \leqslant \|g\|_{L_1^+},\quad m \in N_0,$$

откуда

$$\int_{mr}^{(m+1)r} \varphi_n(x)\,dx \leqslant \|g\|_{L_1^+} \left(\int_r^\infty V(t)\,dt\right)^{-1} \equiv R, \tag{17}$$

где $m \in N_0$.

На интервале $[mr, (m+1)r]$, $m \in N_0$ имеем

$$\varphi_n \uparrow \text{ по } n \text{ и } \|\varphi_n\|_{L_1[mr,\,(m+1)r]} \leqslant R.$$

Из известной теоремы Б. Леви следует существование функции $\varphi^{(m)}$, $m \in N_0$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi^{(m)} \in L_1\,[mr,\ (m+1)\,r],\ \varphi_n \to \varphi^{(m)} \text{ п.в. в } [mr,\ (m+1)\,r].$$

Рассмотрим функцию φ, определенную на $(0,\ \infty)$ и

$$\varphi\,(x) = \varphi^{(m)}\,(x) \text{ для } x \in [mr,\ (m+1)\,r]. \tag{18}$$

Покажем, что φ является решением уравнения (10).

Для $\forall A < +\infty$ и $n \in N_0$ имеем

$$\int\limits_x^A V\,(t-x)\,\varphi_n\,(t)\,dt \leqslant \varphi\,(x) - g\,(x),$$

откуда, учитывая, что $\varphi_n \to \varphi$ в $L_1\,[0,\ A]$ и ввиду произвольности A получаем

$$\int\limits_x^\infty V\,(t-x)\,\varphi\,(t)\,dt \leqslant \varphi\,(x) - g\,(x) \text{ п.в. в } (0,\ \infty). \tag{19}$$

Из (13) имеем $\hat{v}\,\varphi \geqslant \varphi_n - g$. Так как $\varphi_n \to \varphi$ почти везде, то в пределе при $n \to \infty$ получаем

$$(\hat{v}\,\varphi)(x) \geqslant \varphi\,(x) - g\,(x) \text{ п.в. в } (0,\ \infty). \tag{20}$$

Из (19) и (20) следует, что φ — решение уравнения (10). Покажем, что $\varphi \in \Omega$. Из неравенства (17) имеем

$$\int\limits_{mr}^{(m+1)r} \varphi\,(x)\,dx \leqslant R,\ m \in N_0. \tag{21}$$

Для $x > 0$ с учетом $\varphi \geqslant 0$ и неравенства (21) получаем

$$\int\limits_0^x \varphi\,(\tau)\,d\tau \leqslant \left(\left[\frac{x}{r}\right] + 1\right) R = O\,(x) \text{ при } x \to \infty, \tag{22}$$

т. е. $\varphi \in \Omega$.

Для доказательства формулы (14) рассмотрим последовательность $\{V_m\}_{m=0}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям

$$V_m \in L_1^+;\ 0 \leqslant V_m \leqslant V;\ \gamma_m = \|V_m\| < 1;\ V_m \uparrow V \text{ в } L_1^+. \tag{23}$$

Пусть Φ_m определены из уравнений

$$\Phi_m\,(x) = V_m\,(x) + \int\limits_0^x V_m\,(x-t)\,\Phi_m\,(t)\,dt. \tag{24}$$

Тогда для решений φ_m уравнений

$$\varphi_m(x) = g(x) + \int_x^\infty V_m(t-x)\,\varphi_m(t)\,dt$$

с учетом (23) справедливо равенство

$$\varphi_m(x) = g(x) + \int_0^\infty \Phi_m(t)\,g(x+t)\,dt. \tag{25}$$

Отсюда получаем

$$\varphi(x) \geqslant g(x) + \int_0^\infty \Phi_m(t)\,g(x+t)\,dt. \tag{26}$$

Из соотношения (26) следует существование предела правой части и неравенство

$$\varphi(x) \geqslant g(x) + \int_0^\infty \Phi(t)\,g(x+t)\,dt. \tag{27}$$

Аналогичными рассуждениями, заменяя в равенстве (25) Φ_m через Φ и переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем неравенство, противоположное (27). Этим завершается доказательство утверждений а) и б) леммы.

Докажем теперь третье утверждение леммы. При указанных в лемме условиях с учетом теоремы Фубини имеем

$$+\infty > \int_0^\infty g(x)\,S(x)\,dx = \int_0^\infty g(x)\left[1 + \int_0^x \Phi(t)\,dt\right]dx =$$

$$= \int_0^\infty \left[g(x) + \int_0^\infty \Phi(t)\,g(x+t)\,dt\right]dx = \int_0^\infty \varphi(x)\,dx. \blacktriangleright$$

Следствие. Если

$$\int_0^\infty x\,|g(x)|\,dx < +\infty,$$

то $\varphi \in L_1^+$.

Доказательство следует из утверждения в) леммы и из (9). ▶

Приведем пример, показывающий, что асимптотика (22) для класса $\{g\} = L_1^+$ является достаточно точной.

Рассмотрим уравнение (10) при $g \in L_1^+$ и $V(x) = e^{-x}$;

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^\infty e^{x-t}\,\varphi(t)\,dt. \tag{28}$$

Из уравнения (11) получаем $\Phi \equiv 1$. Тогда из формулы (14) следует

$$\varphi(x) = g(x) + \int_x^\infty g(\tau)\, d\tau. \tag{29}$$

Если взять $g = (1+x)^{-p}$, $p = 1 + \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$, то легко проверить, что

$$\int_0^x \varphi(\tau)\, d\tau \sim \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)} (1+x)^{1-\varepsilon}, \quad x \to \infty.$$

Из формулы (29) следует также, что решение $\varphi \in M^+$, если $g \in M^+ \cap L_1^+$.

4°. Рассмотрим теперь уравнение восстановления

$$f(x) = \varphi(x) + \int_0^x V(x-t) f(t)\, dt, \tag{30}$$

где $0 \leqslant V \in L_1^+$.

Известно, что если φ локально интегрируема на $[0, \infty)$, то уравнение (30) имеет локально интегрируемое решение f (см. [11]).

Из (30) и (12) нетрудно получить формулу

$$\int_0^x f(\tau)\, d\tau = \varphi * S = \int_0^x \varphi(t)\, S(x-t)\, dt, \tag{31}$$

откуда с учетом $S \uparrow$ по x следует

$$\int_0^x f(\tau)\, d\tau \leqslant S(x) \int_0^x \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{32}$$

Если теперь $\varphi \in L_1^+$, то из соотношения (32) при $\|V\|_{L_1^+} = 1$ получаем

$$\int_0^x f(\tau)\, d\tau = O(S(x)) = O(x), \quad x \to \infty, \tag{33}$$

что означает $f \in \Omega$.

5°. Перейдем к изучению уравнения (1). Факторизация (3) сводит уравнение (1) к следующим двум уравнениям:

$$(I - \hat{v}_-)\, \varphi = g, \tag{34}$$

$$(I - \hat{v}_+)\, f = \varphi. \tag{35}$$

Уравнения (34) и (35) принадлежат к уравнениям типа (10) и (30).

Нашей ближайшей целью является доказательство следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Если* $g \in L_1^+$, *то уравнение* (1), (2) *обладает локально интегрируемым решением* f, *причем справедлива оценка*

$$\int_0^x f(\tau)\,d\tau \leqslant S_+(x)\left(\left[\frac{x}{r}\right]+1\right)R, \tag{36}$$

где S_+ *определена из* (7), *а* R — *из соотношения* (17). *В этом случае*

а) *если* $\gamma_+ < 1$ (*или если* $\exists \nu$, $\nu < 0$), *то* $f \in \Omega$,
б) *если* $(|g|, S_-) < +\infty$ *и* $\gamma_\pm = 1$ (*или* $\nu = 0$), *то также* $f \in \Omega$,
в) *если* $(|g|, S_-) < +\infty$; $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$ (*или* $\nu < 0$), *то* $f \in L_1^+$,

где S_- — *определена из уравнения* (7).

Замечание. Условие

$$(|g|, S_-) = \int_0^\infty |g(x)|\, S_-(x)\,dx < +\infty$$

может быть заменено более сильным, но легко проверяемым условием

$$m_1(|g|) = \int_0^\infty x\,|g(x)|\,dx < +\infty.$$

Условие $(|g|, S_-) < +\infty$ выполняется также при $|g| \leqslant c K_+$, где $K_\pm = K(\pm x)$, $x > 0$, а $c = \mathrm{const}$. (Это будет доказано ниже). Поэтому теорема 5.1 работы [11] является частным случаем теоремы 1.

Доказательство. Из леммы 1, свойств решений (30) и оценки (32) следует существование локально интегрируемого решения f уравнения (35) и оценка (36) для этого решения. Утверждение а) следует из неравенства (36) с учетом $S_+ \in M^+$ при $\gamma_+ < 1$. Утверждения б) и в) теоремы следуют из вышеуказанной леммы, если учесть обратимость оператора $I - \hat{v}_+$ в L_1^+ при $\gamma_+ < 1$. Как было отмечено в [11] эквивалентность уравнения (1), (2) и системы (34), (35) а приори неизвестна, поскольку равенство (3) понимается как равенство операторов, действующих в одном из пространств L_p^+, $p \geqslant 1$, M^+, а f в некоторых случаях не принадлежит этим пространствам. Поэтому для завершения доказательства теоремы покажем, что при условиях теоремы решение f уравнения (35) удовлетворяет уравнению (1), (2). Доказательство указанного факта аналогично доказательству леммы 4.2 из [11].

Равенство (3) представим в виде

$$\hat{K} = \hat{v}_+ + \hat{v}_-(I - \hat{v}_+). \tag{37}$$

Введем обозначение

$$f_m(x) = f(x)\,\theta(m - x) \in L_1^+,\quad m \in N.$$

Последнее включение следует из локальной интегрируемости функции f. Определим последовательность $\{\omega_m\}_{m=0}^{\infty}$ равенством

$$\omega_m(x)=\varphi(x)\,\theta(m-x)+\int_0^x V_+(x-t)\,\omega_m(t)\,dt.$$

Легко проверить, что

$$0\leqslant f_m\leqslant\omega_m\leqslant f.$$

Из равенства (37) с учетом $f_m\in L_1^+$ получаем

$$\hat{K}f_m=\hat{v}_+f_m+\hat{v}_-(I-\hat{v}_+)f_m. \tag{38}$$

Нетрудно проверить, что

$$[(I-\hat{v}_+)f_m](x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } x<m,\\ -\int\limits_0^m V_+(x-t)\,f(t)\,dt, & \text{если } x\geqslant m.\end{cases}$$

Учитывая, что $\hat{v}_+f_m\leqslant f-\varphi$, из (38) следует

$$\hat{K}f_m\leqslant f-g\Rightarrow\exists\,\hat{K}f.$$

Из определения $\{\omega_m\}_{m=0}^{\infty}$ и из (37) при $x<m$ имеем

$$(\hat{K}\omega_m)(x)=\omega_m(x)-\varphi(x)+\int_x^m V_-(t-x)\,\varphi(t)\,dt.$$

Совершая предельный переход при $m\to\infty$ в последнем равенстве с учетом (34) получаем (1).▶

Т е о р е м а 2. *Пусть в уравнении* (1), (2) *функция* g *удовлетворяет условию*

$$|g(x)|\leqslant c\int_x^{\infty}g^*(\tau)\,d\tau, \tag{39}$$

где $c=\text{const}$, $g^*\in L_1^+$ *и* $(|g^*|, S_-)<+\infty$.

Тогда решение уравнения (1), (2) *удовлетворяет оценке*

$$|f(x)|\leqslant c_1 S_+(x), \tag{40}$$

где S_+ *определяется из* (7), *а* $c_1=\text{const}$, *значение которой будет определено ниже.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим уравнение

$$\varphi^*(x)=g^*(x)+\int_0^{\infty}V_-(t)\,\varphi^*(x+t)\,dt. \tag{41}$$

При условии $(|g^*|, S_-^{\pm})<+\infty$ из леммы 1 следует $\varphi^*\in L_1^+$. Из рав енства (41) получаем

$$\int_x^\infty \varphi^*(\tau)\,d\tau = \int_x^\infty g(\tau)\,d\tau + \int_0^\infty V_-(t)\,dt \int_{x+t}^\infty \varphi^*(\tau)\,d\tau. \qquad (42)$$

Из сравнения уравнений (34) и (42) и оценки (39) следует существование решения уравнения (34) и оценка

$$|\varphi(x)| \leqslant C \int_x^\infty \varphi^*(\tau)\,d\tau \leqslant C \|\varphi^*\|_{L_1^+} = C_1.$$

Сравнивая (7) и (35) с учетом последней оценки получаем (40).▶

Замечание. Как уже отмечалось выше, условие $(|g^*|, S_-) < +\infty$ выполняется, если $|g^*| \leqslant CK_+$, то есть при

$$|g(x)| \leqslant C \int_x^\infty K_+(\tau)\,d\tau. \qquad (43)$$

Еще в работе Е. Хопфа [1] (см. формулу (121)) был использован тот простой факт, что $f(x) \equiv C$ является решением уравнения (1), (2) с $g(x) = C \int_x^\infty K(\tau)\,d\tau$. Отсюда непосредственно следует, что при выполнении условия (43) уравнение (1), (2) имеет решение f, $|f| \leqslant C$. Теорема 2 является некоторым обобщением этого факта*.

Она также позволяет установить существование локально интегрируемого решения уравнения (1), (2) в ряде случаев, когда $0 \leqslant g \in L_1^+$.

Лемма 3. *Пусть в уравнении* (4) $K_\pm \geqslant 0$, $\mu = 1$, $\mu_\lambda^+ < +\infty$, *где* $\lambda > 1$ (*или* $\mu_\lambda^- < +\infty$, $\lambda > 1$). *Тогда* $m_{\lambda-1}(V_+) < +\infty$ (*или* $m_{\lambda-1}(V_-) < +\infty$).

Доказательство. В [11] доказано, что решение уравнения (4) при $\mu = 1$ можно представить в виде

$$V_\pm(x) = K_\pm(x) + \int_0^\infty \Phi_\mp(t)\,K_\pm(x+t)\,dt,$$

где $\Phi_\pm$ определяются из (6). Из последнего равенства имеем, при $\tau \geqslant 0$

$$\int_\tau^\infty V_\pm(x)\,dx = \int_\tau^\infty K_\pm(x)\,dx + \int_\tau^\infty K_\pm(x)\,dx \int_0^{x-\tau} \Phi_\mp(t)\,dt, \qquad (44)$$

---

* Рецензент настоящей работы отметил, что условие (43) существования локально интегрируемого решения уравнения (1), (2) содержалось в сообщении А. Б. Нерсесяна на семинаре проф. М. М. Джрбашяна в ЕрГУ в декабре 1979 г и предложил указать на это.

откуда, с учетом (8) и свойства $S_\pm \uparrow$ по x, имеем

$$\int_\tau^\infty V_\pm(x)\,dx \leqslant \int_\tau^\infty K_\pm(x)\,S_\mp(x)\,dx. \tag{45}$$

Умножая (45) на $\tau^{\lambda-2}$ и интегрируя от 0 до ∞, с учетом оценок (9) и соотношений

$$\int_0^\infty \tau^{\lambda-2}\,d\tau \int_\tau^\infty V_\pm(x)\,dx = \int_0^\infty V_\pm(x)\,dx \int_0^x \tau^{\lambda-2}\,d\tau = \frac{1}{\lambda-1}\, m_{\lambda-1}(V_\pm),$$

$$\int_0^\infty \tau^{\lambda-2}\,d\tau \int_\tau^\infty x^p K_\pm(x)\,dx = \frac{1}{\lambda-1}\, m_{\lambda-1+p}(K_\pm),\ p=1,\,2,$$

получаем

$$m_{\lambda-1}(V_\pm) < +\infty. ▶$$

Замечание. Если в равенстве (44) взять $\tau=0$, то с учетом (8) получаем

$$\gamma_\pm = (K_\pm,\ S_\mp) = \int_0^\infty K_\pm(x)\,S_\mp(x)\,dx \leqslant 1.$$

Этим фактом мы пользовались выше.

В лемме 1 было доказано, что при $m_1(|g|) < +\infty$, $\varphi \in L_1^+$. Обобщая этот результат, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть в уравнении* (1), (2) $\gamma_- = 1$, $\gamma_+ < 1$ *или* $\exists \nu$, $\nu < 0$), $0 \leqslant g \in L_1^+$,

$$m_p(g) < +\infty,\ \mu_p^+ = m_p(K_+) < +\infty, \text{ где } 1 < p \in N. \tag{46}$$

Тогда для решения f уравнения (1), (2)

$$m_{p-1}(f) < +\infty. \tag{47}$$

Доказательство. Интегрируя равенство (14) от $\tau > 0$ до ∞, с учетом равенства (8), аналогично (45) получаем

$$\int_\tau^\infty \varphi(x)\,dx \leqslant \int_\tau^\infty g(x)\,S_-(x)\,dx.$$

По аналогии с доказательством леммы 2 можно показать, что при условии (46)

$$m_{p-1}(\varphi) < +\infty. \tag{48}$$

Из указанной леммы следует также

$$m_{p-1}(V_+) < +\infty, \tag{49}$$

при условии (46).

Покажем, что при условиях $\gamma_+<1$, (48) и (49) справедливо утверждение (47) теоремы. Доказательство проведем по индукции.

Пусть $m_{j-1}(f)<+\infty$ при $j\leqslant p-1$. Покажем, что из этого вытекает, что $m_j(f)<+\infty$.

Нетрудно проверить справедливость неравенства

$$\int_0^A x^j f(x)\,dx\leqslant\int_0^A x^j\varphi(x)\,dx+\sum_{q=0}^{j}C_j^q\int_0^A x^q f(x)\,dx\cdot\int_0^A t^{j-q}V_+(t)\,dt$$

для $0<A<+\infty$, откуда с учетом $\gamma_+<1$ следует

$$\int_0^A x^j f(x)\,dx\leqslant\left[m_j(\varphi)+\sum_{q=0}^{j-1}C_j^q\,m_q(f)\,m_{j-q}(V_+)\right](1-\gamma_+)^{-1},$$

что влечет за собой $m_j(f)<+\infty$. ▶

Теорема 4. *Пусть в уравнении* (1), (2) $0\leqslant g\in L_1^+$, $\gamma_-=1$, $\gamma_+<1$, (*или* $\exists\,\nu$, $\nu<0$); $(g, S_-)<+\infty$, K, $g\downarrow$ *на* $[\alpha,\infty)$, $\alpha>0$.

Тогда а) *из* $g\in C[0,\infty)$ *следует* $f\in C[0,\infty)$;

б) *из* $g\in \mathrm{Lip}^1[0,\infty)$, $K_+\in M^+$ *следует* $f\in\mathrm{Lip}^1[0,\infty)$,

в) *из* $\overset{\infty}{\underset{0}{\vee}}\,g<+\infty$ *следует* $\overset{\infty}{\underset{0}{\vee}}\,f<+\infty$.

Доказательство. Очевидно, из условий теоремы следует $g\in M^+$, а из леммы 1 при вышеуказанных условиях вытекает существование решения φ уравнения (34), причем $\varphi\in L_1^+$.

Введем обозначения

$$r=\inf\{x;\ x>\eta,\ V_-(x)\leqslant 1\},\quad \rho=\int_r^\infty K_-(x)\,dx. \tag{50}$$

Существование r следует из монотонности $K_-(x)$, а следовательно, и V_- (см. [11]).

Равенство (13) можно представить в виде

$$\varphi_{n+1}(x)=g(x)+\int_0^r V_-(t)\,\varphi_n(x+t)\,dt+\int_r^\infty V_-(t)\,\varphi_n(x+t)\,dt. \tag{51}$$

Учитывая, что $\varphi_n\in M^+$ при $g\in M^+$, $\varphi_n\uparrow$ по n при g, $K\geqslant 0$, а также (50) и оценку

$$\int_\tau^\infty \varphi_n(x)\,dx\leqslant\|\varphi\|_{L_1^+}\equiv C\quad\text{при}\quad \tau\geqslant 0,$$

из соотношения (51) при $x\in[0,\infty)$ получаем

$$|\varphi_n(x)|\leqslant\operatorname*{supess}_{x>0} g+C+\operatorname*{supess}_{x>0}\varphi_n\cdot\int_0^r V_-(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда имеем

$$|\varphi_n(x)| \leqslant (\operatorname*{supess}_{x>0} g + C)\,\rho^{-1} \equiv R_1. \tag{52}$$

Из равенства (51) при $\varphi_n \downarrow$ на $[\alpha, \infty)$, что следует из условия $g \downarrow$ на $[\alpha, \infty)$, получаем

$$\omega(\delta, \varphi_{n+1}) \leqslant \omega(\delta, g) + \int_0^r V_-(t)\,\omega(\delta, \varphi_n)\,dt + \delta R_1, \tag{53}$$

где $\omega(\delta, F)$ — модуль непрерывности функции F, а R_1 определяется из (52).

Из соотношения (53) по индукции проверяется оценка

$$\omega(\delta, \varphi_n) \leqslant [\omega(\delta, g) + \delta R_1]\,\rho^{-1}. \tag{54}$$

С учетом $\varphi_n \uparrow$ по n, оценок (52) и (54), из теоремы Арцела следует равномерная сходимость φ_n на $[\alpha, \infty)$. Нетрудно проверить, что $\varphi \in M^+ \cap C^+$. Из [12] имеем, что при $V_+ \in L_1^+$ и $\varphi \in M^+ \cap C^+$ решение f уравнения (35) принадлежит C^+, что доказывает утверждение а) теоремы.

Подобными рассуждениями из (51) получаем

$$L(\varphi_n) \leqslant [L(g) + R_1]\,\rho^{-1}, \tag{55}$$

где $L(F)$ — постоянная Липшица функции F, поэтому и в данном случае для последовательности $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ выполняются условия теоремы Арцела. В пределе при $n \to \infty$ из (55) получаем

$$L(\varphi) \leqslant [L(g) + R_1]\,\rho^{-1}. \tag{56}$$

Из оценки (56) и монотонности φ следует $\varphi \in M^+$.

Рассмотрим последовательность, определяемую равенством

$$f_{n+1}(x) = \varphi(x) + \int_0^x V_+(x-t)\,f_n(t)\,dt, \quad f_0 = 0. \tag{57}$$

Нетрудно проверить, что при φ, $V_+ > 0$, $f_n \uparrow$ по n.

Также легко с учетом $\gamma_+ = \|V_+\|_{L_1^+} < 1$ и φ, $K \in M^+$ проверяются оценки

$$f_n(x) \leqslant (1 - \gamma_+)^{-1} \operatorname*{supess}_{x>0} \varphi \equiv R_2, \tag{58}$$

$$V_+(x) \leqslant (1 + \operatorname*{supess}_{x>0} K_+)\,\rho^{-1} \equiv R_3. \tag{59}$$

Из равенства (57) с учетом (58) и (59) получаем

$$|f_{n+1}(x+\delta) - f_{n+1}(x)| < L(\varphi)\,\delta + \gamma_+ L(f_n)\,\delta + R_2 R_3\,\delta,$$

откуда имеем

$$L(f_n) \leqslant [L(\varphi) + R_2 R_3]\,(1 - \gamma_+)^{-1}. \tag{60}$$

В пределе при $n \to \infty$ получаем $f \in \mathrm{Lip}^1[0, \infty)$, что доказывает второе утверждение теоремы.

Из равенства (51) следует также, что

$$\overset{-}{\underset{0}{\bigvee}} \varphi_n \leqslant \left(\overset{-}{\underset{0}{\bigvee}} g + \|\varphi\|_{L_1^+} \right) \rho^{-1}. \tag{61}$$

Учитывая оценки (52) и (61) и условие $\varphi_n \uparrow$ по n из теоремы Хелли [13] вытекает $\overset{-}{\underset{0}{\bigvee}} \varphi < +\infty$. Аналогично (60), из соотношения (57) легко получить оценку

$$\overset{-}{\underset{0}{\bigvee}} f_n \leqslant \left(\overset{-}{\underset{0}{\bigvee}} \varphi + R_3 \gamma_+ \right)(1-\gamma_+)^{-1}, \tag{62}$$

где R_3 определена из (59). С учетом $f_n \uparrow$ по n, оценок (58) и (62), из вышеуказанной теоремы Хелли следует, что $\overset{-}{\underset{0}{\bigvee}} f < +\infty$.▶

В заключение выражаю глубокую благодарность Н. Б. Енгибаряну за постоянное внимание к работе и ценные указания.

Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна

Поступила 15.II.1980

Լ. Գ. ԱՐԱԲԱՋՅԱՆ. Վիներ-Հոպֆի կոնսերվատիվ հավասարման մասին (*ամփոփում*)

Հոդվածում ուսումնասիրված է Վիներ-Հոպֆի

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t) f(t)\, dt$$

հավասարումը կոնսերվատիվ դեպքում՝

$$\left(K \geqslant 0, \int_{-\infty}^{\infty} K(x)\, dx = 1 \right):$$

Ապացուցվում է, որ երբ $g \in L_1$ *հավասարումը ունի լոկալ ինտեգրելի լուծում, լրացուցիչ՝*

$$m_1(|g|) = \int_0^\infty x\, |g(x)|\, dx < +\infty \tag{*}$$

պայմանի դեպքում

$$\int_0^x f(t)\, dt = O(x), \quad x \to \infty:$$

Եթե $\int_{-\infty}^{\infty} x K(x)\, dx < 0$ և $m_1(|g|) < +\infty$, ապա $f \in L_1^+$:

L. G. ARABADGIAN. *On Wiener-Hopf integral equation* (summary)

In this paper the Wiener-Hopf integral equation in conservative case is considered. The existence of local integrable solution f is proved when $g \in L_1$. It is proved that if

$$m_1(|g|) = \int_0^\infty x\,|g(x)|\,dx < +\infty \quad \text{and} \quad \int_{-\infty}^\infty xK(x)\,dx < 0$$

then $f \in L_1(0, \infty)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E. Hopf*. Mathematical problems of radiative equilibrium, Cambridge Tracts, 31, 1934.
2. *В. А. Амбарцумян*. Научные труды, том I, Ереван, 1960.
3. *М. Г. Крейн*. Интегральные уравнения на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН, 13:5, 1958, 3—120.
4. *В. А. Фок*. О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Мат. сб., 14, 1—3, 1944, 3—50.
5. *D. V. Lindley*. The theory of quenes with a single server, Proc. Cambr. Phil. Soc., vol. 48, 1952.
6. *F. Spitzer*. The Wiener-Hopf equation whose kernel is a probability density, Duke. Math. J., 24, 1957.
7. *В. В. Соболев*. Курс теоретической астрофизики, М., «Наука», 1967.
8. *Н. Б. Енгибарян, А. А. Арутюнян*. Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения, Мат. сб., 97 (139), 1 (5), 1975.
9. *М. Г. Крейн*. О нелинейных интегральных уравнениях, играющих роль в теории уравнений Винера—Хопфа, «Мат. исследования», вып. 46, Кишинев, 1977.
10. *З. Пресдорф*. Некоторые классы сингулярных уравнений, «Мир», М., 1979.
11. *Н. Б. Енгибарян, Л. Г. Арабаджян*. О нелинейных уравнениях факторизации операторов Винера—Хопфа, Препринт НИИ ФКС ЕрГУ, 1979.
12. *Р. Беллман, К. Кук*. Дифференциально-разностные уравнения, «Мир», М., 1967.
13. *И. П. Натансон*. Теория функций вещественной переменной, «Наука», М., 1967.