

А. А. ШАГИНЯН

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ МАРЦИНКЕВИЧА—ЗИГМУНДА

§ 1. Введение

Мы будем пользоваться следующими обозначениями: $S(E)$ — совокупность всех измеримых функций, определенных п. в. (почти всюду) на множестве E , которые принимают лишь конечные значения п. в. на E ; $\bar{S}(E)$ — совокупность всех измеримых функций, определенных п. в. на E , которые могут принимать также бесконечные значения определенных знаков на подмножествах E положительной меры.

Далее обозначим через $\{(C, 1), f, E\}$ множество всевозможных рядов вида

$$\Omega \sim \sum_{i=1}^{\infty} u_i(x), \quad u_i(x) \in S(E), \quad i = 1, 2, \dots,$$

которые суммируются методом $(C, 1)$ к $f(x) \in S(E)$ п. в. на E , где $|E| = \text{mes } E > 0$.

Кроме того, скажем, что ряд Ω колеблется симметрично вокруг функции $f(x) \in S(E)$ п. в. на E , если любая подпоследовательность $S_{n_l}(\Omega, x)$ частичных сумм ряда Ω колеблется симметрично вокруг $f(x)$ п. в. на E , а именно: если

$$\underline{S}(\Omega, n_l, x) = \lim_{l \rightarrow \infty} S_{n_l}(\Omega, x) > -\infty \quad \text{на } E,$$

то

$$\bar{S}(\Omega, n_l, x) = \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} S_{n_l}(\Omega, x) < +\infty \quad \text{п. в. на } E,$$

и вместе с тем

$$f(x) = \frac{1}{2} [\underline{S}(\Omega, n_l, x) + \bar{S}(\Omega, n_l, x)] \quad \text{п. в. на } E.$$

Теорема А (Марцинкевич—Зигмунд). Тригонометрические ряды вида

$$\Omega \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

принадлежащие классу $\{(C, 1), f; E\}$, колеблются симметрично вокруг $f(x)$ п. в. на E^* .

* См. [1], стр. 264, где доказывается симметричное колебание последовательности $S_{n_l}(\Omega, x)$ частичных сумм ряда Ω , но, как нетрудно убедиться, то же самое доказательство обеспечивает также симметричное колебание любой подпоследовательности $S_{n_l}(\Omega, x)$. По этому поводу см. также [1], стр. 256.

Вместе с тем, согласно известным теоремам Зигмунда и Колмогорова (см. [2], стр. 325, 326), если $\{k_n\}$ лакунарна, то из принадлежности ряда

$$\Omega \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos k_n x + b_n \sin k_n x \quad (k_1 < k_2 < \dots) \quad (1)$$

классу $\{(C, 1), f, E\}$, $|E| > 0$, в частности, следует сходимость ряда Ω к $f(x)$ п.в. на E .

Таким образом, в двух крайних случаях, когда последовательность $\{k_n\}$ совпадает с натуральным рядом или является достаточно редкой, тригонометрические ряды вида (1) из класса $\{(C, 1), f, E\}$ обладают хорошим поведением—колеблются симметрично вокруг $f(x)$ п.в. на E .

Естественно возникает вопрос: как обстоит дело в случае рядов вида (1), когда $\{k_n\}$ отлична от вышеописанных.

В настоящей статье показывается, что теорема А допускает обобщение, т. е. распространяется на ряды вида (1) для определенных классов последовательностей $\{k_n\}$, например, когда $\{k_n\}$ имеет вид $n \cdot \nu^m$, $\nu = 1, 2, \dots$, где $n \geq 1$ и $m \geq 1$ — произвольные натуральные числа. Вместе с тем доказывается, что, вообще говоря, ряды вида (1) не обязаны колебаться симметрично вокруг какой-либо функции на множествах положительной меры, если даже от них потребовать гораздо большего, а именно, $(C, \alpha > 0)$ суммируемости к конечной функции п.в. для всех $\alpha > 0$.

Теорема 1. Пусть $\{k_n\} = \{k_1 < k_2 < \dots\}$ — некоторая последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

$$1 - \frac{k_n}{k_{n+1}} = O\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad \frac{1}{k_n} \sum_{\nu=1}^{n-2} \nu |2k_{\nu+1} - k_{\nu+2} - k_\nu| = O(1). \quad (2)$$

Тогда из принадлежности ряда (1) множеству $\{(C, 1), f, E\}$ следует симметричное колебание ряда (1) вокруг $f(x)$ п.в. на E . В частности, если ряд

$$\Omega \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \cdot \nu^m x + b_n \sin n \cdot \nu^m x,$$

где $n \geq 1$ и $m \geq 1$ — какие-либо натуральные числа, принадлежит $\{(C, 1), f, E\}$ классу, то Ω колеблется симметрично вокруг $f(x)$ п.в. на E .

Теорема 2. Для произвольной функции $f(x) \in \bar{S}(0, 2\pi)$ существует ряд Ω вида (1), обладающий следующими свойствами:

1) Ω суммируется к $f(x)$ п.в. на $(0, 2\pi)$ любым методом $(C, \alpha > 0)$;

2) для любой функции $F(x) \in S(0, 2\pi)$ некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда Ω сходится к $F(x)$ п.в. на $(0, 2\pi)$.

3) $\sum_{v=1}^{\infty} |a_v|^{2+\varepsilon} + |b_v|^{2+\varepsilon} < +\infty$ для любого $\varepsilon > 0$, где a_v, b_v — коэффициенты ряда Ω .

При этом можно добиться того, чтобы

4. $\sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{k_v} < +\infty$ и $\{k_v\}$ имела плотность нуль.

Ввиду приведенных утверждений естественно возникает следующая, на наш взгляд, интересная и по-видимому достаточно сложная задача: в тех или иных терминах охарактеризовать те последовательности $\{k_v\}$, для которых тригонометрические ряды вида (1) из класса $\{(C, 1), f, E\}$ обязаны колебаться симметрично вокруг $f(x)$ п.в. на E .

Представляется интересным и следующая более частная задача: для заданного $\gamma \in [0, 1]$ существует ли последовательность $\{k_v\}$ плотности γ , для которого ряды вида (1) из класса $\{(C, 1), f, E\}$ обязаны колебаться симметрично вокруг $f(x)$ п.в. на E .

Из теоремы 1 непосредственно следует, что эта задача имеет положительное решение для любого

$$\gamma \in \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, 0\right\}.$$

Теорема 2 получается из следующего более общего утверждения. Обозначим через $\{T\}'$ — класс всех линейных вполне регулярных методов суммирований, высота строк матриц которых стремится к нулю (см. стр. 58).

Теорема 3. Для произвольной последовательности $\{T_i\}$ методов суммирований из класса $\{T\}'$ и для произвольной функции $f(x) \in \bar{S}(0, 2\pi)$ существует ряд Ω вида (1), который суммируется к $f(x)$ п.в. на $(0, 2\pi)$ всеми методами $\{T_i\}$ и вместе с тем обладает свойствами 2 — 4 теоремы 2.

Отметим, что ряд, существование которого утверждается этой теоремой, в определенном смысле является контрпримером для вышеупомянутой теоремы Зигмунда о лакунарных тригонометрических рядах (см. [2], стр. 526). Отметим также, что теорема 3 доказывается в основном по схеме работы [3].

Наконец, точные аналоги приведенных утверждений доказываются и для рядов по системе Уолша*.

§ 2. Необходимые леммы и доказательства теорем

Теорема 1 является непосредственным следствием теоремы А и следующего утверждения о числовых рядах, которое мы сформулируем в виде леммы.

* Относительно аналога теоремы А для рядов по системе Уолша см. [4].

Пусть имеем некоторый числовой ряд

$$\Omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

где $a_k = 0$, если $k \notin \{k_l\}$ для некоторой последовательности натуральных чисел $\{k_1 < k_2 < \dots\}$.

Положим

$$\bar{\Omega} \sim \sum_{l=1}^{\infty} a_{k_l}, \quad \bar{S}_n = \sum_{l=1}^n a_{k_l}, \quad \bar{\sigma}_n = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \bar{S}_v,$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad \sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{v=1}^n S_v.$$

Лемма 1. Если последовательность $\{k_l\} = \{k_1 < k_2 < \dots\}$ удовлетворяет условиям (2), то из $(C, 1)$ -суммируемости ряда $\bar{\Omega}$ к конечному числу S следует $(C, 1)$ -суммируемость ряда Ω к той же сумме S .

Доказательство. Имеем

$$\bar{S}_n = n \bar{\sigma}_n - (n-1) \bar{\sigma}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$S_j = \bar{S}_l, \quad \text{если } k_l \leq j < k_{l+1}, \quad l = 1, 2, \dots.$$

Следовательно для $k_n \leq j < k_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_j &= \frac{1}{j} \sum_{v=1}^j S_v = \frac{1}{j} \sum_{v=2}^n (k_v - k_{v-1}) \bar{S}_{v-1} + \frac{1}{j} (j - k_n) \bar{S}_n = \\ &= \frac{1}{j} \sum_{v=2}^n (k_v - k_{v-1}) [(v-1) \bar{\sigma}_{v-1} - (v-2) \bar{\sigma}_{v-2}] + \frac{j - k_n}{j} [n \bar{\sigma}_n - (n-1) \bar{\sigma}_{n-1}] = \\ &= \frac{1}{j} \sum_{v=1}^{n-2} (2k_{v+1} - k_{v+2} - k_v) v \bar{\sigma}_v + \frac{2k_n - k_{n-1} - j}{j} \times \\ &\quad \times (n-1) \bar{\sigma}_{n-1} + \frac{j - k_n}{j} n \bar{\sigma}_n. \end{aligned} \quad (3)$$

Обозначим матрицу перехода от последовательности $\{\bar{\sigma}_j\}$ к последовательности $\{\sigma_j\}$ через $[a_{jv}]$. Из (3) следует

$$\begin{aligned} \sum_{v=1}^n a_{jv} &= \frac{1}{j} \sum_{v=1}^{n-2} (2k_{v+1} - k_{v+2} - k_v) v + \frac{n-1}{j} (2k_n - k_{n-1} - j) + \\ &+ \frac{j - k_n}{j} n = \frac{1}{j} \{ 2(n-2) k_{n-1} + (n-3) k_{n-1} - (n-2) k_n + \end{aligned}$$

$$+ 2(n-1) k_n - (n-1) k_{n-1} - (n-1) j + nj - k_n \cdot n \} = \frac{j}{j} = 1, \quad (4)$$

когда $k_n \leq j < k_{n+1}$ для любого $n \geq 1$.

Теперь учитывая (2) и (4) легко убедиться, что $|x_{jv}|$ является регулярной матрицей. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 3. Предварительно введем следующее определение и сформулируем необходимые леммы.

Определение. Пусть $\Phi = \{\Phi_n(x)\}_1^\infty$ — ограниченные в совокупности функции, определенные на некотором интервале (a, b) . Скажем, что система Φ удовлетворяет условиям (K') на (a, b) , если для произвольных функций $f(x)$, $F(x) \in S(a, b)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $p = p(f, F, \varepsilon)$ такое, что для любого натурального N существует тригонометрический полином вида

$$P(x) = P(f, F, \varepsilon, x) = \sum_{k=1}^p c_k \Phi_{n_k}(x) \quad (n_1 < n_2 < \dots),$$

обладающий следующими свойствами:

$$K'. 1. n_1 > N;$$

$$K'. 2. \sum_{k=1}^p |c_k|^{2+\varepsilon} < 2\varepsilon;$$

$$K'. 3. \text{mes} \{x: |f(x) - P(x)| > \varepsilon\} < \varepsilon;$$

$$K'. 4. \text{mes} \left\{ x: \left| F(x) - \sum_{k=1}^q c_k \Phi_{n_k}(x) \right| > \varepsilon \right\} < \varepsilon$$

для некоторого $q \in (1, p)$.

Тот факт, что p не зависит от N , мы будем называть условием $K'. 5$.

Лемма 2. Тригонометрическая система

$$\{1, \cos x; \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$$

удовлетворяет условиям (K') на $(0, 2\pi)$.

Лемма 3. Система Уолша $\{W_n(x)\}$ удовлетворяет условиям (K') на $(0, 1)$.

Эти леммы непосредственно следуют, соответственно, из лемм 1 и 2 работы [3].

Пусть T — некоторый метод из класса $\{T\}'$ с матрицей $\{t_{ij}\}$, где i — индекс строк, а j — индекс столбцов. Тогда, согласно определению класса $\{T\}'$, имеют место

$$T. 1. t_{ij} \geq 0; i, j = 1, 2, \dots;$$

$$T. 2. \lim_{i \rightarrow \infty} t_{ij} = 0; j = 1, 2, \dots;$$

$$T. 3. \lim_{i \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} t_{ij} = 1;$$

$$T. 4. \lim_{i \rightarrow \infty} \sup_j \{t_{ij}\} = 0.$$

Замечание. 1) Если какая-либо числовая последовательность $\{s_j\}$ сходится к конечному или бесконечному пределу s , то $\{s_j\}$ суммируется к s любым методом T , матрица которого удовлетворяет условиям $T.1—T.3$ (см. 2, стр. 126). 2) Нетрудно убедиться, что методы $(C, \alpha > 0)$ принадлежат классу $\{T\}'$ (см. [5]).

Далее, пусть

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, |a_i| \leq 1, i=1, 2, \dots \quad (5)$$

—некоторый числовой ряд и $\{n_k\}, \{p_k\}$ —две последовательности натуральных чисел, удовлетворяющие условию

$$a_i = 0, \text{ если } \sum_{j=0}^k (n_j + p_j) + 1 \leq i \leq \sum_{j=0}^k (n_j + p_j) + n_{k+1}, \quad (6)$$

где $n_0 = p_0 = 0$.

Положим

$$r_k = \sum_{j=1}^k (p_j + n_j), \quad s_k = \sum_{i=1}^k a_i.$$

Имеет место

Лемма 4 ([3]). Пусть $\{T_l\}$ —некоторая последовательность методов суммирований из класса $\{T\}'$, ряд (5) удовлетворяет условиям (6) и вместе с тем

$$\left(1 + \sum_{\mu=1}^{k+1} p_{\mu}\right) \sum_{j=r_k+n_{k+1}+1}^{r_{k+1}} t_{ij}^{(l)} \leq \frac{1}{2^k}$$

для $i=1, 2, \dots; k=1, 2, \dots; l=1, 2, \dots, k$, где $\|t_{ij}^{(l)}\|$ —матрица метода T_l . Тогда, если

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{r_k} = s$$

(s может равняться также $\pm \infty$), то ряд (5) суммируется к s любым методом $T_l, l=1, 2, \dots$.

Мы будем доказывать следующую теорему, из которой, в силу лемм 2 и 3, непосредственно получаются теорема 3 и точный аналог последней для рядов по системе Уолша.

Теорема 4. Пусть последовательность функций $\{|\Phi(x)| \leq 1\}_n^{\infty}$ удовлетворяет условиям (K') на (a, b) , а $\{T_l\}_1^{\infty}$ —произвольная последовательность методов суммирований из класса $\{T\}'$. Тогда для произвольной функции $f(x) \in \bar{S}(a, b)$ существует ряд

$$\Omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_{v_k}(x) \quad (v_1 < v_2 < \dots),$$

обладающий следующими свойствами:

1) ряд Ω суммируется к $f(x)$ п.в. на (a, b) любым методом T_l , $l = 1, 2, \dots$;

2) для любой функции $F(x) \in \bar{S}(a, b)$ некоторая подпоследовательность частичных сумм ряда Ω сходится к $F(x)$ п.в. на (a, b) ;

$$3) \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^{2+\varepsilon} < +\infty \text{ для любого } \varepsilon > 0;$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k} < +\infty \text{ и } \{v_k\} \text{ имеет плотность нуль.}$$

Доказательство. Пусть $\{F_l(x)\}_1^\infty$ — совокупность всех ступенчатых функций, принимающих рациональные значения, интервалы постоянства которых имеют рациональные концы.

Зафиксируем какую-либо последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_k\}_1^\infty$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < 1. \quad (7)$$

Положим

$$E = \{x: x \in (a, b), |f(x)| < +\infty\},$$

$$E^+ = \{x: x \in (a, b), f(x) = +\infty\},$$

$$E^- = \{x: x \in (a, b), f(x) = -\infty\}.$$

Теперь, исходя из того, что последовательность $\{\Phi_l(x)\}_1^\infty$ удовлетворяет условиям $K'.1 - K'.5$ на (a, b) , определим последовательности натуральных чисел $\{p_k\}_1^\infty$, $\{n_k\}_1^\infty$, $\{m_k\}_1^\infty$, $\{q_k\}_1^\infty$ функций $\{f_k(x)\}_1^\infty$ и тригонометрических полиномов $\{Q_k(x)\}_1^\infty$ вида

$$Q_k(x) = \sum_{l=m_k}^{m_k+n_k-1} b_l \Phi_l(x) + \sum_{l=m_k+n_k}^{m_k+n_k+p_k} b_l \Phi_{v_l}(x),$$

удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) \quad b_i = 0, \quad i \in [m_k, m_k + n_k - 1], \quad k = 1, 2, \dots; \quad (8)$$

$$2) \quad \left(1 + \sum_{\mu=1}^k p_\mu\right) \sum_{j=r_{k-1}+n_k+1}^{r_k} t_{ij}^{(l)} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad l = 0, 1, \dots, k-1; \quad (9)$$

$$\text{где } r_k = \sum_{j=1}^k (p_j + n_j);$$

$$3) \quad \left. \begin{aligned} v_{m_k} + n_k + p_k &< m_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots; \\ i < v_i < v_{i+1}, \quad i = 1, 2, \dots; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$4) \quad \sum_{l=m_k}^{m_k+n_k+p_k} \frac{1}{i} \leq \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots; \quad (11)$$

$$5) \quad f_k(x) = \begin{cases} f(x) - \sum_{j=1}^{k-1} Q_j(x), & x \in E, \\ +1, & x \in E^+, \\ -1, & x \in E^-, \end{cases} \quad k=1, 2, \dots; \quad (12)$$

$$6) \quad \text{mes} \{x: |f_k(x) - Q_k(x)| > \varepsilon_k\} < \varepsilon_k, \quad k=1, 2, \dots; \quad (13)$$

$$7) \quad \text{mes} \left\{ x: \left| \sum_{j=1}^{k-1} Q_j(x) + \sum_{l=m_k}^{m_k+n_k-1} [b_l \Phi_l(x) + \sum_{i=m_k+n_k}^{q_k} b_i \Phi_{\nu_i}(x) - F_k(x)] \right| > \varepsilon_k \right\} < \varepsilon_k, \quad (14)$$

$$k=1, 2, \dots, m_k + n_k \leq q_k < m_k + n_k + p_k;$$

$$8) \quad \sum_{i=m_k}^{m_k+n_k+p_k} |b_i|^{2+\varepsilon_k} < 2\varepsilon_k, \quad k=1, 2, \dots. \quad (15)$$

Эти последовательности определяются следующим образом: положим

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ +1, & x \in E^+, \\ -1, & x \in E^- \end{cases}$$

и для $f_1(x)$, $F_1(x)$ и ε_1 воспользовавшись условиями $K'.1-K'.5$ определим натуральное число $p_1 = p_1(f_1, F_1, \varepsilon_1)$ и составим полином

$$Q_1(x) = \sum_{i=m_1}^{m_1+n_1-1} b_i \Phi_i(x) + \sum_{i=m_1+n_1}^{m_1+n_1+p_1} b_i \Phi_{\nu_i}(x),$$

где $b_i = 0$, $i \in [m_1, m_1+n_1)$, а n_1 и m_1 выбраны последовательно такими, чтобы имели место (9) и (11) для $k=1$ и вместе с тем выполнялись (13)–(15) для $k=1$.

Далее, положим

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x) - Q_1(x), & x \in E, \\ +1, & x \in E^+, \\ -1, & x \in E^- \end{cases}$$

и снова, воспользовавшись условиями $K'.1-K'.5$, для $f_2(x)$, $F_2(x) - Q_1(x)$ и ε_2 , определим натуральное число $p_2 = p_2(f_2, F_2 - Q_1, \varepsilon_2)$ и составим полином

$$Q_2(x) = \sum_{i=m_2}^{m_2+n_2-1} b_i \Phi_i(x) + \sum_{i=m_2+n_2}^{m_2+n_2+p_2} b_i \Phi_{\nu_i}(x),$$

где $b_i = 0$, $i \in [m_2, m_2+n_2)$, а n_2 и m_2 выбраны последовательно такими, чтобы имели место (9)–(11) для $k=2$ и вместе с тем выполнялись (13)–(15) для $k=2$.

Продолжая этот процесс, мы последовательно определим вышеупомянутые последовательности, удовлетворяющие условиям (8)–(15).

Теперь составим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \Phi_k(x), \quad (16)$$

полученный из ряда $\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x)$ раскрытием внутренних сумм. Из неравенств (10) сразу следует, что $v_k < v_{k+1}$ для всех $k \geq 1$.

Убедимся, что ряд (16) является искомым, т. е. удовлетворяет всем утверждениям теоремы 4.

Для этого сперва заметим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) \quad (17)$$

сходится к $f(x)$ п.в. на (a, b) .

Положим

$$H_k = \{x: |f_k(x) - Q_k(x)| \leq \varepsilon_k\}, \quad k=1, 2, \dots,$$

$$H = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (H_k \cap E),$$

$$H^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (H_k \cap E^+),$$

$$H^- = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} (H_k \cap E^-).$$

Из (13) сразу следует, что

$$\text{mes } H = \text{mes } E, \quad \text{mes } H^+ = \text{mes } E^+, \quad \text{mes } H^- = \text{mes } E^-. \quad (18)$$

Пусть теперь $x_0 \in H$, тогда $x_0 \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} (H_k \cap E)$ для некоторого $n_0 \geq 1$.

Отсюда, согласно (12) и (13) будем иметь

$$|f_k(x_0) - Q_k(x_0)| = \left| f(x_0) - \sum_{j=1}^k Q_j(x_0) \right| \leq \varepsilon_k$$

для всех $k \geq n_0$. Следовательно, в произвольной точке $x \in H$ и согласно (18) почти в каждой точке E ряд (17) сходится к $f(x)$.

Пусть теперь $x_0 \in H^+$, тогда

$$x_0 \in \bigcap_{k=n_0}^{\infty} (H_k \cap E^+)$$

для некоторого $n_0 \geq 1$. Отсюда, согласно (7), (12) и (13) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^k Q_j(x_0) &= \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + \sum_{j=n_0}^k Q_j(x_0) = \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + (k - n_0) + \\ &+ \sum_{j=n_0}^k [Q_j(x_0) - 1] \geq \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + (k - n_0) - \sum_{j=n_0}^k |Q_j(x_0) - f_j(x_0)| > \end{aligned}$$

$$> \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + (k - n_0) - \sum_{j=n_0}^k \varepsilon_j > \sum_{j=1}^{n_0-1} Q_j(x_0) + k - n_0 - 1.$$

Последнее выражение стремится к $+\infty$ вместе с k . Таким образом, в каждой точке H^+ и следовательно, согласно (18), почти всюду на множестве E^+ ряд (17) сходится к $f(x)$. Аналогично рассматривается и случай E^- . Итак, мы убедились, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) = f(x) \text{ п.в. на } (a, b). \quad (19)$$

Учитывая, что $|\Phi_\nu(x)| \leq 1$, $x \in (a, b)$, $\nu = 1, 2, \dots$ из соотношений (8) и (9) сразу получаем, что в каждой точке x_0 , где имеет место (19), ряд (16) удовлетворяет условиям леммы 4 и следовательно суммируется любым методом T_l , $l = 1, 2, \dots$ к $f(x_0)$. Таким образом, ряд (16) удовлетворяет первому утверждению теоремы 4.

Теперь возьмем произвольную функцию $F(x) \in \bar{S}(a, b)$ и пусть

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_{k_T}(x) = F(x) \text{ п.в. на } (a, b). \quad (20)$$

Рассмотрим частичные суммы ряда (16) вида

$$S_{k_T}(x) = \sum_{j=1}^{k-1} Q_j(x) + \sum_{j=m_{k_T}}^{m_{k_T}+n_{k_T}-1} b_l \Phi_l(x) + \sum_{j=m_{k_T}+n_{k_T}}^{q_{k_T}} b_l \Phi_{\nu_l}(x).$$

Из соотношений (14) и (20) следует, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} S_{k_T}(x) = F(x) \text{ п.в. на } (a, b).$$

Убедимся, что ряд (16) удовлетворяет также остальным утверждениям теоремы 4. Действительно, для произвольного $\varepsilon > 0$ согласно (7) найдется k_0 такое, что $\varepsilon_k < \varepsilon$ при $k \geq k_0$. Следовательно, из (7) и (15) получаем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} |b_l|^{2+\varepsilon} &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=m_k+n_k}^{m_k+n_{k+1}-1} |b_l|^{2+\varepsilon} \leq \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_l |b_l|^{2+\varepsilon} + \\ &+ \sum_{k=k_0}^{\infty} \sum_l |b_l|^{2+\varepsilon} < \sum_{k=1}^{k_0-1} \sum_l |b_l|^{2+\varepsilon} + \sum_{k=k_0}^{\infty} 2\varepsilon_k < +\infty. \end{aligned}$$

Вместе с тем из (10) сразу следует

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\nu_l} < +\infty.$$

Остается заметить, что при построении ряда (17) нетрудно было бы проследить за тем, чтобы последовательность $\{\nu_k\}$ имела плотность нуль. Теорема 4 доказана.

Լ. Ա. ՇԱՀԻՆՅԱՆ. Մաքցիեկեյի և Զիգմունդի պատկանող մի բնորոշ մասին (ամփոփում)

Ուսումնասիրվում է $\Omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k_1 x + b_k \sin k_1 x$ ($k_1 < k_2 < \dots$) տեսքի շարքերի մաս-

նական զամարների վարքը E դրական չափ ունեցող բազմաթյունների վրա, երբ $\Omega \sim (C, 1)$ եղանակով հանրազամարվում է վերջավոր ֆունկցիայի E -ի վրա:

L. A. SHAHINIAN. *On a theorem of Marcinkewicz-Zygmund* (summary)

In this note, we consider the behaviour of partial sums for series of the type

$$\Omega \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos n_k x + b_k \sin n_k x \quad (n_1 < n_2 < \dots),$$

where Ω is summable $(C, 1)$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. II, М., ИЛ, 1965.
2. А. Зигмунд. Тригонометрические ряды, т. I, М., ИЛ, 1965.
3. Л. А. Шагинян. О суммируемости и бесконечности тригонометрических рядов и рядов по системе Уолша, Мат. сб., 108 (150), № 3, 1979, 457—470.
4. Л. А. Шагинян. О пределах неопределенности и о множестве предельных функций рядов по системе Уолша, Мат. сб. 95 (137), № 2 (10), 1974, 263—271.
5. Д. Е. Меньшов. Sur la convergence et la summation des séries de fonctions orthogonales, Bull. Soc. Math. France, 64, 1936, 147—170.