Р. АБ. АВЕТИСЯН

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
 РЯДАМИ ПРОСТЫХ ДРОБЕЙ В ЗАМКНУТОМ КРУГЕ

1°. Вопрос о разложении аналитических функций в ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z}$$

с определенными ограничениями на последовательность полюсов ζ_k и коэффициентов A_k изучался в ряде работ. Вольф в 1920 году ([1], см. также [2], стр. 35) доказал следующую теорему.

Теорема. Пусть G — ограниченная жорданова область, и пусть f аналитична в замкнутой области $\bar{G}$. Тогда f может быть разложена в G в ряд вида

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z}, \quad \zeta_k \in \bar{G}, \quad (1)$$

где

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty.$$

Очевидно, что условие $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$ обеспечивает равномерную сходимость ряда (1) на компактах области G .

Данжуа [3] усилил этот результат, показав, что в условиях теоремы Вольфа ряд (1) можно построить так, чтобы он равномерно сходился в G , а коэффициенты A_k удовлетворяли неравенствам

$$|A_k| < C \exp(-K^{1/2-\varepsilon_k}), \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0.$$

С другой стороны, А. А. Гончар [4] показал, что коэффициенты A_k нельзя выбрать таким образом, чтобы они удовлетворяли неравенствам

$$|A_k| < C \exp(-k^{1-\varepsilon_k}), \quad \varepsilon_k = O\left(\frac{1}{\ln k}\right).$$

В определенном смысле окончательный результат был получен Т. А. Леонтьевой [5]. Она показала, что коэффициенты A_k в теореме Вольфа—Данжуа можно выбрать так, чтобы

$$|A_k| < C \exp(-k^{1-\varepsilon_k}), \quad \varepsilon_k = O\left(\frac{\ln \ln k}{\ln k}\right).$$

Вопрос о разложении в ряды вида (1) более широких классов аналитических функций был впервые изучен в работе Т. А. Леонтьевой [6]. В ней показано, что аналитическая внутри единичного круга

$D = \{z, |z| < 1\}$ функция $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ представима в D в виде ряда

(1), если $a_k = O(k^{-p})$, $p > 1$ и ряд (1) сходится равномерно в $\bar{D}$, если $a_k = O(k^{-p})$, $p > 2$. Для коэффициентов A_k показано, что при $p > 1$ они удовлетворяют неравенствам

$$|A_k| < \frac{c}{K^{p-1-\varepsilon}},$$

где ε — произвольное положительное число.

Задача о разложении функции f в виде ряда (1) в зависимости от ее гладкости была исследована в работе автора [7].

В настоящей статье рассматривается вопрос о разложении в виде (1) функций, аналитических в D и непрерывных в $\bar{D}$. Показывается, что разложение f в виде ряда (1) и оценка коэффициентов A_k зависят от модуля непрерывности f на ∂D . Это позволяет выделить новые классы функций, представимые в $\bar{D}$ в виде (1). Для доказательства основных результатов введем сначала соответствующие обозначения.

Пусть $D_k = \{z, |z| < R\}$. Обозначим через $A(\bar{D}_k)$ множество функций, аналитических в D_k и непрерывных в $\bar{D}_k$. В дальнейшем, в случае $R = 1$, $A(D_1)$ будем обозначать через A , а D_1 через D .

Пусть $f \in A$, через $\omega(f, \delta)$ обозначим модуль непрерывности f на ∂D , т. е.

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|\theta_1 - \theta_2| < \delta} |f(e^{i\theta_1}) - f(e^{i\theta_2})|.$$

Нам также понадобятся частные случаи теоремы Джексона ([8], стр. 231), неравенства Бернштейна ([2], стр. 101).

Теорема Джексона. Пусть $f \in A$. Если $P_n(z)$ — полином наилучшего приближения функции f степени n , то при $z \in \bar{D}$

$$|f(z) - P_n(z)| < \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \quad (2)$$

Неравенство Бернштейна. Пусть имеем полином $P_n(z)$ степени n . Тогда при $z \in \bar{D}_k$, $R > 1$ имеет место неравенство

$$|P_n(z)| \leq \max_{\xi \in \bar{D}} |P_n(\xi)| \cdot R^n. \quad (3)$$

2°. В данной работе доказана следующая основная

Теорема 1. Пусть $f \in A$. Если $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega(f, \delta) \cdot \log \frac{1}{\delta} = 0$, то f разлагается в $\bar{D}$ в ряд вида (1) и при $z \in \bar{D}$ имеют место неравенства

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{\zeta_k - z} \right| < c_1(f) \omega\left(f, \frac{1}{n}\right) \log n,$$

а коэффициенты A_k имеют оценку

$$|A_k| < c_2(f) \frac{\omega(f, k^{-1})}{k},$$

где постоянные $c_1(f)$ и $c_2(f)$ зависят только от f .

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится

Лемма 1. Пусть $f \in A(\bar{D}_R)$, $R > 1$. При $z \in D_R$ обозначим

$$\Phi_n(f, R, z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z},$$

где n — целое и $n > 8\pi R ((R-1)^{-1})$, $\zeta_k = R e^{\frac{2\pi i k}{n}}$

$$\gamma_k = \left\{ \zeta, |\zeta| = R, \frac{2\pi(k-1)}{n} < \arg \zeta < \frac{2\pi k}{n} \right\}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда при $z \in \bar{D}_{1+(R-1)^{-1}}$ имеет место неравенство

$$|f(z) - \Phi_n(f, R, z)| < \max_{\zeta \in \bar{D}} |f(\zeta)| \cdot \frac{8\pi R}{n(R-1)}.$$

Доказательство. Функция f в D_k представляется по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

При $z \in \bar{D}_{1+(R-1)^{-1}}$ и $\zeta \in \gamma_k$ имеет место оценка

$$|\zeta_k - z| > |\zeta - z| - |\zeta_k - \zeta| > |\zeta - z| - \frac{R-1}{4} > \frac{|\zeta - z|}{2}.$$

Учитывая это неравенство и формулу Коши при $z \in \bar{D}_{1+(R-1)^{-1}}$ получаем

$$\begin{aligned} |f(z) - \Phi_n(f, R, z)| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{f(\zeta) (\zeta - \zeta_k)}{(\zeta_k - z)(\zeta - z)} d\zeta \right| < \\ &\leq \frac{2\pi R}{n} \cdot \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta_k - z| |\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{2\pi R}{n} \max_{\zeta \in \bar{D}} |f(\zeta)| \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k} \frac{|d\zeta|}{|\zeta_k - z| |\zeta - z|} &< \frac{4\pi R^2}{n} \max_{\zeta \in \bar{D}_R} |f(\zeta)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{|R e^{i\varphi} - z|^2} < \\ &< \frac{8\pi R}{n(R-1)} \max_{\zeta \in \bar{D}_R} |f(\zeta)|. \end{aligned}$$

Лемма 1 доказана.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1. Для краткости будем обозначать $\omega(f, \delta)$ через $\omega(\delta)$. Предположим сначала, что $\max_{\zeta \in \bar{D}} |f(\zeta)| \leq \omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Пусть $P_n(z)$ — полиномы наилучшего приближения функции f степени n . Тогда из (2) и (3) имеем

$$|f(z) - P_2(z)| < \omega\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad z \in \bar{D}, \quad (4)$$

$$|P_2(z) - P_4(z)| < 6 \omega\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad z \in \bar{D}_{1+\frac{1}{4}} \quad (5)$$

$$|P_2(z)| < 6 \omega\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad z \in \bar{D}_{1+\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Положим $R_n = 1 + 2^{-n}$, $n = 1, 2, \dots$. Из неравенств (6) и (4) и леммы 1, примененной к $P_2(z)$ и кругу D_{R_n} , при $z \in \bar{D}_{R_n}$ получаем

$$|f(z) - \Phi_{2^n}(P_2, R_n, z)| < 2\omega\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

а учитывая (5) при $z \in \bar{D}_{R_n}$,

$$|P_4(z) - \Phi_{2^n}(P_1, R_n, z)| < 7\omega\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (7)$$

Обозначим $f_1(z) = P_2(z)$, а при $z \in \bar{D}_{R_n}$,

$$f_2(z) = P_4(z) - \Phi_{2^n}(f_1, R_n, z).$$

Учитывая неравенство (7), применим лемму 1 к функции $f_2(z)$ и кругу D_{R_n} , тогда при $z \in \bar{D}_{R_n}$ получим

$$|f_2(z) - \Phi_{2^n}(f_2, R_n, z)| < \frac{\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} \leq \omega\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Из (2) и (3) будем иметь

$$|f(z) - \Phi_{2^n}(f_1, R_n, z) - \Phi_{2^n}(f_2, R_n, z)| < 2\omega\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad z \in \bar{D}, \quad (8)$$

$$|P_2(z) - \Phi_{2^n}(f_1, R_n, z) - \Phi_{2^n}(f_2, R_n, z)| < 7\omega\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad z \in \bar{D}_{R_n}. \quad (9)$$

Предположим теперь, что неравенства (8) и (9) верны при $n \geq 2$, т. е., что

$$|f(z) - \sum_{k=1}^n \Phi_{2^{k+1}}(f_k, R_k, z)| < 2\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right), \quad z \in \bar{D}, \quad (10)$$

$$|P_{2^{n+1}}(z) - \sum_{k=1}^n \Phi_{2^{k+1}}(f_k, R_k, z)| < 7\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right), \quad z \in \bar{D}_{R_{n+1}}. \quad (11)$$

Покажем, что они верны и при $n+1$. Обозначим при $z \in \bar{D}_{R_{k+1}}$

$$f_{n+1}(z) = P_{2^{n+1}}(z) - \sum_{k=1}^n \Phi_{2^{k+1}}(f_k, R_k, z).$$

Тогда учитывая (11) и (3) и применяя лемму 1 к функции $f_{n+1}(z)$ и кругу $D_{R_{n+1}}$, при $z \in \bar{D}_{R_{n+2}}$ будем иметь

$$|f_{n+1}(z) - \Phi_{2^{(n+1)+1}}(f_{n+1}, R_{n+1}, z)| < \frac{\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2} \leq \omega\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right),$$

$$\left| P_{2^{n+1}}(z) - \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_{2^{k+1}}(f_k, R_k, z) \right| < 7\omega\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Учитывая (2), отсюда получаем

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^{n+1} \Phi_{2^{k+1}}(f_k, R_k, z) \right| < 2\omega\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Таким образом, утверждения (10) и (11) верны и для $n+1$. Отсюда для f получаем представление в $\bar{D}$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{2^{n+1}}(f_n, R_n, z),$$

где по определению

$$\Phi_{2^{n+1}}(f_n, R_n, z) = \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_{\gamma_k^n} f_n(\zeta) d\zeta}{\zeta_k^n - z}, \quad z \in \bar{D},$$

$$\zeta_k^n = R_n e^{\frac{2\pi i k}{2^{n+1}}}, \quad \gamma_k^n = \left\{ \zeta, |\zeta| = R_n, \frac{2\pi(k-1)}{2^{n+1}} \leq \arg \zeta < \frac{2\pi k}{2^{n+1}} \right\},$$

$k=1, 2, \dots, 2^{n+1}$. Возьмем $m \geq 1$. Для него найдется такое $n > 1$, что $2^{n+1} - 2^{12} < m \leq 2^{n+12} - 2^{12}$.

Положим для этих m и n

$$A_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_{m-2^{n+1}+2^{2n}}} f_n(\zeta) d\zeta, \quad \zeta_m = \zeta_{m-2^{n+1}+2^{2n}}.$$

Тогда для функции f получим формально представление в $\bar{D}$ в виде ряда (1). Проверим теперь, что оно удовлетворяет утверждениям теоремы 1. Оценим сначала коэффициенты A_m . В силу (11)

$$|A_m| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_{m-2^{n+1}+2^{2n}}} |f_n(\zeta)| |d\zeta| < \gamma \frac{\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{2^{n+1}}.$$

Учитывая, что $2^{n+1} - 2^{2^2} < m \leq 2^{n+2} - 2^{2^2}$, получаем требуемые неравенства.

При $z \in \bar{D}$ через $S_m(z)$ обозначим m -ю частную сумму формального ряда (1) функции f . Тогда

$$S_m(z) = \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_2^{k+1}(f_k, R_k, z) + \sum_{k=1}^{m-2^{n+1}+2^{2n}} \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_{\gamma_k^n} f_n(\zeta) d\zeta}{\zeta_k^n - z},$$

где n такое, что $2^{n+1} - 2^{2^2} < m \leq 2^{n+2} - 2^{2^2}$. Следовательно, при $z \in \bar{D}$ будем иметь

$$\begin{aligned} |f(z) - S_m(z)| &= \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n-1} \Phi_2^{k+1}(f_k, R_k, z) - \sum_{k=1}^{m-2^{n+1}+2^{2n}} \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_{\gamma_k^n} f_n(\zeta) d\zeta}{\zeta_k^n - z} \right| \leq \\ &\leq \gamma \omega\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) + \sum_{k=1}^{m-2^{n+1}+2^{2n}} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^n} \frac{|f_n(\zeta)|}{|\zeta_k^n - z|} |d\zeta|. \end{aligned}$$

Учитывая (11), оценим теперь последнюю сумму при

$$\sum_{k=1}^{m-2^{n+1}+2^{2n}} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^n} \frac{|f_n(\zeta)|}{|\zeta_k^n - z|} |d\zeta| \leq 2 \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^n} \frac{|f_n(\zeta)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < 38\omega\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cdot n.$$

В силу выбора m и n , отсюда получаем первое утверждение теоремы

1. В случае, когда $M = \max_{\zeta \in \bar{D}} |f(\zeta)| > \omega\left(\frac{\pi}{2}\right)$ достаточно рассмотреть

функцию $g(z) = \frac{\omega\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2M} \cdot f(z)$. Теорема 1 доказана.

Из теоремы 1 получаем

Следствие 1. Пусть $f \in A$. Тогда существуют

$$r_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k^n}{\zeta_k - z}$$

где $\zeta_k \in \bar{D}$, $|A_k^n| \leq c_2(f) \cdot \omega(f, k^{-1})/k$ такие, что при $z \in \bar{D}$

$$|f(z) - r_n(z)| \leq c_1(f) \cdot \omega(f, k^{-1}).$$

Обозначим через $\text{Lip}_A(\alpha)$, $0 < \alpha \leq 1$ класс функций из A таких, что $\omega(f, \delta) \leq c_3(f) \delta^\alpha$. Пусть $R_k = 1 + 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Возьмем $m > 2$, для него найдется такое $k \geq 2$, что $2^{k-1} \leq m < 2^k$. Для этих m и k

положим $\zeta_m = R_k e^{\frac{2\pi i (m - 2^{k-1})}{2^k - 1}}$, $\zeta_1 = R_1$. Обозначим через

$$r_n(z) = \sum_{m=1}^n \frac{A_m^n}{\zeta_m - z} \tag{12}$$

рациональную функцию с полюсами в этих точках ζ_m . Тогда имеет место

Теорема 2. Пусть $f \in A$. Для того чтобы $f \in \text{Lip}_A(\alpha)$, $0 < \alpha < 1$ необходимо и достаточно, чтобы существовали $r_n(z)$ вида (12) такие, что

$$|f(z) - r_n(z)| < \frac{c_4(f)}{n^\alpha}$$

и коэффициенты A_m^n функции $r_n(z)$ удовлетворяли неравенствам $|A_m^n| \leq c_5(f) m^{-(1+\alpha)}$ (где $c_4(f)$ и $c_5(f)$ — постоянные, зависящие только от f).

Доказательство. Необходимость доказана в следствии 1. Докажем достаточность. Оценим вначале производную рациональных функций типа (12), учитывая неравенства для их коэффициентов A_m^n . Возьмем $k > 2$ такое, что $2^{k-1} \leq n < 2^k$. Тогда при $z \in \bar{D}$

$$\begin{aligned} |r'_n(z)| &\leq \sum_{m=1}^n \frac{|A_m^n|}{|\zeta_m - z|^2} \leq \sum_{m=1}^k \sum_{l=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{|A_l^m|}{|\zeta_l - z|^2} \leq \\ &\leq \sum_{m=1}^k \frac{c_4(f)}{2^{(m-1)(1+\alpha)}} \sum_{l=2^{m-1}}^{2^m-1} \frac{1}{|\zeta_l - z|^2} \leq \sum_{m=1}^k \frac{8 c_4(f)}{2^{m\alpha}} \sum_{l=2^{m-1}}^{2^m-1} \int_{\gamma_l^m} \frac{1}{|\zeta - z|^2} |d\zeta| \leq \\ &< 16 c_4(f) \cdot \sum_{m=1}^k \frac{2^m}{2^{m\alpha}} < 32 c_4(f) \cdot n^{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения как и при доказательстве теоремы Бернштейна (см. [9], стр. 195). Теорема 2 доказана.

Из теоремы 1 следует, что если $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(f, k^{-1})/k < +\infty$, то коэффициенты A_k разложения f в виде (1) удовлетворяют условию

$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$. Однако, при выполнении условия $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(f, k^{-1})/k < +\infty$ можно доказать точное утверждение. Докажем вначале методом Вольфа одну лемму.

Лемма 2. Пусть $f \in A\bar{D}_R$, $1 < R < \frac{3}{2}$. Тогда f в $\bar{D}$ можно представить в виде (1), причем так, чтобы имело место неравенство:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\zeta_k - z|} < c_0 \max_{\zeta \in \bar{D}_R} |f(\zeta)| \log \frac{1}{R-1}, \quad z \in \bar{D} \quad (13)$$

и ряд (13) сходился равномерно в $\bar{D}$ (постоянная c_0 не зависит от f и k).

Доказательство. Обозначим $\max_{\zeta \in \bar{D}_R} |f(\zeta)| = M$. Возьмем $n_0 = [2^8 8\pi R (R-1)^{-3}] + 1$. Тогда по лемме 1 при $|z| \leq 1 + (R-1)/2$ будем иметь

$$|f(z) - \Phi_{n_0}(f, R, z)| < \frac{M(R-1)^2}{2^3}.$$

Обозначим $f_0(z) = f(z)$, $R_0 = R$, $R_m = 1 + (R-1)2^{-m}$, $m = 1, 2, \dots$,
 $f_1(z) = f(z) - \Phi_{n_0}(f_0, R_0, z)$.

Тогда вновь применяя лемму 1 к функции $f_1(z)$ и кругу D_{R_1} , беря $n_1 = [2^8 \pi R (R-1)^{-3}] + 1$ при $z \in \bar{D}_{R_1}$ будем иметь

$$|f_1(z) - \Phi_{n_1}(f_1, R_1, z)| < \frac{M(R-1)^2}{2^4}.$$

Продолжая, на m -ом шагу возьмем число $n_m = [2^{8(m+1)} \pi R (R-1)^{-3}] + 1$. Тогда по лемме 1 при $z \in \bar{D}_{R_{m+1}}$ будем иметь

$$|f_m(z) - \Phi_{n_m}(f_m, R_m, z)| < \frac{M}{n_m} \frac{8\pi(1 + (R-1)2^{-m})}{((1 + (R-1)2^{-m}) - 1)} < \frac{M(R-1)^2}{2^{2m}}.$$

Следовательно, для $f(z)$ получаем представление

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Phi_{n_m}(f_m, R_m, z), \quad z \in \bar{D},$$

где

$$\Phi_{n_m}(f_m, R_m, z) = \sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{2\pi i} \frac{\int_{\gamma_k^m} f_m(\zeta) d\zeta}{\zeta_k^m - z},$$

точки ζ_k^m и дуги γ_k^m определяются по лемме 1. Проверим теперь утверждения леммы 2. Имеем при $z \in \bar{D}$

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^m} \frac{|f_m(\zeta)|}{|\zeta_k^m - z|} |d\zeta| &\leq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^0} \frac{|f_0(\zeta)|}{|\zeta_k^0 - z|} |d\zeta| + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n_m} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_k^m} \frac{|f_m(\zeta)|}{|\zeta_k^m - 1|} |d\zeta| &\leq 2M \log \frac{1}{R-1} + M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{R-1}{2^m} < \\ &< 3M \log \frac{1}{R-1}. \end{aligned}$$

Лемма 2 доказана.

Теорема 3. Пусть $f \in A$. Если $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(f, k^{-1})/k < +\infty$, то f в $\bar{D}$ разлагается в ряд вида (1), причем ряд (1) сходится абсолютно равномерно в $\bar{D}$.

Доказательство. Заметим сперва, что из $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(f, k^{-1})/k < +\infty$ следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \omega(f, 2^{-2^k}) < +\infty$. Пусть $P_n(z)$ — полиномы наилучшего приближения функции f степени n . Обозначим

$$Q_n(z) = P_{2^{n+1}}(z) - P_{2^n}(z).$$

Из (2) и (3) следует, что при $|z| \leq 1 + 2^{-2^n}$

$$|Q_n(z)| < 6 \omega(f, 2^{-2^n}).$$

Очевидно, что

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(z) + P_2(z).$$

По лемме 2, примененной к $Q_n(z)$ и кругу $|z| < 1 + 2^{-2^{n+1}}$ при $z \in \bar{D}$ будем иметь

$$Q_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^n}{\zeta_k^n - z},$$

а оценка (13) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k^n|}{|\zeta_k^n - z|} < 6 \cdot c_0 \cdot 2^{n+1} \omega(f, 2^{-2^n}).$$

Следовательно, теорема 3 доказана.

Замечание. Условие теоремы $\sum_{k=1}^{\infty} \omega(f, k^{-1})/k < +\infty$, можно записать в интегральном виде $\int_0^1 \frac{\omega(f, t)}{t} dt < +\infty$. Из теоремы 3 получаем

лучше

Следствие 2. Пусть $f \in A$. Если $\omega(f, \delta) = O\left(\log^{-(1+\varepsilon)} \frac{1}{\delta}\right)$, где ε — произвольное положительное число, то f в $\bar{D}$ разлагается в ряд вида (1) и ряд (1) сходится абсолютно равномерно в $\bar{D}$.

Покажем теперь, в некотором смысле, точность теоремы 3 и следствия 2.

Утверждение 1. Существует $f \in A$ такая, что $\omega(f, \delta) = O\left(\log^{-1} \frac{1}{\delta}\right)$, но которую нельзя в $\bar{D}$ представить в виде ряда (1) так, чтобы он абсолютно сходился всюду в $\bar{D}$.

Доказательство. Пусть f в D представляется в виде ряда (1) и $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$. Если через $f^{(n)}(z)$ обозначить n -ю производную $f(z)$, то

$$f^{(n)}(z) = n! \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(\zeta_k - z)^{n+1}}, \quad z \in D.$$

Следовательно, если при $z \in D$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, то $a_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k^{n+1}}$.

Предположим теперь, что ряд (1), представляющий f в D сходится в некоторой точке $z_0 \in \partial D$. Покажем, что отсюда будет следовать сходимость ряда Тейлора функции f в этой точке. Действительно, пусть в некоторой точке $z_0 \in \partial D$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{|\zeta_k - z_0|} < +\infty. \quad (14)$$

Так как $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| < +\infty$, то в точке z_0

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m a_n z_0^n &= \sum_{n=0}^m z_0^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k^{n+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sum_{n=0}^m \frac{z_0^n}{\zeta_k^{n+1}} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z_0} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k z_0^{m+1}}{\zeta_k^{m+1} (\zeta_k - z_0)}. \end{aligned}$$

Следовательно, в точке z_0

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{\zeta_k - z_0} - \sum_{n=0}^m a_n z_0^n \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\zeta_k^{m+1}| |\zeta_k - z_0|}.$$

Покажем, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $m \rightarrow \infty$. Возьмем $\varepsilon > 0$. В силу (14) и того, что $|\zeta_k| > 1$, найдется такое N , что

$$\sum_{k=N}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\zeta_k|^{m+1} |\zeta_k - z_0|} < \sum_{k=N}^{\infty} \frac{|A_k|}{|\zeta_k - z_0|} < \varepsilon.$$

Так как $|\zeta_k| > 1$, $k=1, 2, \dots, N-1$, то если взять m достаточно большим, получим

$$\sum_{k=1}^{N-1} \frac{|A_k|}{|\zeta_k|^{m+1} |\zeta_k - z_0|} < \varepsilon.$$

Следовательно, если мы предположим, что ряд (1) сходится абсолютно всюду в $\bar{D}$, то отсюда будет следовать сходимость на ∂D ряда Тейлора функции f . Поскольку для любой точки $z_0 \in \partial D$ существует (см. 9, стр. 477) $f \in A$, такая, что $\omega(f, \delta) = O\left(\log^{-1} \frac{1}{\delta}\right)$ и ряд Тейлора который расходится в этой точке, откуда и следует утверждение 1.

Теорема 1 дает условие на f , чтобы она представлялась в $\bar{D}$ в виде ряда (1). Однако частные суммы этого ряда не дают наилучшей аппроксимации рациональными функциями этой функции f . Для того, чтобы этого добиться можно перейти к представлению по ядру несколько иного вида, и аналогично теореме 1 может быть доказана следующая

Теорема 4. Пусть $f \in A$, тогда f в $\bar{D}$ представляется в виде

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k}{(\zeta_k - z)^2}, \quad \zeta_k \in \bar{D}$$

и имеют место следующие неравенства:

$$\left| f(z) - \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{(\zeta_k - z)^2} \right| < c_7(f) \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right), \quad z \in \bar{D}$$

и $|A_k| \leq c_8(f) \cdot \omega(f, k^{-1})/k^2$ (постоянные $c_7(f)$, $c_8(f)$ зависят только от f).

В статье автора [7] исследовалась задача о представлении f в $\bar{D}$ в виде (1), так чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| (|\zeta_k| - 1)^{-1} < +\infty$. Можно несколько усилить теорему 1 в [7]. Введем соответствующие обозначения. Через H^1 обозначим класс Харди в круге D , т. е. множество аналитических функций в D таких, что $\sup_{0 < r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt < +\infty$. Если $f \in H^1$, то через $\omega_1(f, \delta)$ будем обозначать интегральный модуль непрерывности f , т. е.

$$\omega_1(f, \delta) = \sup_{|\theta| < \delta} \int_0^{2\pi} |f(e^{i(t+\theta)}) - f(e^{it})| dt.$$

Тогда аналогично теореме 3 можно доказать, используя соответствующую теорему Джексона, следующее

Утверждение 2. Пусть $f^{(1)} \in H^1$. Если $\int_0^1 \frac{\omega_1(f^{(1)}, t)}{t} dt < +\infty$

то f представляется в $\bar{D}$ в виде (1) так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| (|k_k| - 1)^{-1} < +\infty.$$

В случае функций f , производная которых имеет более гладкий интегральный модуль непрерывности, аналогично теореме 1 можно доказать следующую теорему.

Теорема 5. Пусть $f^{(1)} \in H^1$ и $\omega_1(f^{(1)}, \delta) \leq c_{10}(f) \cdot \delta^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$. Тогда f в D представляется в виде (1) так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| \cdot (|k_k| - 1)^{-(1+\alpha)} \cdot \log^{-(1+\alpha)} (|k_k| - 1)^{-1} < +\infty$$

и коэффициенты A_k имеют оценку $|A_k| \leq c_{11}(f) \cdot k^{-(2+\alpha-1)}$, где ε — произвольное положительное число, а постоянные $c_{10}(f)$, $c_{11}(f)$ зависят только от f .

Легко доказать также в некотором смысле обратное утверждение.

Утверждение 3. Пусть f в D представляется в виде (1) так, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A_k| (|k_k| - 1)^{-(1+\alpha)} < +\infty, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Тогда $\omega_1(f^{(1)}, \delta) \leq c_{12}(f) \cdot \delta^\alpha$.

В заключение автор благодарит Н. У. Аракеяна, под руководством которого была выполнена эта работа.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.XII.1979

Ռ. Ա. ԱՎԵՏԻՍԻԱՆ. Անալիտիկ ֆունկցիաները փակ շրջանում պարզ կոտորակների շարքերով ներկայացնելու մասին (ամփոփում)

Հորվածում ապացուցվում է, որ անալիտիկ ֆունկցիայի անընդհատության մոդուլի վրա որոշ պայմանների դեպքում, այդ ֆունկցիան կարելի է ներկայացնել փակ շրջանում պարզ կոտորակների շարքի տեսքով:

R. A. AVETISIAN. On representation of analytical in a closed circle functions as a series of simple fractions (summary)

The paper proves that under certain conditions imposes upon the continuity modulus, an analytic in a closed circle functions can be represented in the form of a series of simple fractions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Wolff*. Sur les series $\sum_1^{\infty} A_k/(z - \alpha_k)$ C. r. Acad. sci, 173, 1921, 1327—1328.
2. *Дж. А. Уолш*. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области, М., 1961.
3. *A. Denjoy*. Sur les series de fractions rationnelles, Bull. soc. math. France, 52, 1924, 418—434.
4. *А. А. Гончар*. О квазианалитическом продолжении аналитических функций через жорданову дугу, ДАН СССР, 166, № 5, 1966, 1028—1031.
5. *Т. А. Леонтьева*. Представление функций, аналитических в замкнутой области, рядами рациональных функций, Матем. заметки, 4, № 2, 1968, 191—200.
6. *Т. А. Леонтьева*. О представлении функций в единичном круге рядами простых дробей, Матем. сб. 84 (126), № 2, 1971, 313—326.
7. *Р. Аб. Аветисян*. О представлении функций рядами простых дробей, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XIII, № 1, 1978.
8. *Н. П. Корнейчук*. Экстремальные задачи теории приближения. Изд. «Наука», М., 1976.
9. *А. Зигмунд*. Тригонометрические ряды, т. I, Изд. «Мир», М., 1965.