ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XVI, № 1, 1981 Математика

А. А. ВАГАРШАКЯН

О ЕДИНСТВЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, РАСТУЩИХ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

Введение

Пусть $K(t) \geqslant 1$ — непрерывная функция, определенная при $0 < t < 1$. Обозначим через A_K множество аналитических в единичном круге функций, для которых

$$\sup_{|z|<1} \frac{\log |f(z)|}{K(1-|z|)} < \infty. \tag{1}$$

В частном случае, когда $K(t) \equiv 1$, A_K совпадает с пространством ограниченных аналитических функций H^∞. С. Я. Хавинсон [5] доказал следующий результат. Пусть последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $|z_k| < 1$, такова, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-|z_k|) = \infty$$

и

$$\frac{|z_{k+1}| - |z_k|}{(1-|z_{k+1}|)(1-|z_k|)} \geqslant \delta > 0,$$

где δ не зависит от k. Если $f(z) \in H^\infty$ и

$$\lim_{k\to\infty} (1-|z_k|) \log |f(z_k)| = -\infty, \tag{2}$$

то $f(z) \equiv 0$.

Аналогичный результат, при несколько других предположениях на $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, ранее был получен И. В. Ушаковой [7].

В работе автора [1] было получено обобщение приведенного выше результата. Смысл этого обобщения заключается в следующем: на последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ налагаются более сильные условия, чем в теореме С. Я. Хавинсона, однако условие (2) заменяется более слабым. Эти новые условия на $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ заставляют точки z_k рассеиваться по кругу. Таким образом, рассеиванием точек $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ удается ослабить условие (2) в теореме С. Я. Хавинсона.

В настоящей статье доказана теорема единственности для функций из A_k, аналогичная результатам работы [1]. В этой теореме показано, что для всех классов A_K, для которых функция $K(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{K(t)}{t}}\, dt < \infty,$$

можно, с помощью рассеивания точек $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, ослабить условие на скорость убывания функции по этой последовательности.

Кроме того, в последнем параграфе настоящей статьи показано, что эффекты указанного типа могут быть получены не всегда. Построены примеры, показывающие, что для весовой функции $K(t)$, растущей при $t\to 0$ быстрее, чем $\frac{1}{t}$, нет таких эффектов.

1°. Введем некоторые обозначения. Пусть $h(r)$—неотрицательная непрерывная функция, заданная при $r>0$, а $E\subseteq\partial D$—некоторое множество, где $D=\{z;\ |z|<1\}$. Рассмотрим все покрытия множества E счетным набором кругов S_i радиусов r_i:

$$\bigcup_i S_i\supseteq E$$

и положим

$$M_h(E)=\inf\left(\sum_i h(r_i)\right),$$

где infimum берется по всем таким покрытиям. С величинами $M_h(E)$ можно познакомиться в книгах Л. Карлесона [2] и А. Роджерса [3]. Ниже мы приведем некоторые элементарные свойства этих величин. Для любого $F\subseteq\partial D$, $M_h(F)\geqslant 0$. Если $F\subseteq E$, то $M_h(F)\leqslant M_h(E)$ и для любых E и F

$$M_h(E\cup F)\leqslant M_h(E)+M_h(F).$$

В случае, когда $h(r)\geqslant c>0$, $r>0$, для любого $\varnothing\neq F\subseteq\partial D$, $M_h(F)\geqslant c$. Легко проверить, что если

$$\varliminf_{r\to 0}\frac{h(r)}{r}=0,$$

то $M_h(\partial D)=0$. Из последних двух свойств $M_h(E)$ следует, что на функцию $h(t)$ естественно наложить ограничения

$$\lim_{r\to 0}h(r)=0,\ \varliminf_{r\to 0}\frac{h(r)}{r}>0.$$

Пусть $F\subset\partial D$—некоторое множество, а x—точка из замкнутого единичного круга $\overline{D}$. Обозначим

$$\rho(x,F)=\inf_{y\in F}|x-y|,$$

где $|x-y|$—расстояние точек x и y. Предположим, что $\varkappa(t)\geqslant 1$—невозрастающая интегрируемая функция, определенная при $t>0$. Обозначим через $\varkappa(F)$ следующий интеграл:

$$\varkappa(F)=\int_0^{2\pi}\varkappa(\rho(e^{it},F))\,dt.$$

Лемма 1. *Пусть* $\varkappa(t) \geqslant 1$ — *непрерывная невозрастающая функция, определенная при* $t > 0$, *причем*

$$\lim_{t \to 0} \varkappa(t) = \infty.$$

Если для некоторого множества $F \subset \partial D$, $\varkappa(F) < \infty$, *то*

$$M_h(F) = 0,$$

где

$$h(t) = \int_0^t \varkappa(x)\, dx.$$

Доказательство. Заметим, что из условий $\varkappa(F) < \infty$ и $\lim_{t \to 0} \varkappa(t) = \infty$ следует, что $m(F) = 0$, где m — мера Лебега на ∂D. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $G \subseteq \partial D$ и $m(G) < \delta$, то

$$\int_G \varkappa(\rho(e^{it}, F))\, dt < \varepsilon.$$

Так как F имеет нулевую меру, то существует открытое множество $F \subseteq G$ такое, что $m(G) < \delta$. Обозначим через G_j, $j = 1, 2, \cdots$ все составляющие интервалы множества G, которые пересекаются с множеством F. Тогда имеем

$$M_h(F) \leqslant \sum_j \int_0^{m(G_j)} \varkappa(x)\, dx \leqslant \sum_j \int_{G_j} \varkappa(\rho(e^{it}, F))\, dt < \int_G \varkappa(\rho(e^{it}, F))\, dt < \varepsilon,$$

где $h(t) = \int_0^t \varkappa(x)\, dx$. В силу произвольности ε имеем

$$M_h(F) = 0.$$

Лемма 2. *Пусть* $\varkappa(t) \geqslant 1$, $t > 0$, *непрерывная интегрируемая функция. Тогда для любой неотрицательной неубывающей функции* $h(t)$, *которая удовлетворяет условиям* $\lim_{t \to 0} h(t) = 0$, $th(x) \leqslant h(tx)$ *при* $0 < t$, $x < 1$ *и*

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \varkappa(x)\, dx = 0$$

существует такое замкнутое множество $E \subseteq \partial D$, *что* $M_h(E) > 0$ *и* $\varkappa(E) < \infty$.

Доказательство. Построим семейство интервалов $\Delta_{i_1, i_2, \cdots, i_n}$, $n = 1, 2, \cdots$, где индексы i_k независимо друг от друга принимают значения от единицы до n_k. Это семейство мы выбираем таким образом, чтобы удовлетворялись следующие условия:

1. $\Delta_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ — замкнутые интервалы, которые не пересекаются друг с другом при разных наборах индексов $i_1, i_2, \cdots, i_n$ одинаковой длины;

2. Для любого допустимого набора индексов $i_1, i_2, \cdots, i_n$ имеет место включение

$$\Delta_{i_1, \dots, i_{n-1}, i_n} \subset \Delta_{i_1, \dots, i_{n-1}};$$

3. Для любого n интервалы $\Delta_{i_1, \dots, i_n}$ имеют одинаковую длину, $m(\Delta_{i_1, \dots, i_n}) = l_n$.

Числа l_k мы выбераем таким образом, чтобы

$$n_1 n_2 \cdots n_k h(l_k) = 1, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{4}$$

Натуральные числа n_k будут выбраны несколько позже. Заметим, что существует семейство $\{\Delta_{i_1, \dots, i_n}\}$, обладающее приведенными выше свойствами. Действительно, для этого достаточно проверить, что имеют место неравенства

$$l_m - n_{m+1} l_{m+1} = m\left(\Delta_{i_1, \dots, i_m} \setminus \bigcup_{i_{m+1}=1}^{n_{m+1}} \Delta_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}}\right) > 0, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

Вспоминая соотношение (4), вышеприведенные неравенства можно привести к виду $y h^{-1}(x) \supset h^{-1}(yx)$, $0 < x$, $y < 1$, где $h^{-1}(x)$ — функция, обратная к $h(y)$, или, что то же самое, $yh(z) < h(yz)$.

В качестве множества E рассмотрим пересечение

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} \left(\bigcup_{i_k=1}^{n_k} \Delta_{i_1, \dots, i_n}\right)\right).$$

Из (4) следует, что $M_h(E) \geqslant 1$. Если $\inf\limits_{t>0} \dfrac{t}{h(t)} > 0$, то из условий теоремы следует, что $\varkappa(t)$—ограниченная функция и поэтому $\varkappa(E) < \infty$. Предположим, что $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t}{h(t)} = 0$. Легко заметить, что тогда $m(E) = 0$. Рассмотрим открытое множество $\partial D \setminus E$. Составляющие интервалы этого множества состоят из составляющих интервалов множеств

$$\Delta_{i_1, \dots, i_m} \setminus \bigcup_{i_{m+1}=1}^{n_{m+1}} \Delta_{i_1, \dots, i_m, i_{m+1}},$$

где $i_1, \cdots, i_m$ принимают всевозможные допустимые значения. В силу определения имеем

$$\varkappa(E) \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} n_1 \cdots n_m \int\limits_0^{l_m - n_{m+1} l_{m+1}} \varkappa(x)\, dx \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} n_1 \cdots n_m \int\limits_0^{l_m} \varkappa(x)\, dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} n_1 \cdots n_m \int\limits_0^{h^{-1}\left(\frac{1}{n_1 \cdots n_m}\right)} \varkappa(x)\, dx.$$

Пусть $\omega(x)$ — неубывающая непрерывная функция такая, что

$$\omega(m) = n_1 \cdots n_m, \quad m = 1, 2, \cdots.$$

Имеет место неравенство

$$\varkappa(E) < \sum_{m=1}^{\infty} n_1 \cdots n_m \int_0^{h^{-1}\left(\frac{1}{n_1 \cdots n_m}\right)} \varkappa(x)\, dx \leqslant \int_1^{\infty} \omega(x) \left(\int_0^{h^{-1}\left(\frac{1}{\omega(x)}\right)} \varkappa(t)\, dt \right) dx.$$

После замены переменной $y = h^{-1}\left(\frac{1}{\omega(x)}\right)$ в последнем интеграле получим

$$\varkappa(E) \leqslant \int_0^{\alpha} \frac{1}{h(y)} \left(\int_0^{y} \varkappa(t)\, dt \right) d\omega^{-1}\left(\frac{1}{h(y)}\right), \qquad (5)$$

где $\alpha = h^{-1}\left(\frac{1}{\omega(1)}\right)$. Так как по условию леммы

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{h(t)} \int_0^t \varkappa(x)\, dx = 0,$$

то существует неубывающая непрерывная функция $\omega(x)$, которая удовлетворяет условиям: $\omega(n)$—целое число при целом n; $\omega(n+1)$ делится на $\omega(n)$; $\lim\limits_{x \to \infty} \omega(x) = \infty$ и сходится интеграл (5). Существование такой функции $\omega(x)$ позволяет выбрать числа n_k с нужными нам свойствами следующим образом: $n_k = \frac{\omega(k+1)}{\omega(k)}$. Лемма доказана.

2°. Пусть $\varphi(t)$— непрерывная неубывающая функция, заданная при $0 < t$, причем $\varphi(0) = 0$ и

$$\sup_{0<t} \frac{\varphi(t)}{t} < \infty.$$

Для любой такой функции $\varphi(t)$ и любой точки $y \in \partial D$ положим

$$\Delta_\varphi(y) = \left\{ x \in D;\ \varphi\left(\left| y - \frac{x}{|x|} \right| \right) < 1 - |x| \right\}.$$

Мы будем пользоваться также обозначением

$$\Delta_\varphi(F) = \bigcup_{y \in F} \Delta_\varphi(y),$$

где F — некоторое множество в ∂D.

Многомерный вариант приведенной ниже леммы был доказан в работе автора [4].

Лемма 3. *Пусть* $g(t) \geqslant 1$ — *невозрастающая непрерывная функция, заданная при* $t > 0$, *а* $\varphi(t)$ — *неубывающая непрерывная* *функция, определенная при* $t \geqslant 0$, *причем* $\varphi(0)=0$, $\sup\limits_{0<t} \frac{\varphi(t)}{t} < \infty$.

Тогда для множества

$$F=\left\{y \in \partial D;\ \sup_{z\in\Delta_\varphi(y)} \frac{u(z)}{g(1-|z|)}=\infty\right\},$$

где $u(z)$ — *любая неотрицательная гармоническая в* D *функция, имеет место равенство*

$$M_h(F)=0,$$

где $h(t)=\varphi(t)\ g(\varphi(t))$.

Обратно, для любого $F \subseteq \partial D$ *такого, что* $M_h(F)=0$, *существует неотрицательная гармоническая функция* $u(z)$ *такая, что в любой точке* $y \in F$ *имеет место*

$$\sup_{z\in\Delta_\varphi(y)} \frac{u(z)}{g(1-|z|)}=\infty.$$

Следующее утверждение показывает, что существует функция $\varphi(t)$, удовлетворяющая условиям теоремы 1.

Лемма 4. *Пусть* $K(t)$ — *невозрастающая непрерывная функция, определенная при* $t>0$, *причем* $0<tK(t)\leqslant 1$, $\frac{d^2}{dx^2}\left(\sqrt{x^3 K(x)}\right)>0$ *и*

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{K(t)}{t}}\,dt<\infty.$$

Тогда существует неотрицательная неубывающая функция $\varphi(t)$ *такая, что*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt<\infty$$

и

$$\int_0^1 K(\varphi(t))\,dt<\infty.$$

Доказательство. Положим $\varphi(x)=\sqrt{x^3 K(x)}$. Тогда

$$\int_0^1 \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx=\int_0^1 \sqrt{\frac{K(x)}{x}}\,dx<\infty.$$

Остается проверить, что $\int\limits_0^1 K(\varphi(x))\,dx<\infty$. Имеем

$$\int_0^1 K(\varphi(x))\,dx = \int_0^1 \frac{\varphi^2(\varphi(x))}{\varphi^3(x)}\,dx = \int_0^1 \frac{\varphi(\varphi(x))}{\varphi^2(x)}\left(\frac{1}{\varphi(x)}\int_0^{\varphi(x)} \varphi'(t)\,dt\right)dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \frac{\varphi(\varphi(x))}{\varphi^2(x)}\,\varphi'(\varphi(x))\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{\varphi(\varphi(x))}{\varphi^2(x)}\,\varphi'(x)\,dx.$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что $\varphi''(x) \geqslant 0$. Далее имеем

$$\int_0^1 K(\varphi(x))\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{\varphi(\varphi(x))}{\varphi^2(x)}\,d\varphi(x) = \int_0^{\varphi(1)} \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt < \infty.$$

Лемма доказана.

Отметим, что функция $\varphi(t)$ из леммы 4 может существовать и при других предположениях на $K(t)$. Поэтому в теореме 1 на функцию $K(t)$ налагаются только те ограничения, которые нам кажутся наиболее существенными.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что функции $K(t)$, $g(t)$ и $\varphi(t)$, фигурирующие в формулировках наших результатов, удовлетворяют условиям:

$$\sup_{0<t} \frac{K(t)}{K(2t)} < \infty, \quad \sup_{t>0} \frac{g(t)}{g(2t)} < \infty, \quad \sup_{0<t} \frac{\varphi(2t)}{\varphi(t)} < \infty.$$

Теорема 1. *Пусть $K(t)$ и $g(t)$ — невозрастающие непрерывные функции, для которых $1 \leqslant K(t) \leqslant g(t) \leqslant \frac{1}{t}$ и*

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{K(t)}{t}}\,dt < \infty.$$

Пусть $\varphi(t) > 0$ — неубывающая непрерывная функция, определенная при $0 \leqslant t \leqslant 2$, причем $\frac{\varphi(t)}{t}$ — неубывающая, $\frac{\varphi(t)}{t^2}$ — монотонная, $\sup_{0<t} \frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)} < \infty$ и

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt < \infty, \quad \int_0^1 K(\varphi(t))\,dt < \infty.$$

Для любой гармонической в единичном круге функции $u(z)$, которая удовлетворяет неравенству

$$u(z) < M\,K(1-|z|),$$

где M не зависит от $z \in D$, положим

$$E=\left\{y\in\partial D;\ \sup_{z\in\Delta_\varphi(y)}\frac{|u(z)|}{g(1-|z|)}=\infty\right\}.$$

Если $E\subseteq E$ — *произвольное замкнутое множество, для которого* $K(\varphi(F))<\infty$, *то* $M_h(F)=0$, *где* $h(t)=\varphi(t)\,g(\varphi(t))$.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. множество E содержит замкнутое подмножество F такое, что $K(\varphi(F))<\infty$ и $M_h(F)>0$. Обозначим через $\{(e^{i\vartheta_k'}, e^{i\vartheta_k''})\}_{k=1}^{\infty}$, $\vartheta_k'<\vartheta_k''$, семейство составляющих интервалов множества $\partial D\setminus F$. Определим функцию

$$f(\vartheta)=c\int\limits_0^{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt$$

при $\vartheta_k'\leqslant\vartheta\leqslant\vartheta_k''$ и $f(\vartheta)=0$ при $e^{i\vartheta}\in F$. Здесь $c>0$ некоторое число, которое будет выбрано в дальнейшем. Рассмотрим область G, определяемую условием

$$G=\{z\in D;\ f(\arg z)<1-|z|\}.$$

Заметим, что если точка z лежит на границе области G и $\vartheta=\arg z\in$ $\in(\vartheta_k', \vartheta_k'')$, то

$$1-|z|=f(\vartheta)=c\int\limits_0^{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\leqslant c\varphi\left(\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)\leqslant$$

$$\leqslant c\varphi\left(\frac{1}{2}\min\left[(\vartheta-\vartheta_k'), (\vartheta_k''-\vartheta)\right]\right)\leqslant cA\,\varphi\left(\rho\left(\frac{z}{|z|}, F\right)\right),$$

где A — число, зависящее только от функции $\varphi(t)$. С другой стороны, имеем

$$1-|z|=f(\vartheta)=c\int\limits_0^{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\geqslant c\int\limits_{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_k)}{2(\vartheta_k''-\vartheta_k')}}^{\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt\geqslant$$

$$\geqslant c\log 2\,\varphi\left(\frac{(\vartheta-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta)}{2(\vartheta_k''-\vartheta_k')}\right)\geqslant cB\varphi\left(\rho\left(\frac{z}{|z|}, F\right)\right),$$

где B зависит только от $\varphi(t)$. Очевидно, что полученные нами неравенства имеют место и при $\frac{z}{|z|}\in F$.

Обозначим через $w=w(z)$ функцию, которая конформно отображает единичный круг на G. Мы утверждаем, что производная функции $w(z)$ удовлетворяет неравенствам

$$0 < \inf_{z \in D} |w'(z)|, \ \sup_{z \in D} |w'(z)| < \infty.$$

В силу теоремы Варшавского (см., например, [6]) для этого достаточно показать, что модуль непрерывности функции $f'(\vartheta)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{\omega_{f'}(\delta)}{\delta} d\delta < \infty.$$

Пусть ϑ_1 и ϑ_2 принадлежат интервалу $(\vartheta_k', \vartheta_k'')$. Тогда

$$|f'(\vartheta_1) - f'(\vartheta_2)| = \left| \frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_k')(\vartheta_k'' - \vartheta_1)}{\vartheta_k'' - \vartheta_k'}\right)}{(\vartheta_1 - \vartheta_k')(\vartheta_k'' - \vartheta_1)} (\vartheta_k'' + \vartheta_k' - 2\vartheta_1) - \right.$$

$$\left. - \frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_2 - \vartheta_k')(\vartheta_k'' - \vartheta_2)}{\vartheta_k'' - \vartheta_k'}\right)}{(\vartheta_2 - \vartheta_k')(\vartheta_k'' - \vartheta_2)} (\vartheta_k'' + \vartheta_k' - 2\vartheta_2) \right|.$$

В случае, когда $\vartheta_1 \leqslant \frac{\vartheta_k'' + \vartheta_k'}{2} \leqslant \vartheta_2$ имеем

$$|f'(\vartheta_1) - f'(\vartheta_2)| \leqslant \frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_k')(\vartheta_k'' - \vartheta_1)}{\vartheta_k'' - \vartheta_k'}\right)}{\frac{(\vartheta_1 - \vartheta_k')(\vartheta_k'' - \vartheta_1)}{\vartheta_k'' - \vartheta_k'}} \frac{\vartheta_k'' + \vartheta_k' - 2\vartheta_1}{\vartheta_k'' - \vartheta_k'} +$$

$$+ \frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_2 - \vartheta_k')(\vartheta_k'' - \vartheta_2)}{\vartheta_k'' - \vartheta_k'}\right)}{\frac{(\vartheta_2 - \vartheta_k')(\vartheta_k'' - \vartheta_2)}{\vartheta_k'' - \vartheta_k'}} \frac{2\vartheta_2 - (\vartheta_k'' + \vartheta_k')}{\vartheta_k'' - \vartheta_k'} \leqslant 4 \frac{\varphi\left(\frac{\vartheta_1 - \vartheta_k'}{2}\right)}{\vartheta_1 - \vartheta_k'} \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\vartheta_k'' - \vartheta_k'} <$$

$$\leqslant A \frac{\varphi(\vartheta_k'' - \vartheta_k')}{(\vartheta_k'' - \vartheta_k')^2} (\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Если $\frac{\varphi(t)}{t^2}$ — неубывающая функция, то

$$|f'(\vartheta_2) - f'(\vartheta_1)| \leqslant A (\vartheta_2 - \vartheta_1).$$

Если $\frac{\varphi(t)}{t^2}$ — невозрастающая функция, то

$$|f'(\vartheta_2) - f'(\vartheta_1)| \leqslant B \frac{\varphi(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\vartheta_2 - \vartheta_1}.$$

Окончательно получаем

$$|f'(\vartheta_1)-f'(\vartheta_2)|\leqslant D\max\left\{(\vartheta_2-\vartheta_1),\frac{\varphi(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}\right\}.$$

Рассмотрим случай, когда $\vartheta_k' < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \dfrac{\vartheta_k''+\vartheta_k'}{2}$. Заметим, что если $\vartheta_1-\vartheta_k'\leqslant\vartheta_2-\vartheta_1$, то

$$|f'(\vartheta_1)-f'(\vartheta_2)|<4\,\frac{\varphi\left(\frac{\vartheta_1-\vartheta_k'}{2}\right)}{\vartheta_1-\vartheta_k'}\,\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\leqslant A\,\frac{\varphi(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}.$$

В случае, когда $\vartheta_2-\vartheta_1<\vartheta_1-\vartheta_k'$, достаточно оценить разность.

$$\left|\frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)}{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}-\frac{\varphi\left(\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right)}{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\right|=$$

$$=\left|\int\limits_{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}^{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{t\varphi'(t)-\varphi(t)}{t^2}\,dt\right|\leqslant M\int\limits_{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}^{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt.$$

Если $\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ — неубывающая функция, то

$$\int\limits_{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}^{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\leqslant M\left|\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)-(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\right|=$$

$$=M\,\frac{(\vartheta_2-\vartheta_1)\,|\vartheta_k''+\vartheta_k'-\vartheta_2-\vartheta_1|}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}\leqslant M\,|\vartheta_2-\vartheta_1|.$$

Если $\dfrac{\varphi(t)}{t^2}$ — невозрастающая функция, то

$$\int\limits_{\frac{(\vartheta_1-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_1)}{\vartheta_k''-\vartheta_k'}}^{\frac{(\vartheta_2-\vartheta_k')(\vartheta_k''-\vartheta_2)}{\vartheta_2''-\vartheta_k'}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\leqslant\int\limits_{\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}}^{\frac{3(\vartheta_2-\vartheta_1)}{2}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt.$$

Следовательно

$$|f'(\vartheta_1)-f'(\vartheta_2)|\leqslant c\left(|\vartheta_2-\vartheta_1|+\frac{\varphi(\vartheta_2-\vartheta_1)}{\vartheta_2-\vartheta_1}+\int\limits_{\frac{\vartheta_2-\vartheta_1}{2}}^{\frac{3(\vartheta_2-\vartheta_1)}{2}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right).$$

Из того, что $f'(\vartheta)=0$ при $e^{i\vartheta}\in F$, следует, что полученное нами неравенство имеет место не только для ϑ_1 и ϑ_2, принадлежащих какому-то интервалу $(\vartheta_k', \vartheta_k'')$, но и для любых расположений ϑ_1 и ϑ_2. Таким образом

$$\omega_{f'}(\delta)\leqslant c\left(\delta+\frac{\varphi(\delta)}{\delta}+\int\limits_{\frac{\delta}{2}}^{\frac{3\delta}{2}}\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt\right).$$

Поэтому

$$\int\limits_0^1\frac{\omega_{f'}(\delta)}{\delta}\,d\delta<\infty.$$

Определим функцию $v(z)=u(w(z))$, $z\in D$.

Имеем

$$\int\limits_{\partial D}v^+(z)\,|dz|=\int\limits_{\partial D}u^+(w(z))\,|dz|\leqslant M\int\limits_{\partial D}K(1-|w(z)|)\,|dz|\leqslant$$

$$\leqslant M_1\int\limits_{\partial G}K(1-|w|)\,|dw|\leqslant M_2\int\limits_{\partial G}K\left(\varphi\left(\rho\left(\frac{w}{|w|}, F\right)\right)\right)|dw|\leqslant$$

$$\leqslant M_3\int\limits_{\partial D}K(\varphi(\rho(z, F)))\,|dz|,$$

где $v^+=\max\{v, 0\}$, M_1, M_2, M_3 — постоянные. Следовательно, функция $v(z)$ допускает представление в виде $v(z)=v_1(z)-v_2(z)$, где $v_1(z)$ и $v_2(z)$ — неотрицательные гармонические функции.

Число $c>0$ в определении области G можно выбрать настолько малым, чтобы при $\zeta\in\Delta_\varphi(F)$ имело место неравенство

$$1-|\zeta|\leqslant 2\rho(\zeta, \partial G).$$

Пусть $\zeta\in G$ удовлетворяет неравенству

$$\varphi\left(\left|w(z)-\frac{\zeta}{|\zeta|}\right|\right)<2\rho(\zeta, \partial G),$$

где z — некоторая точка из множества F. Так как $w(z)$ и $w^{-1}(\zeta)$ имеют ограниченные производные, то существует $0<A<\infty$ такое, что

$$\varphi\left(\left|w(z)-\frac{\zeta}{|\zeta|}\right|\right)\geqslant A\varphi\left(\left|z-\frac{w^{-1}(\zeta)}{|w^{-1}(\zeta)|}\right|\right)$$

и

$$A\rho(\zeta,\ \partial G)\leqslant\rho(w^{-1}(\zeta),\ \partial D).$$

Следовательно

$$A\varphi\left(\left|z-\frac{w^{-1}(\zeta)}{|w^{-1}(\zeta)|}\right|\right)\leqslant\varphi\left(\left|w(z)-\frac{\zeta}{|\zeta|}\right|\right)<2\rho(\zeta,\partial G)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2}{A}\rho(w^{-1}(\zeta),\partial D)=\frac{2}{A}(1-|w^{-1}(\zeta)|).$$

Поэтому

$$\Delta_\varphi(w(z))\subseteq w(\Delta_{\frac{A\cdot\varphi}{2}}(z)),$$

при $z\in F$. Откуда следует, что $F\subseteq w(H)$, где

$$H=\left\{y\in\partial D;\ \sup_{w\in\Delta_{\frac{A\cdot\varphi}{2}}(y)}\frac{|v(w)|}{g(1-|w|)}=\infty\right\}.$$

В силу леммы 3 $M_h(H)=0$, что противоречит предположению $M_h(F)>0$. Теорема доказана.

3°. В этом параграфе мы докажем леммы о произведениях Бляшке. Эти леммы в некоторых частных случаях были доказаны в статье автора [1]. В конце параграфа мы приведем основной результат настоящей статьи о единственности аналитической функции из A_K.

Лемма 5. *Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в единичном круге, удовлетворяющая условию*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<\infty.$$

Пусть $1\leqslant g(t)\leqslant\frac{1}{t}$ — невозрастающая непрерывная функция, а $0\leqslant\varphi(t)\leqslant t$ — неубывающая непрерывная функция. Тогда существует $E\subseteq\partial D$ такое, что $M_h(E)=0$, где $h(t)=\varphi(t)\,g(\varphi(t))$ и для любой точки $y\in\partial D\setminus E$ сходится ряд

$$\sum_{z_k\in\Delta_\varphi(y)}\frac{1}{g(1-|z_k|)}<\infty.$$

Доказательство. Для любой точки $0\neq z\in D$ положим

$$C_\varphi(z)=\{y\in\partial D;\ z\in\Delta_\varphi(y)\}.$$

Через $\chi_\varphi(z,y)$ мы обозначим характеристическую функцию множества $C_\varphi(z)$, $y\in\partial D$. Определим функцию

$$f(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\chi_\varphi(z_k,y)}{g(1-|z_k|)}.$$

Заметим, что

$$f(y)=\sum_{z_k\in\Delta_\varphi(y)}\frac{1}{g(1-|z_k|)}.$$

Поэтому достаточно доказать, что множество

$$E=\{y\in\partial D,\ f(y)=\infty\}$$

имеет нулевую h-хаусдорфовую меру. Предположим, что это не так. Тогда по теореме Фростмана (см. Л. Карлесон [2], стр. 14) существует константа a такая, что для любого компактного множества F существует неотрицательная мера μ, обладающая свойствами

$$\mu(S_r)\leqslant h(r)$$

для любой дуги $S_r\subset\partial D$ длины $2r$ и

$$\mu(F)\geqslant a\,M_h(F).$$

По теореме Безиковича (см. Л. Карлесон [2], стр. 18) E содержит замкнутое подмножество F, для которого $M_h(F)>0$. Пусть μ—мера, соответствующая множеству F. Тогда имеем

$$\infty=\int\limits_F f(y)\,d\mu(y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu(C_\varphi(z_k))}{g(1-|z_k|)}\leqslant$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)\right)\sup_{z\in D}\frac{\mu(C_\varphi(z))}{(1-|z|)\,g(1-|z|)}.$$

Заметим, что $C_\varphi(z)$— дуга на ∂D с центром в точке $\frac{z}{|z|}$ и длиной $m(C_\varphi(z))=\varphi^{-1}(1-|z|)$. Поэтому

$$\infty\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)\right)\sup_{z\in D}\frac{\mu(C_\varphi(z))}{(1-|z|)\,g(1-|z|)}\leqslant\left(\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)\right)\times$$

$$\times\sup_{0<t<1}\frac{h(\varphi^{-1}(t))}{tg(t)}<\infty.$$

Из полученного противоречия следует, что $M_h(E)=0$.

Лемма 6. *Пусть $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$— последовательность в единичном круге, для которой сходится ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{g(1-|w_k|)}<\infty,$$

где $1\leqslant g(t)\leqslant\frac{1}{t}$— невозрастающая, а $tg(t)$— неубывающая функция. Тогда для любой последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условиям

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{g(1-|z_n|)} = \infty$$

и

$$\inf_{i \neq j} |g(1-|z_i|) - g(1-|z_j|)| > 0,$$

имеет место неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{\log |B(z_n, \{w_k\})|}{g(1-|z_n|)} > -\infty,$$

где $B(z, \{w_k\})$—*произведение Бляшке с нулями в точках* $\{w_k\}$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\pi(z) = \frac{z}{|z|}\left(\frac{1}{g(1-|z|)}\right),$$

где $0 \neq z \in D$, при $z=0$ положим $\pi(0)=0$.

Заметим, что $\pi(z)$ отображает единичный круг на себя и для любого $z \in D$, $|\pi(z)| \leqslant |z|$. Докажем, что имеет место неравенство

$$\left|\frac{|\pi(z)| - |\pi(w)|}{1-|\pi(z)|\,|\pi(w)|}\right| \leqslant \left|\frac{|z|-|w|}{1-|z|\,|w|}\right|. \tag{9}$$

Обозначим $x = 1-|w|$, $y = 1-|z|$. Тогда неравенство (9) примет вид

$$\left|\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(y)}}{\dfrac{1}{g(x)} + \dfrac{1}{g(y)} - \dfrac{1}{g(x)\,g(y)}}\right| \leqslant \frac{|x-y|}{|x+y-xy|}. \tag{10}$$

Не теряя общности можно предположить, что $x \geqslant y$. Неравенство (10) эквивалентно следующему:

$$\frac{2y}{g(x)} + \frac{xy}{g(y)} + \frac{y}{g(x)\,g(y)} \leqslant \frac{2x}{g(y)} + \frac{xy}{g(x)} + \frac{x}{g(x)\,g(y)}. \tag{11}$$

Так как $g(t)$—невозрастающая, а $tg(t)$ — неубывающая функция, то

$$\frac{y}{g(x)\,g(y)} \leqslant \frac{x}{g(x)\,g(y)}, \quad \frac{xy}{g(y)} \leqslant \frac{xy}{g(x)}, \quad \frac{2y}{g(x)} \leqslant \frac{2x}{g(y)}.$$

Суммируя эти неравенства получим неравенство (11). Далее, в силу (9) имеем

$$|B(|\pi(z)|, \{|\pi(w_k)|\})| = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{|\pi(z)| - |\pi(w_k)|}{1-|\pi(z)|\,|\pi(w_k)|} \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} \left|\frac{|z|-|w_k|}{1-|z|\,|w_k|}\right| \leqslant$$
$$\leqslant |B(z, \{w_k\})|. \tag{12}$$

Заметим, что последовательности $\{\pi(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\pi(w_k)\}_{k=1}^{\infty}$ обладают свойствами

1. $$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|\pi(w_k)|)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{g(1-|w_k|)}<\infty;$$

2. $$\inf_{i\neq j}\left|\frac{|\pi(z_i)|-|\pi(z_j)|}{((1-|\pi(z_i)|)(1-|\pi(z_j)|)}\right|=\inf_{i\neq j}|g(1-|z_i|)-g(1-|z_j|)|>0.$$

3. $$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\pi(z_n)|)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{g(1-|z_n|)}=\infty.$$

Из свойства 1 следует что произведение Бляшке с нулями $\{|\pi(w_k)|\}_{k=1}^{\infty}$ сходится. Из 2 и 3 следует, что последовательность $\{|\pi(z_n)|\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям теоремы С. Я. Хавинсона (формулировка этой теоремы приведена во введении настоящей статьи). Следовательно

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(1-|\pi(z_n)|)\log|B(|\pi(z_n)|,\ \{|\pi(w_k)|\})|>-\infty.$$

В силу неравенства (12) имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\log|B(z_n,\ \{w_k\})|}{g(1-|z_n|)}>-\infty.$$

Лемма 7. *Пусть $4\varphi(t)\leqslant t$ — неотрицательная неубывающая функция. Положим, что для точек $y\in\partial D$; $z,\ w\in D$ имеют место неравенства*

$$2(1-|w|)\leqslant\varphi\left(\left|y-\frac{w}{|w|}\right|\right),\quad 1-|z|\geqslant c\varphi\left(\left|y-\frac{z}{|z|}\right|\right),$$

где $c=\sup\limits_{0<t}\dfrac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}$. *Тогда имеет место неравенство*

$$-4\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{\left|z-\frac{w}{|w|}\right|^2}\leqslant\log\left|\frac{w-z}{1-\bar{w}z}\right|^2.$$

Доказательство. Имеет место оценка

$$-\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|w-z|^2}\leqslant-\log\left(1+\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{|w-z|^2}\right)=\log\left|\frac{w-z}{1-\bar{w}z}\right|^2.$$

Заметим, что если имеет место неравенство

$$2(1-|w|)\leqslant\left|z-\frac{w}{|w|}\right|,\tag{13}$$

то

$$\left|z-\frac{w}{|w|}\right|\leqslant|z-w|+\left|w-\frac{w}{|w|}\right|=|z-w|+1-|w|\leqslant|z-w|+$$
$$+\frac{1}{2}\left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Следовательно

$$\left|z-\frac{w}{|w|}\right|\leqslant 2|z-w|.$$

Поэтому, если точки z и w удовлетворяют неравенству (13), то

$$-4\frac{(1-|w|^2)(1-|z|^2)}{\left|z-\frac{w}{|w|}\right|^2}\leqslant\log\left|\frac{w-z}{1-\bar{w}z}\right|^2.$$

Таким образом, достаточно доказать, что из условий леммы следует, что z и w удовлетворяют оценке (13). Пусть $\zeta\in\partial D$ такая точка, что имеет место равенство

$$|y-\zeta|+2(1-|w|)=\left|y-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Имеем

$$2(1-|w|)\leqslant\varphi\left(\left|y-\frac{w}{|w|}\right|\right)<\frac{1}{4}\left|y-\frac{w}{|w|}\right|$$

и

$$\frac{1}{2}\left|y-\frac{w}{|w|}\right|<\left|y-\frac{w}{|w|}\right|-2(1-|w|)=|y-\zeta|.$$

Поэтому

$$2(1-|w|)\leqslant\varphi\left(\left|y-\frac{w}{|w|}\right|\right)<c\varphi\left(\frac{1}{2}\left|y-\frac{w}{|w|}\right|\right)\leqslant c\varphi(|y-\zeta|).$$

Отсюда следует, что $2(1-|w|)\zeta\,\overline{\in}\,\Delta_{c\varphi}(y)$. Следовательно,

$$\left\{z\in D;\ \left|z-\frac{w}{|w|}\right|<2(1-|w|)\right\}\cap\Delta_{c\varphi}(y)=\varnothing.$$

Так как $z\in\Delta_{c\varphi}(y)$, то

$$2(1-|w|)\leqslant\left|z-\frac{w}{|w|}\right|.$$

Теорема 2. *Пусть $K(t)$ и $g(t)$ — невозрастающие непрерывные функции, для которых*

$$1\leqslant K(t)\leqslant g(t)\leqslant\frac{1}{t},\quad\sup_{0<t}\frac{|g'(2t)|}{|g'(t)|}<\infty$$

и

$$\int_0^1\sqrt{\frac{K(t)}{t}}\,dt<\infty.$$

Пусть $\varphi(t)\geqslant 0$ — неубывающая непрерывная функция, определенная при $0\leqslant t\leqslant 2$, причем $\frac{\varphi(t)}{t}$ неубывающая, $\frac{\varphi(t)}{t^2}$ — монотонная, $\sup\limits_{0<t}\frac{t\varphi'(t)}{\varphi(t)}<\infty$ *и*

$$\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt < \infty, \quad \int_0^1 K(\varphi(t))\,dt < \infty, \quad \lim_{t\to 0}\frac{1}{\varphi(t)\,g(\varphi(t))}\int_0^t K(\varphi(x))\,dx = 0.$$

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — *последовательность точек в единичном круге* D, *а* E — *замкнутое множество в* ∂D. *Предположим, что для любой точки* $y \in E$ *существует подпоследовательность* $\{z_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, *удовлетворяющая условиям:*

1. $z_{n_k} \in \Delta_\varphi(y)$, $k=1, 2, \cdots;$
2. $\inf\limits_{i\neq j} |g(1-|z_{n_i}|) - g(1-|z_{n_j}|)| > 0;$
3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{g(1-|z_{n_k}|)} = \infty,$

а множество E *удовлетворяет условиям*

$$K(\varphi(E)) < \infty, \quad M_h(E) > 0,$$

где $h(t) = \varphi(t)\,g(\varphi(t))$.

Тогда если $f(z) \in A_k$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log|f(z_n)|}{g(1-|z_n|)} = -\infty,$$

то $f(z) \equiv 0$.

Доказательство. Предположим обратное, т. е. что существует $f(z) \in A_K$, $f(z) \not\equiv 0$, удовлетворяющая условиям теоремы. Следуя конструкциям, приведенным в теореме 1, построим область G и обозначим через $w = w(z)$ функцию, которая конформно отображает единичный круг на G. Повторяя рассуждения теоремы 1, легко убедиться, что $F(z) = f(w(z))$ имеет ограниченную характеристику. Обозначим $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность в D, где $w(a_k) = z_k$ и пусть $F = \{z \in \partial D,\ w(z) \in E\}$. Заметим, что $M_h(F) > 0$ и последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям 1, 2, 3 нашей теоремы, где вместо E нужно брать множество F, а вместо $\varphi(t)$ функцию $c\varphi(t)$, где c — постоянное число. Имеем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log|F(a_k)|}{g(1-|a_k|)} = -\infty.$$

Из теоремы Неванлинна следует, что $F(z)$ допускает представление в виде

$$F(z) = z^p\, B(z, \{b_k\}) \exp\left\{\int_0^{2\pi} \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,d\mu(t) + iC\right\},$$

где p — натуральное число, $B(z, \{b_k\})$ — произведение Бляшке, составленное по нулям функции $F(z)$, μ — конечная мера, C — действительное число. Следовательно

$$\frac{\log|F(z)|}{g(1-|z|)}=\frac{p\log|z|}{g(1-|z|)}+\frac{\log|B(z,\{b_k\})|}{g(1-|z|)}+\frac{u(z)}{g(1-|z|)}, \tag{14}$$

где $u(z)$ можно представить в виде разности двух неотрицательных гармонических функций. В силу леммы 3 существует $F_1\subset\partial D$ такое, что $M_h(F_1)=0$ и для любой точки $y\in\partial D\setminus F_1$

$$\sup_{z\in\Delta_{c\varphi}(y)}\frac{|u(z)|}{g(1-|z|)}<\infty. \tag{15}$$

Так как

$$\lim_{|z|\to 1}\frac{\log|z|}{g(1-|z|)}=0,$$

то остается исследовать второе слагаемое в (14).

В силу леммы 5 существует $F_2\subset\partial D$ такое, что $M_h(F_2)=0$ и

$$\sum_{b_k\in\Delta_{c_1\varphi}(y)}\frac{1}{g(1-|b_k|)}<\infty,$$

при $y\in\partial D\setminus F_2$, где c_1 — постоянное число, удовлетворяющее неравенствам

$$0<c_1<\min\left\{\frac{1}{2},\ \frac{c}{2\sup\limits_{0<t}\dfrac{\varphi(2t)}{\varphi(t)}},\ c\inf_{0<t}\frac{t}{4\varphi(t)}\right\}.$$

Введем функцию

$$v(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1-|z|^2}{\left|z-\dfrac{b_k}{|b_k|}\right|^2}(1-|b_k|^2).$$

Заметим, что $v(z)$ — неотрицательная гармоническая в D функция и в силу леммы 3 существует множество $F_3\subset\partial D$ такое, что $M_h(F_3)=0$ и

$$\sup_{z\in\Delta_{c\varphi}(y)}\frac{v(z)}{g(1-|z|)}<\infty, \tag{16}$$

при $y\in\partial D\setminus F_3$. Так как $M_h(F)>0$, то существует точка $y\in F\setminus(F_1\cup F_2\cup F_3)$. Разобьем произведение Бляшке $B(z,\{b_k\})$ на две части

$$B(z,\{b_k\})=B_1(z)\,B_2(z),$$

где $B_1(z)$ — произведение Бляшке, составленное по тем b_k, которые попадают в $\Delta_{c_1\varphi}(y)$, а $B_2(z)$ — по остальным точкам b_k. В силу леммы 6

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\log|B_1(a_n)|}{g(1-|a_n|)}>-\infty. \tag{17}$$

Далее, в силу леммы 7, имеет место неравенство

$$\log|B_2(z)|\geqslant-\sum_{b_k\in\Delta_{c_1\varphi}(y)}\frac{1-|z|^2}{\left|z-\dfrac{b_k}{|b_k|}\right|^2}(1-|b_k|^2)\geqslant-v(z),$$

при $z \in \Delta_\varphi(y)$. Поэтому из (16) следует, что

$$\inf_{z \in \Delta_\varphi(y)} \frac{\log |B_2(z)|}{g(1-|z|)} > -\infty. \tag{18}$$

Из неравенств (15), (17) и (18) вытекает, что

$$\varlimsup_{\substack{a_k \in \Delta_\varphi(y) \\ |a_k| \to 1}} \frac{\log |F(a_k)|}{g(1-|a_k|)} > -\infty.$$

Полученное неравенство противоречит условию, наложенному на функцию $F(z)$. Теорема доказана.

4°. Мы рассмотрели такие классы A_K, для которых функция $K(t)$ удовлетворяет условиям

$$1 \leqslant K(t) \leqslant \frac{1}{t} \text{ и } \int_0^1 \sqrt{\frac{K(t)}{t}}\, dt < \infty.$$

Естественно возникают вопросы: можно ли доказать аналогичные теоремы для классов A_K, где $K(t)$ растет быстрее, чем $\frac{1}{t}$, при $t \to 0$, а также обобщить результаты настоящей статьи, предполагая, что $g(t) \leqslant K(t)$? В этом параграфе мы построим примеры функций, которые дают отрицательный ответ на поставленные выше вопросы. Примеры будут построены для таких функций $K(t)$, которые допускают представление

$$K(t) = \int_\varepsilon^\infty \frac{d\mu(x)}{t^x},$$

где μ — неотрицательная конечная мера, а ε — любое число больше нуля.

Обозначим

$$u(re^{it}) = \sum_{k=0} r^{2^k} \cos(2^k t) \int_\varepsilon^\infty \frac{2^{kt}}{\Gamma(t)}\, d\mu(t),$$

где $\Gamma(t)$ — гамма-функция Эйлера. Заметим, что

$$|u(re^{it})| \leqslant \sum_{k=0}^\infty r^{2^k} \int_\varepsilon^\infty \frac{2^{kt}}{\Gamma(t)}\, d\mu(t) \leqslant \int_0^\infty \int_\varepsilon^\infty \frac{r^{2^x} 2^{xt}}{\Gamma(t)}\, d\mu(t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \int_{\varepsilon \log \frac{1}{r}}^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-v}\, v^{t-1}}{\Gamma(t) \log^t \frac{1}{r}}\, dv\, d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\log 2} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{\log^t \frac{1}{r}} \leqslant \frac{1}{\log 2} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{(1-r)^t} = \frac{K(1-r)}{\log 2}.$$

Теперь рассмотрим функцию $u(z)$ на радиусах $\{z;\ \arg z = \pi 2^{1-k} n\}$ где $n = 0, 1, \cdots, 2^k$. Имеем

$$u\left(re^{i\pi 2^{1-k} n}\right) = \sum_{j=0}^{k-1} r^{2^j} \cos\left(\pi 2^{j-k+1}\right) \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{2^{jt}}{\Gamma(t)} d\mu(t) +$$

$$+ \sum_{j=k}^{\infty} r^{2^j} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{2^{jt}}{\Gamma(t)} d\mu(t).$$

Следовательно

$$u\left(r e^{i\pi 2^{1-k} n}\right) \geqslant \sum_{j=k}^{\infty} r^{2^j} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{2^{jt}}{\Gamma(t)} d\mu(t) - \sum_{j=0}^{k-1} r^{2^j} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{2^{jt}}{\Gamma(t)} d\mu(t) \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{k+1}^{\infty} r^{2^x} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{2^{xt}}{\Gamma(t)} d\mu(t)\, dx - \int\limits_{0}^{k} r^{2^x} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{2^{xt}}{\Gamma(t)} d\mu(t)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\log 2} \left(\int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \int\limits_{2^{k+1} \log \frac{1}{r}}^{\infty} \frac{e^{-v}\, v^{t-1}}{\Gamma(t) \log^t \frac{1}{r}} d\mu(t)\, dv - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \int\limits_{\log \frac{1}{r}}^{2^k \log \frac{1}{r}} \frac{e^{-v}\, v^{t-1}}{\Gamma(t) \log^t \frac{1}{r}} d\mu(t)\, dv \right).$$

Выберем $r = r_k$ таким образом, чтобы $2^k \log \dfrac{1}{r_k} = \delta$, где δ — фиксированное положительное число. Тогда имеем

$$u\left(r_k e^{i\pi 2^{1-k} n}\right) \geqslant \frac{1}{\log 2} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(\int\limits_{2\delta}^{\infty} \frac{e^{-v}\, v^{t-1}}{\Gamma(t)} dv - \int\limits_{0}^{\delta} \frac{e^{-v}\, v^{t-1}}{\Gamma(t)} dv \right) \frac{d\mu(t)}{\log^t \frac{1}{r_k}} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\log 2} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{\Gamma(t)} \int\limits_{0}^{\delta} e^{-v}\, v^{t-1}\, dv \right) \frac{d\mu(t)}{(1-r_k)^t}.$$

Заметим, что число $\delta > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы имело место неравенство

$$u\left(r_k e^{\pi 2^{1-k} n i}\right) > c \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\mu(t)}{(1-r_k)^t} = c\, K(1-r_k),$$

где c — постоянное число, не зависящее от $k=1, 2, \cdots$. Окончательно мы получаем, что

$$\sup_{z \in D} \frac{|u(z)|}{K(1-|z|)} < \infty$$

и в точках $z_{n,k} = \exp\left\{-\frac{\delta}{2^k} + \pi 2^{1-k} n i\right\}$, где $n=0, 1, \cdots, 2^k$, $k=1,2,\cdots$ имеет место неравенство

$$u(z_{n,k}) \geqslant c\, K(1-|z_{n,k}|).$$

Заметим, что для любого $y \in \partial D$ существует бесконечное множество точек вида $z_{n,k}$, которые попадают в $\Delta_{\frac{t}{\delta}}(y)$. Поэтому

$$\varlimsup_{\substack{z \in \Delta_{\frac{t}{\delta}}(y) \\ z \to y}} \frac{u(z)}{K(1-|z|)} \geqslant c > 0.$$

Существование гармонической функции с указанными выше свойствами показывает, что функцию $g(t)$ нельзя брать меньше функции $K(t)$. С другой стороны, из результатов Н. К. Никольского [9] следует, что для достаточно широкого класса функций $K(t)$, растущих при $t \to 0$ быстрее, чем $\frac{1}{t}$ (например, для $K(t) = \frac{1}{t^\alpha}$, $\alpha > 1$) гармоническая функция $u(z)$, для которой $u(z) \leqslant c\,(K(1-|z|)$ допускает такую же оценку снизу: $u(z) \geqslant -c_1 K(1-|z|)$. Следовательно, для таких $K(t)$ не имеет смысла брать функцию $g(t)$ растущей быстрее, чем $K(t)$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 20.XII.1979

Ա. Ա. ՎԱՂԱՐՇԱԿՅԱՆ. Եզրի մոտ աճող անալիտիկ ֆունկցիաների միակության մասին (ամփոփում)

Ներկա հոդվածում ապացուցվում են նոր թեորեմներ A_K դասին պատկանող անալիտիկ ֆունկցիաների միակության մասին։

A. A. VAGARSHAKIAN. *About uniqueness of analytic functions growing near the boundary* (summary)

In this paper a new uniqueness theorem for analytic functions in classes A_K is proved.

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Вагаршакян.* Теоремы единственности для ограниченных аналитических функций и их приложения в теории аппроксимации, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., XII, № 5, 1977, 345—357.
2. *Л. Карлесон.* Избранные проблемы теории исключительных множеств, Изд. «Мир», М., 1971.
3. *C. A. Rogers.* Hausdorff measures, Cambridge, 1970.
4. *А. А. Вагаршакян.* Граничные свойства некоторых классов гармонических функций, Изв. АН Арм. ССР, сер. матем., X, № 1, 1975, 54—60.
5. *С. Я. Хавинсон.* Теория экстремальных задач для ограниченных аналитических функций, удовлетворяющих дополнительным условиям внутри области, УМН. XVIII, 2 (110), 1963.
6. *M. Tsuji.* The boundary distortion on conformal mapping, J. Math. Soc., Japan, 1954, 6, № 3—4, 235—261.
7. *И. В. Ушакова.* Теория единственности для функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге, ДАН СССР, 130, № 1, 1960.
8. *М. Гусман.* Дифференцирование интегралов в R^n, Изд. «Мир», М., 1978.
9. *Н. К. Никольский.* Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа, Труды матем. ин-та им. В. А. Стеклова, CXX, 1974.