ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մաթեմատիկա XV, № 6, 1980 Математика

Г. С. АКОПЯН

ОБ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПУЧКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

1°. **Введение.** Однородная задача Дирихле для простейшего гиперболического уравнения впервые была рассмотрена в работе Р. А. Александряна [1] в связи с изучением качественного поведения решений системы С. Л. Соболева, описывающей малые колебания вращающейся идеальной жидкости [2], [3].

В [4] было показано, что эта задача эквивалентна изучению спектральных свойств некоторого ограниченного и самосопряженного в $\overset{\circ}{W}{}_2^1$ оператора.

При построении спектрального разложения упомянутого оператора, фундаментальную роль сыграло исследование свойств введенного в [4], [5] семейства диффеоморфизмов границы области, которое опиралось на использование и развитие классической теории Пуанкаре-Данжуа.

В настоящей работе мы рассматриваем аналогичные вопросы, однако уже для операторов с постоянными коэффициентами, действующими в пространстве вектор-функций.

2°. Пусть Ω—ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей Γ.

В гильбертовом пространстве вектор-функций

$$\overset{\circ}{\vec{W}}{}_2^1(\Omega)=\left\{\vec{f}(x, y)=\begin{pmatrix} f_1(x, y)\\ \vdots \\ f_n(x, y)\end{pmatrix},\ f_i(x, y)\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),\ i=1, 2,\cdots, n\right\}$$

рассматривается оператор

$$\mathbf{A}=-\Delta^{-1}\left(A\frac{\partial^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

где A, B, C — $n\times n$ коммутирующие между собой постоянные, вещественные, симметрические матрицы, Δ^{-1} —оператор, обратный к оператору Δ при нулевых краевых условиях.

В пространстве $\overset{\circ}{\vec{W}}{}_2^1(\Omega)$ скалярное произведение зададим по формуле

$$(\vec{f}, \vec{g})_1=\int\limits_{\Omega}\left[\frac{\partial \vec{f}}{\partial x}\cdot\frac{\partial \vec{g}}{\partial x}+\frac{\partial \vec{f}}{\partial y}\cdot\frac{\partial \vec{g}}{\partial y}\right]dxdy.$$

Предложение 2.1. *В пространстве* $\vec{\mathring{W}}{}_2^1(\Omega)$ *оператор* $\mathbf{A}$ *является ограниченным и самосопряженным, а его собственные функции являются решениями однородной краевой задачи*

$$(A+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x\partial y}+(C+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial y^2}=0, \tag{1}$$

$$\vec{u}\big|_\Gamma=0, \tag{2}$$

где E—единичная матрица.

Доказательство. Пусть $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — произвольные вектор-функции из $\vec{\Phi}_0(\Omega)=\{\vec{f}(x,y);\ \vec{f}(x,y)\in C^\infty(\bar{\Omega}),\ \vec{f}|_\Gamma=0\}$. Тогда

$$(\mathbf{A}\vec{u},\vec{v})_1=\iint\limits_\Omega\left[\frac{\partial\mathbf{A}\vec{u}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial x}+\frac{\partial\mathbf{A}\vec{u}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial y}\right]dxdy=$$

$$=\iint\limits_\Omega\left[\frac{\partial^2\mathbf{A}\vec{u}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathbf{A}\vec{u}}{\partial y^2}\right]\cdot\vec{v}dxdy=\iint\limits_\Omega\left[A\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial y^2}\right]\times$$

$$\times\vec{v}dxdy=\int\limits_\Omega\vec{u}\cdot\left[A\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial y^2}\right]dxdy=(\vec{u},\mathbf{A}\vec{v})_1$$

и $|(\mathbf{A}\vec{u},\vec{u})_1|\leqslant M(\vec{u},\vec{u})_1$.

Определение 2.1. $\vec{u}_\lambda(x,y)\in\vec{L}_2(\Omega)$ называется собственным функционалом оператора $\mathbf{A}$ или краевой задачи (1)—(2), соответствующим собственному значению λ, если

$$\int\limits_\Omega\vec{u}_\lambda(x,y)\cdot\left[(A+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+(C+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=0 \tag{3}$$

для всех $\vec{\varphi}(x,y)\in\vec{\Phi}_0(\Omega)$.

Пусть a_k, b_k, c_k, $1\leqslant k\leqslant n$ — собственные значения матриц A, B, C и $\gamma_k(\lambda)$ — совокупность тех граничных точек*, в которых

$$(a_k+\lambda)\cos^2\nu x+b_k\cos\nu x\cos\nu y+(c_k+\lambda)\cos^2\nu y=0.$$

Предложение 2.2. *Если собственный функционал* $\vec{u}_\lambda(x,y)$ — *гладкая вектор-функция и если дополнения к множествам* $\gamma_k(\lambda)$, $k=1,2,\cdots,n$ *являются всюду плотными на* Γ, *то* $\vec{u}_\lambda(x,y)$ *является классическим решением задачи* (1)—(2).

---

* ν — внешняя нормаль.

Доказательство. Пусть N — невырожденное преобразование, приводящее матрицы A, B, C одновременно к диагональному виду

$$N^{-1}AN=D_A,\ N^{-1}BN=D_B,\ N^{-1}CN=D_C.$$

Ясно, что если $\vec{\varphi}$ принадлежит $\vec{\Phi}_0(\Omega)$, то $N\vec{\varphi}$ тоже принадлежит $\vec{\Phi}_0(\Omega)$. Подставляя в определение собственного функционала вектор-функции $N\vec{\varphi}_k$, где $\vec{\varphi}_k(x, y)$ — вектор-функция, k-тая компонента которой равна $\varphi_k(x, y)\in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi_k|_\Gamma=0$, остальные компоненты — нули, получим

$$0=\int_\Omega \vec{u}_\lambda(x, y)\cdot\left[(A+\lambda E)\frac{\partial^2 N\vec{\varphi}_k}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 N\vec{\varphi}_k}{\partial x\,\partial y}+(C+\lambda E)\frac{\partial^2 N\vec{\varphi}_k}{\partial y^2}\right]dxdy=$$

$$=\int_\Omega \vec{u}_\lambda(x, y)\cdot\left[(AN+\lambda N)\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial x^2}+BN\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial x\partial y}+\right.$$

$$\left.+(CN+\lambda N)\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial y^2}\right]dxdy=\int_\Omega \vec{u}_\lambda(x, y)\cdot\left[N(D_A+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+ND_B\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial x\partial y}+N(D_C+\lambda E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}_k}{\partial y^2}\right]dxdy=\int_\Omega [N^*\vec{u}_\lambda]_k\times$$

$$\times\left[(a_k+\lambda)\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}+b_k\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x\partial y}+(C_k+\lambda)\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial y^2}\right]dxdy,$$

где $[N^*\vec{u}_\lambda]_k$ — k-тая компонента вектор-функции $N^*\vec{u}_\lambda$.

Интегрированием по частям получим

$$0=\int_\Omega\varphi_k\cdot\left[(a_k+\lambda)\partial^2\frac{[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial x^2}+b_k\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial x\partial y}(+c_k+\lambda)\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial y^2}\right]dxdy+$$

$$+\int_\Gamma[N^*\vec{u}_\lambda]_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\nu}[(a_k+\lambda)\cos^2\nu x+b_k\cos\nu x\cos\nu y+(c_k+\lambda)\cos^2\nu y]\,ds. \quad (4)$$

Полагая в (4) φ_k произвольной финитной заключаем, что

$$(a_k+\lambda)\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial x^2}+b_k\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial x\partial y}+(c_k+\lambda)\frac{\partial^2[N^*\vec{u}_\lambda]_k}{\partial y^2}=0,\ k=1, 2,\cdots, n. \quad (5)$$

Поэтому (4) принимает вид

$$\int\limits_{\Gamma} [N^* \vec{u}_\lambda]_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu} [(a_k + \lambda) \cos^2 \nu x + b_k \cos \nu x \cos \nu y + (c_k + \lambda) \cos^2 \nu y] \, ds = 0,$$

откуда в силу произвольности $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \nu}$ на границе получаем $[N^* \vec{u}_\lambda]_k = 0$ $k = 1, 2, \cdots, n$ на Γ, следовательно, $\vec{u}_\lambda = 0$ на Γ.

Из (5) получаем, что

$$(D_A + \lambda E) \frac{\partial^2 N^* \vec{u}_\lambda}{\partial x^2} + D_B \frac{\partial^2 N^* \vec{u}_\lambda}{\partial x \partial y} + (D_C + \lambda E) \frac{\partial^2 N^* \vec{u}_\lambda}{\partial y^2} = 0.$$

Так как $AN = ND_A$, $BN = ND_B$, $CN = ND_C$, то $D_A N^* = N^* A$, $D_B N^* = N^* B$, $D_C N^* = N^* C$ откуда имеем

$$N^* (A + \lambda E) \frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial x^2} + N^* B \frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial x \partial y} + N^* (C + \lambda E) \frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial y^2} = 0,$$

следовательно, $(A + \lambda E) \frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial x \partial y} + (C + \lambda E) \frac{\partial^2 \vec{u}_\lambda}{\partial y^2} = 0.$

3°. Будем считать область Ω „допустимой“, т. е. такой, что любая прямая пересекает ее границу не более, чем в двух точках.

Рассмотрим однородную краевую задачу:

$$(a + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (c + \lambda) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$
$$u|_\Gamma = 0. \qquad (*)$$

Пусть $y + \mu_1 x = \text{const}$ и $y + \mu_2 x = \text{const}$ — соответственно первое и второе семейство вещественных характеристик уравнения ($*$), где μ_1 и μ_2—решения характеристического уравнения $(a + \lambda) \mu^2 + b\mu + c + \lambda = 0$.

Диффеоморфизм $S_\lambda^{(+)}(a, b, c)$ (соответственно $S_\lambda^{(-)}(a, b, c)$) сопоставляют каждой точке $\theta \in \Gamma$ точку пересечения с границей Γ характеристики первого семейства (соответственно второго семейства), проходящей через θ.

Диффеоморфизм $S_\lambda(a, b, c)$ определяется как произведение диффеоморфизмов $S_\lambda^{(+)}(a, b, c)$ и $S_\lambda^{(-)}(a, b, c)$, т. е.

$$S_\lambda(a, b, c) = S_\lambda^{(-)}(a, b, c) \cdot S_\lambda^{(+)}(a, b, c).$$

Определение 3.1. Орбитой точки $\theta \in \Gamma$ относительно группы, порожденной образующими $S_\lambda(a, b, c)$ и $S_\lambda^{-1}(a, b, c)$ называется множество $Orb(\theta) = \{S_\lambda^k(a, b, c)\theta, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$, а

$$Orb(S_\lambda^{(+)}(a, b, c)\theta) \text{ и } Orb(S_\lambda^{(-)}(a, b, c)\theta)$$

называются смежными по отношению к $Orb(\theta)$.

Каждая точка $\theta \in \Gamma$ порождает вполне определенную совокупность граничных точек $\mathfrak{M}(\lambda, \theta, \Gamma)$, которая называется λ-орбитой и представляет объединение двух смежных орбит, порождаемых этой точкой.

λ-орбита $\mathfrak{M}(\lambda, \theta, \Gamma)$ называется тривиальной, если она содержит точку, в которой касательная к границе Γ параллельна одному из характеристических направлений.

Имеют место следующие леммы, справедливость которых устанавливается аналогично доказательству теорем 9, 11 из [5].

Лемма 3.1. *Если при $\lambda = \lambda_0$ некоторая итерация диффеоморфизма $S_{\lambda_0}(a, b, c)$ имеет такую неподвижную точку θ_0, что λ_0-орбита $\mathfrak{M}(\lambda_0, \theta_0, \Gamma)$ не является тривиальной, то существует собственный функционал краевой задачи (*), изоморфный ограниченной функции*

Доказательство. Пусть r — период точки θ_0, т. е. $S^r_{\lambda_0}(a, b, c)\theta_0 = \theta_0$. Проведем через точки $S^k_{\lambda_0}(a, b, c)\theta_0 (k = 0, 1, 2, \cdots, r-1)$ характеристики первого и второго семейств уравнения (*). На границе получим $2r$ различных точек. Пронумеруем эти точки в том порядке, в каком они встречаются при движении на границе Γ в положительном направлении: $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{2r-1}$. Определим на Γ две кусочно-постоянные функции $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ по формулам

$$u_1(\theta) = (-1)^i \frac{1}{2}, \quad u_2(\theta) = (-1)^{i+1} \frac{1}{2},$$

когда $\theta \in (\theta_i, \theta_{i+1})$. Нетрудно проверить, что функции $u_1(\theta)$ и $u_2(\theta)$ инвариантны относительно $S^{(+)}_{\lambda_0}(a, b, c)$ и $S^{(-)}_{\lambda_0}(a, b, c)$, т. е.

$$u_i(\theta) = u_i(S^{(+)}_{\lambda_0}(a, b, c)\,\theta) = u_i(S^{(-)}_{\lambda_0}(a, b, c)\,\theta), \; i=1, 2.$$

Определим функции $u_1(x, y, \lambda_0, \theta_0)$ и $u_2(x, y, \lambda_0, \theta_0)$ в Ω следующим образом: $u_1(x, y, \lambda_0, \theta_0) = u_1(\theta')$, $u_2(x, y, \lambda_0, \theta_0) = u_2(\theta'')$, где θ' (соответственно θ'') точка пересечения с границей Γ характеристики первого (соответственно второго) семейства уравнения (*), проходящей через точку (x, y).

Построим теперь функцию $u(x, y, \lambda_0, \theta_0) = u_1(x, y, \lambda_0, \theta_0) + u_2(x, y, \lambda_0, \theta_0)$. Докажем, что построенная таким образом кусочно-постоянная функция $u(x, y, \lambda_0, \theta_0)$ является собственным функционалом краевой задачи (*).

Характеристики обоих семейств, проведенные через точки $S^k_{\lambda_0}(a, b, c)\,\theta_0$ $(k=0, 1, 2, \cdots, r-1)$, разбили область Ω на конечное число параллелограммов $\Omega_1, \Omega_2, \cdots$, криволинейных треугольников и двуугольников, примыкающих к границе.

Представим себе область Ω покрашенной в два цвета по следующему правилу: частичные области, границы которых имеют одну и только одну общую точку, покрашены в один и тот же цвет, а если границы их имеют общий отрезок характеристики, покрашены в различные цвета.

Предположим, что один из криволинейных треугольников окрашен в белый цвет, тогда очевидно, при соблюдении указанного правила все частичные области будут окрашены в вполне определенный цвет. Легко видеть, что в частях области Ω, окрашенных в белый цвет, построенная функция $u(x, y, \lambda_0, \theta_0)$ равна нулю, а в параллелограммах, окрашенных в черный цвет, равна либо $+1$, либо -1, так, однако, что в черных параллелограммах с общей вершиной функция u принимает различные значения.

Очевидно, что

$$\int_{\Omega} u(x, y, \lambda_0, \theta_0)\cdot\left\{(a+\lambda_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+(c+\lambda_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\}dxdy=$$

$$=\sum\pm\int_{\Omega_p}\left\{(a+\lambda_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+(c+\lambda_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\}dxdy, \quad (7)$$

где суммирование распространено только на параллелограммы, окрашенные в черный цвет.

Принимая во внимание, что Γ_p—граница области Ω_p состоит из отрезков характеристик, вдоль которых подынтегральное выражение является полным дифференциалом, легко получим

$$\int_{\Omega_p}\left\{(a+\lambda_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+(c+\lambda_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\}dxdy=$$

$$=\int_{\Gamma_p}(a+\lambda_0)\frac{\partial\varphi}{\partial x}dy+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy-(c+\lambda_0)\frac{\partial\varphi}{\partial y}dx=\{\varphi(b_p)+\varphi(d_p)-$$

$$-\varphi(a_p)-\varphi(c_p)\},$$

где через a_p, b_p, c_p, d_p обозначены вершины параллелограмма Ω_p.

Подставляя значения интегралов по отдельным параллелограммам в (7) легко убедиться, что в получаемой при этом сумме значение функции $\varphi(x, y)$ в вершинах, общих для двух черных параллелограммов, фигурирует дважды, причем с различными знаками и, следовательно, эти слагаемые сокращаются. Если вершина не является общей для двух черных параллелограмов, то она должна принадлежать границе, где функция $\varphi(x, y)$ равна нулю.

Таким образом

$$\int_{\Omega} u(x, y, \lambda_0, \theta_0)\left\{(a+\lambda_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+(c+\lambda_0)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\}dxdy=0,$$

$$\varphi\in\Phi_0(\Omega).$$

Пусть $A_r(\lambda, a, b, c)$ — совокупность точек $\theta\in\Gamma$, неподвижных относительно r-й итерации отображения $S_\lambda(a, b, c)$. Ясно, что

$$\Gamma = A_{\infty}(\lambda, a, b, c) + \sum_{r=1}^{\infty} A_r(\lambda, a, b, c).$$

Можно доказать (см. лемму 12 [5]), что в этом представлении только одно слагаемое под знаком суммы может быть непустым. т. е. либо $\Gamma = A_{\infty}(\lambda, a, b, c)$, либо существует $r = r(\lambda, a, b, c)$ такое, что $\Gamma = A_{\infty}(\lambda, a, b, c) + A_r(\lambda, a, b, c)$.

Таким образом, диффеоморфизм $S_\lambda(a, b, c)$ состоит из двух компонент, одна из них индуцирована им на множестве $A(\lambda, a, b, c)$ — периодическая компонента с фиксированным периодом, а другая индуцирована им на множестве $A_{\infty}(\lambda, a, b, c)$ — апериодическая компонента.

Лемма 3.2. *Если множество $A_{\lambda_0}(a, b, c)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то можно построить гладкую собственную функцию краевой задачи* ($*$).

Доказательство. Пусть дуга $(\theta_1, \theta_2) \subset A(\lambda_0, a, b, c)$, т. е. для всех $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$ имеем $S^r_{\lambda_0}(a, b, c)\ \theta = \theta$.

Без ограничения общности можем считать, что

1) дуга (θ_1, θ_2) не содержит точку θ^*, являющуюся образом точки, в которой касательная к Г параллельна одной из характеристик;

2) все точки дуги (θ_1, θ_2) λ_0- различны, т. е. не принадлежат одной и той же λ_0-орбите $\mathfrak{M}(\lambda_0, \theta, \Gamma)$.

В противном случае берем такую ее часть, которая обладает указанными свойствами.

Образуем интеграл

$$v(x, y, \lambda_0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} u(x, y, \lambda_0, \theta)\, \sigma(\theta)\, d\theta,$$

где $u(x, y, \lambda_0, \theta)$ — функция, построенная в лемме 3.1, $\sigma(\theta)$ — произвольная гладкая функция.

При фиксированном $\theta \in (\theta_1, \theta_2)$, $u(x, y, \lambda_0, \theta)$ — кусочно-постоянная функция, представляющая собой линейную комбинацию характеристических функций полуплоскостей, определяемых характеристиками уравнения ($*$). Пусть $E(x, y, \lambda_0, \theta)$ — характеристическая функция одной из этих полуплоскостей. Функция

$$E(x, y, \lambda_0) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} E(x, y, \lambda_0, \theta)\, \sigma(\theta)\, d\theta$$

имеет конечный интеграл Дирихле. Это следует из того, что производная $E(x, y, \lambda_0)$ по направлению характеристик одного семейства равна нулю, а по перпендикулярному направлению, как нетрудно проверить, имеет столько же непрерывных производных, сколько $\sigma(\theta)$.

Таким образом, функция $v(x, y, \lambda_0)$ исчезает на границе, будет иметь конечный интеграл Дирихле и, как функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ будет удовлетворять уравнению ($*$), если только $\varphi'(\theta)$ интегрируема с квадратом модуля.

Теорема 3.1. *Если при $\lambda=\lambda_0$ для некоторого $1\leqslant k\leqslant n$ существует диффеоморфизм $S_{\lambda_0}(a_k, b_k, c_k)$, конечная итерация которого имеет неподвижную точку θ_0 такую, что λ_0-орбита $\mathfrak{M}(\lambda_0, \theta_0, \Gamma)$ не является тривиальной, то существует собственный функционал оператора* **А**, *изоморфный ограниченной вектор-функции.*

Доказательство. Пусть, как и выше, N — невырожденное преобразование, которое приводит одновременно к диагональному виду матрицы A, B, C. Из нашего условия и в силу леммы 3.1 следует, что уравнение ($*$) с коэффициентами λ_0, a_k, b_k, c_k имеет кусочно-постоянное решение $v_{\lambda_0 k}(x, y)$. Тогда $\vec{u}_{\lambda_0}=N\vec{v}_{\lambda_0}$, где $\vec{v}_{\lambda_0}$ — вектор-функция, k-тая компонента которой равна $v_{\lambda_0 k}$, аостальные компоненты—нули, будет собственным функционалом оператора **А**. В самом деле

$$\int_\Omega \vec{u}_{\lambda_0}\left[A+\lambda_0E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+(C+\lambda_0E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=$$

$$=\int_\Omega N\vec{v}_{\lambda_0}\left[(A+\lambda_0E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+(C+\lambda_0E)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=$$

$$=\int_\Omega \vec{v}_{\lambda_0}\cdot\left[(N^*A+\lambda_0N^*)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x^2}+N^*B\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+(N^*C+\lambda_0N^*)\frac{\partial^2\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=$$

$$=\int_\Omega \vec{v}_{\lambda_0}\cdot\left[(D_A+\lambda_0E)\frac{\partial^2N^*\vec{\varphi}}{\partial x^2}+D_B\frac{\partial^2N^*\vec{\varphi}}{\partial x\partial y}+\right.$$

$$\left.+(D_C+\lambda_0E)\frac{\partial^2N^*\vec{\varphi}}{\partial y^2}\right]dxdy=\int_\Omega v_{\lambda_0 k}\cdot\left[(a_k+\lambda_0)\frac{\partial^2[N^*\vec{\varphi}]_k}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+b_k\frac{\partial^2[N^*\vec{\varphi}]_k}{\partial x\partial y}+(c_k+\lambda_0)\frac{\partial^2[N^*\vec{\varphi}]_k}{\partial y^2}\right]dxdy=0.$$

Теорема 3.2. *Если при $\lambda=\lambda_0$ для некоторого $1\leqslant k\leqslant n$ множество $A(\lambda_0, a_k, b_k, c_k)$ имеет хотя бы одну внутреннюю точку, то можно построить гладкую собственную вектор-функцию краевой задачи* (1)—(2).

Доказательство. Из леммы 3.2 следует, что уравнение ($*$) с коэффициентами λ_0, a_k, b_k, c_k имеет собственную функцию $v_{\lambda_0 k}(x, y)$, которая принадлежит пространству $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Тогда вектор-функция

$\vec{u}_{\lambda_0} = N\vec{v}_{\lambda_0} \in \vec{W}_2^1(\Omega)$, где $\vec{v}_{\lambda_0}$ — вектор-функция, k-тая компонента которой равна $v_{\lambda_0 k}(x, y)$, а остальные компоненты нули, и в силу теоремы 3.1, будет собственным функционалом оператора $\mathbf{A}$.

4°. В этом пункте мы рассмотрим случай, когда Ω — круг и, аналогично, как это сделано в [5], построим явное выражение собственных вектор-функций через полиномы Чебышева.

Предложение 4.1. *Если Γ есть окружность $x^2+y^2=1$, то множество $A(\lambda, a, b, c) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда*

$$\lambda=\lambda_{l,m}=-\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}\cos\frac{\pi l}{m}\ (m=2, 3,\cdots,$$

$$l=1, 2,\cdots, m-1).$$

Доказательство. Пусть $\mu_1=\operatorname{tg}\alpha_1$, $\mu_2=\operatorname{tg}\alpha_2$ — решения характеристического уравнения, $\theta_0=e^{it_0}$ — произвольная точка на Γ. Легко видеть, что $S_\lambda(a, b, c)\,\theta_0=e^{i(t_0+2(\alpha_1-\alpha_2))}$ и по индукции $S_\lambda^m(a, b, c)\,\theta_0=e^{i(t_0+2m(\alpha_1-\alpha_2))}$, поэтому необходимым и достаточным условием неподвижности точки θ_0 является условие $\alpha_1-\alpha_2=\frac{\pi l}{2m}$. что, как нетрудно проверить, выполняется тогда и только тогда, когда

$$\lambda=-\frac{a+c}{2}+\frac{\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}\cos\frac{\pi l}{m}.$$

Теорема 4.1. *Если Ω есть круг $x^2+y^2<1$, то функции*

$$v_{l,m}(x, y)=\cos\left[m\arccos\left(x\sin\left(\frac{\pi l}{2m}-\beta\right)+y\cos\left(\frac{\pi l}{2m}-\beta\right)\right)\right]+$$

$$+(-1)^{l+1}\cos\left[m\arccos\left(y\cos\left(\frac{\pi l}{2m}+\beta\right)-x\sin\left(\frac{\pi l}{2m}+\beta\right)\right)\right]$$

*являются собственными функциями краевой задачи (*), соответствующими собственному значению $\lambda=\lambda_{l,m}$, где*

$$\beta=\frac{1}{2}\arccos\frac{a-c}{\sqrt{(a-c)^2+b^2}},\ m=2, 3,\cdots,\ l=1, 2,\cdots, m-1.$$

Доказательство. Функция $v_{l,m}(x, y)$ представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых постоянно на характеристиках первого семейства уравнения (*), а второе — на характеристиках второго семейства, поэтому она удовлетворяет уравнению (*) при $\lambda=\lambda_{l,m}$. Далее, переходя к полярным координатам и полагая $\rho=1$, получим

$$v_{l,m}(x, y)|_\Gamma=\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot m-mt+m\beta-\frac{\pi l}{2}\right)+$$

$$+(-1)^{l+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot m-mt+m\beta+\frac{\pi l}{2}\right)=0.$$

Из теорем 3.1, 4.1 следует, что вектор-функции $\vec{u}_{l,m,k}=N\vec{v}_{l,m,k}$, где $\vec{v}_{l,m,k}$ — вектор-функция, k-тая компонента которой равна $v_{l,m}$, а остальные компоненты — нули, являются собственными функциями оператора $\mathbf{A}$, соответствующими собственным значениям $\lambda_{l,m,k}$

$$\lambda=\lambda_{l,m,k}=-\frac{a_k+c_k}{2}+\frac{\sqrt{(a_k-c_k)^2+b_k^2}}{2}\cos\frac{\pi l}{m}$$

$$(m=2,\ 3,\cdots,\ l=1,\ 2,\cdots,\ m-1,\ k=1,\ 2,\cdots,\ n).$$

Теорема 4.2. *Вектор-функции* $\vec{u}_{l,m,k}(x,y)$ $(m=2,3,\cdots,\ l=1,\ 2,\cdots,\ m-1,\ k=1,\ 2,\cdots,n)$ *образуют полную систему в* $\vec{\overset{\circ}{W}}{}_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Допустим, что $(\vec{f},\ \vec{u}_{l,m,k})_1=0$ $(m=2,3,\cdots$ $\cdots,\ l=1,\ 2,\cdots,\ m-1,\ k=1,\ 2,\cdots,n)$. При фиксированном k получаем

$$0=(\vec{f},\ \vec{u}_{l,m,k})_1=(\vec{f},\ N\vec{v}_{l,m,k})_1=(N^*\vec{f},\ \vec{v}_{l,m,k})=([N^*\vec{f}]_k,\ v_{l,m})_1$$

для всех $m=2,\ 3,\cdots,\ l=1,\ 2,\cdots,\ m-1$. Так как функции $v_{l,m}(x,y)$ образуют полную систему в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (см. теорему 14 [5]), то $[N^*\vec{f}]_k=$ $=0,\ k=1,\ 2,\cdots,n,$ откуда вытекает, что $N^*\vec{f}=0$, следовательно, $\vec{f}=0$.

Институт математики
АН Армянской ССР

Поступила 21.XII.1979

Գ. Ս. ՀԱԿՈԲՅԱՆ. Վեկտոր-ֆունկցիաների տարածությունում դիֆերենցիալ օպերատորների փնջի համար Դիրիխլեի համասեռ խնդիրը *(ամփոփում)*

Դիտարկվում է Դիրիխլեի խնդիրը դիֆերենցիալ հավասարումների սիստեմների փնջի համար։ Ելնելով տիրույթի եզրագծի դիֆեոմորֆիզմների ընտանիքի որոշ հատկություններից, կառուցվում է այդ խնդրի ընդհանրացված լուծումների որոշակի համախմբություն։ Այն դեպքում, երբ տիրույթը շրջան է, կառուցվում է բազմանդամային սեփական վեկտոր-ֆունկցիաների լրիվ սիստեմ։

G. S. AKOPIAN. *On the homogenous Dirichlet problem for a bundle of differential operators in a space of vector-functions* (summary)

The Dirichlet problem for a bundle of systems of differential equations is investigated. Proper functionals of the problem are constructed, using familiar properties of specially chosen diffeomorphisms of the boundary. In the case, when the domain is a disk, the full system of polynomial proper vector-functions is constructed.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Р. А. Александрян.* О задаче Дирихле для уравнения струны и о полноте одной системы функций в круге, ДАН СССР, 73, № 5, 1950, 869—872.
2. *С. Л. Соболев.* Об одной новой задаче математической физики, Изв. АН СССР, сер. матем., 18, № 1, 1954, 3—50.
3. *С. Л. Соболев.* О движении симметрического волчка с полостью, наполненной жидкостью, ПМТФ, № 3, 1960, 20—55.
4. *Р. А. Александрян.* Диссертация, МГУ, 1949.
5. *Р. А. Александрян.* Спектральные свойства операторов, порожденных системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева, Труды ММО, 9, 1960, 455—505.